



**Politechnika Poznańska**  
Wydział Inżynierii Mechanicznej  
Instytut Mechaniki Stosowanej

**Praca dyplomowa magisterska**

# **Modelowanie i analiza właściwości mechanicznych protezy kończyny psa**

inż. Adrianna Leśniewicz

Promotor: dr hab. Tomasz Stręć, prof. uczelni  
Instytut Mechaniki Stosowanej Politechniki Poznańskiej

Poznań, 2021

## Spis treści

1. Wprowadzenie.....	4
1.1 Wstęp.....	4
1.2 Cel i zakres pracy.....	5
2. Anatomia i biomechanika kończyny miednicznej psa.....	6
2.1 Anatomia kończyny miednicznej psa.....	7
2.2 Biomechanika kończyny miednicznej psa.....	9
3. Protezowanie kończyny miednicznej psów.....	10
3.1 Protezy zastępujące całą kończynę miedniczną.....	11
3.2 Protezy zastępujące łapę.....	13
3.3 Wózki rehabilitacyjno-inwalidzkie.....	14
3.4 Materiały stosowane w produkcji protez.....	15
4. Właściwości mechaniczne w ciele stałym.....	18
4.1 Naprężenia i odkształcenia.....	18
4.2 Prawo Hooke'a.....	20
4.2.1 Prawo Hooke'a dla jednoosiowego stanu naprężeń.....	20
4.2.2 Prawo Hooke'a dla trójwymiarowych układów naprężeń.....	20
4.3 Związki konstytutywne.....	21
4.4 Równanie Naviera.....	23
4.5 Częstość własna.....	24
5. Metoda elementów skończonych.....	25
6. Model obliczeniowy.....	29
6.1 Wykorzystane oprogramowanie inżynierskie.....	29
6.2 Opis przypadku.....	31
6.3 Opis modelu protezy.....	31
6.4 Opis przeprowadzonych symulacji.....	34
6.4.1 Symulacje naprężeń, odkształceń i przemieszczeń.....	35

6.4.2 Symulacje częstotliwościowe.....	39
7. Wyniki symulacji.....	41
7.1 Symulacja naprężeń, odkształceń i przemieszczeń – przypadek 1.....	41
7.2 Symulacja naprężeń, odkształceń i przemieszczeń – przypadek 2.....	45
7.3 Symulacje częstotliwościowe.....	49
8. Podsumowanie i wnioski.....	55
Streszczenie.....	57
Abstract.....	57
Bibliografia.....	58

## 1. Wprowadzenie

### 1.1 Wstęp

Medycyna weterynaryjna jest nauką wciąż rozwijającą się, lecz jej początki datowane są już na trzecie tysiąclecie p.n.e. w starożytnej Mezopotamii, a poszerzanie wiedzy na temat leczenia zwierząt wzrastało z każdym kolejnym wiekiem. Mimo że weterynaria jest oddzielną dziedziną nauki, wiele zaczerpnęła z medycyny ludzkiej. Przykładem mogą być niektóre rozwiązania ortopedyczne, w tym leczenie złamań kości płytkami stabilizującymi i gwoździami śródszpikowymi, chirurgia lub diagnostyka taka jak rentgenografia czy ultrasonografia. Jedną z najprężniej rozwijających się i najnowocześniejszych dziedzin w weterynarii jest protetyka weterynaryjna bazująca na protetyce ludzkiej.

Protetyka jest zagadnieniem dotyczącym zastępowania części lub całości tkanek, narządów oraz kończyn organizmu. Łączy ze sobą zagadnienia medyczne oraz inżynierskie – wiedza na temat anatomii i fizjologii oraz materiałoznawstwa, wytrzymałości materiałów i technologii wytwarzania pozwala na unowocześnianie rozwiązań protetycznych nie tylko w przypadku ludzi, ale również zwierząt. Jest to związane ze zmianą mentalności społeczeństwa, które chce nieść pomoc zwierzętom, ułatwić ich życie i nie skazywać ich na cierpienie. W szczególności dotyczy to psów, które traktowane są przez ludzi często jako członkowie rodziny.

Protezowanie kończyn psów wciąż jest w fazie rozwoju i jest ściśle zależne od rasy zwierzęcia oraz możliwości finansowych opiekuna. Proteza musi być indywidualnie dopasowana do warunków anatomicznych psa, wyprodukowana z wytrzymałych materiałów i poddana odpowiedniej ilości testom oraz przymiarkom. Dzięki diagnostyce obrazowej, np. tomografii, możliwa jest dogłębna analiza i odtworzenie wymiarów brakującej kończyny. Oprogramowanie inżynierskie umożliwia projektowanie protezy i analizę jej właściwości mechanicznych. Różnego rodzaju technologie produkcji, np. wytwarzanie addytywne, umożliwiają relatywnie szybkie otrzymanie skomplikowanych geometrii z wykorzystaniem szerokiej gamy materiałów. Prawidłowe zaprojektowanie zindywidualizowanej protezy jest szansą dla zwierzęcia do odzyskania pełnej sprawności fizycznej. Każde rozwiązanie protetyczne dla psów i istnień innych niż człowiek jest dużym krokiem do unowocześniania i rozpowszechnienia niesienia zwierzętom tego rodzaju pomocy.

## 1.2 Cel i zakres pracy

Celem niniejszej pracy jest zaprojektowanie i przeprowadzenie analizy statycznej oraz częstotliwościowej protezy kończyny miednicznej psa. Praca została podzielona na dwie części: teoretyczną, przybliżającą zagadnienia anatomiczne, weterynaryjne, mechaniczne i materiałowe oraz symulacyjno-badawczą, która zawiera opis trójwymiarowego modelowania protezy i badanie uzyskanego modelu metodą elementów skończonych (MES).

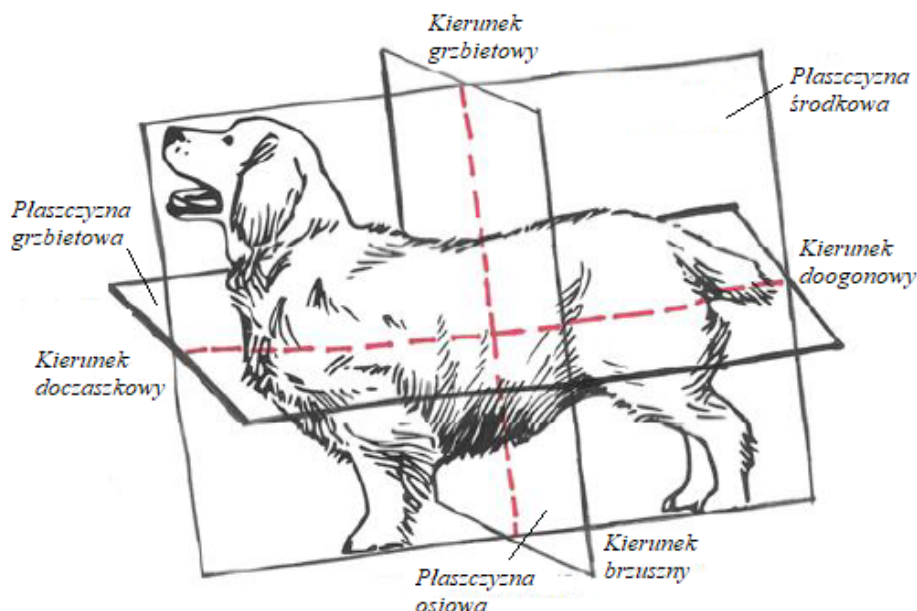
Rozdział pierwszy jest wprowadzeniem do tematu protetyki weterynaryjnej i obejmuje podstawowe zagadnienia związane z istotą protezowania kończyn psów. W rozdziale drugim zawarto pojęcia anatomiczne – budowę kończyny miednicznej psa oraz jej biomechanikę. Trzeci rozdział przedstawia temat amputacji kończyny miednicznej i różnych rodzajów rozwiązań protetycznych w weterynarii oraz przybliży podstawowe właściwości materiałów stosowanych w produkcji protez. Kolejna część pracy dotyczy podstawowych pojęć mechanicznych, które są bazą dla przeprowadzonych symulacji. Metodę elementów skończonych stosowaną podczas przeprowadzania symulacji komputerowych opisano w rozdziale piątym. Opis procesu tworzenia modelu protezy przedstawiono w rozdziale szóstym, który jest początkiem drugiej, symulacyjno-badawczej części pracy. Model został opracowany na podstawie obrazów tomograficznych uzyskanych podczas badania tomografem komputerowym przed amputacją kończyny. Dwie symulacje przeprowadzone w programie Autodesk Fusion 360 dotyczą analizy maksymalnych naprężeń, odkształcenia i przemieszczenia występujących w protezie po obciążeniu jej siłą adekwatną do masy ciała psa. Druga część symulacyjna obejmuje analizę drgań własnych powstałych w konstrukcji. Etapy przygotowania symulacji zaprezentowano w rozdziale szóstym, a otrzymane wyniki zestawiono w rozdziale siódmym. Wnioski wyciągnięte z przeprowadzonych badań oraz podsumowanie przedstawiono w rozdziale ósmym.

## 2. Anatomia i biomechanika kończyny miednicznej psa

Rozdział opracowano w oparciu o źródło literaturowe [1].

Kończyna miedniczna psa obejmuje okolice pośladkową i staw biodrowy (obręcz kończyny miednicznej), udo (odcinek nasadowy części wolnej kończyny), okolice stawu kolanowego i podudzia (odcinek przejściowy części wolnej kończyny) oraz okolice stawu skokowego i stopę (odcinek obwodowy części wolnej kończyny). Ruch w obrębie każdego z odcinków zapewniają stawy, które odpowiadają za odpowiednie ułożenie kości względem siebie oraz pozwalają na wzajemną dynamikę między odcinkami kończyny. Funkcję podporową spełniają kości stabilizowane przez więzadła (które wpływają również na niwelowanie nadmiernych ruchów), natomiast napędową – mięśnie, które pełnią rolę swego rodzaju siłowników.

Ciało psa można rozpatrywać w trzech głównych płaszczyznach: strzałkowej, grzbietowej oraz osiowej. Wraz z czterema kierunkami (doczaszkowym i doogonowym oraz grzbietowym i brzuszny) pozwalają one na dokładne opisywanie kierunku działania poszczególnych stawów czy orientacji przestrzennej kości i innych struktur anatomicznych. Trzy główne płaszczyzny ciała psa oraz cztery podstawowe kierunki opisujące położenie struktur anatomicznych przedstawiono na Rys. 2.1.



Rys. 2.1 Główne płaszczyzny i kierunki ciała psa [2]

## 2.1 Anatomia kończyny miednicznej psa

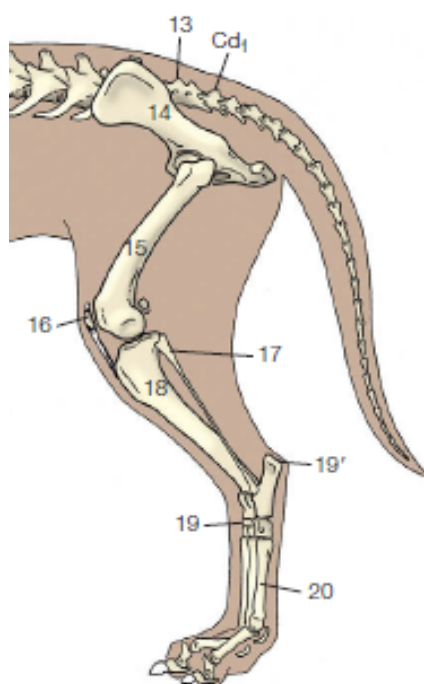
Obręcz kończyny miednicznej psa obejmuje dwie kości miedniczne (prawą i lewą). Każda z nich składa się z kości biodrowej ułożonej doczaszkowo i dogrzebietowo, kulszowej ułożonej doogonowo oraz łonowej ułożonej doczaszkowo-dobrzusznie. Kości te zrosnięte są trzonami w panewce miednicznej, będącej połączeniem obręczy kończyny miednicznej z odcinkiem nasadowym części wolnej w stawie biodrowym. Do bocznej (pośladkowej) powierzchni kości biodrowej przyczepiony jest początkowy mięsień pośladkowy średni, natomiast do powierzchni przyśrodkowej (tzw. guzowatości biodrowej) – mięsień biodrowy. Do części przyśrodkowej doczepione jest również więzadło krzyżowo-guzowe rozpostarte między doogonowo-bocznym kątem kości krzyżowej oraz boczną częścią guza kulszowego. Kolec kulszowy znajdujący się ponad panewką miedniczną stanowi miejsce przyczepu początkowego mięśnia pośladkowego głębokiego.

Odcinek nasadowy części wolnej kończyny miednicznej łączy się z obręczą w stawie biodrowym. Głowa kości udowej ułożona jest na powierzchni stawowej pod kątem dzięki zakrzywieniu bliższego końca kości w kierunku przyśrodkowym, natomiast z trzonem połączona jest za pomocą szyjki. Na głowie występuje dołek, który jest miejscem przyczepu więzadła głowy kości udowej. Boczenie od głowy znajduje się krętarz większy połączony z mięśniami pośladkowymi. Miejsce między krętarzem a szyjką kości udowej zwane jest dołem krętarzowym. Kość udowa posiada dwie powierzchnie – spłaszczone doogonową oraz wypukłą i gładką doczaszkową. W dolnej części trzonu znajduje się guzowatość nadkłykciowa. W budowie kości udowej psa wyróżnia się również kłykiec boczny oraz kłykiec przyśrodkowy. Obie te struktury stanowią połączenie kości udowej z kością piszczelową. W kierunku doczaszkowym leży bloczek kości udowej zestawiany z rzepką.

Kość udowa łączy się z kością piszczelową oraz rzepką w stawie kolanowym stabilizowanym przez więzadła poboczne i krzyżowe. Rzepka to największa trzeszczka w kośćcu psa, rozwijająca się w ścięgnie mięśnia czworogłowego uda. W skład kośćca podudzia wchodzi kość piszczelowa i strzałkowa, przy czym kość strzałkowa jest znacznie węższa od piszczelowej, nie wchodzi w skład stawu kolanowego oraz ma niewielki kontakt z kośćmi stępu. W budowie bliższego końca kości piszczelowej można wymienić dwa kłykcie skierowane powierzchniami do kłykci kości udowej, guzowatość oraz wyniosłość

międzykłykciową będącą miejscem przyczepu więzadeł krzyżowych i łąkotec. Koniec dalszy posiada ślimak kości piszczelowej będący powierzchnią stawową w stawie skokowym. Kość strzałkowa oddzielona jest od piszczelowej przestrzenią międzykostną, połączona jest z nią natomiast jest poprzez kłykiec boczny kości piszczelowej. Jej dalsza część stanowi samodzielną kostkę boczną.

Staw skokowy (stępu) jest zestawieniem kości piszczelowej oraz kości skokowej leżącej przyśrodkowo. Kość skokowa znajduje się w pierwszym rzędzie kości stępu wraz z kością pięty układającej się bocznie, skierowanej ku górze i będącej miejscem przyczepu ścięgna piętowego wspólnego. W drugim, środkowym rzędzie znajduje się jedynie kość łódkowata. W dalszym rzędzie można wyróżnić cztery kości: kość klinowata przyśrodkowa (stępowa I), klinowata pośrodkowa (stępowa II), klinowata boczna (stępowa III) oraz sześcienna (stępowa IV). Ta ostatnia jest wyższa od pozostałych i jej część znajduje się w rzędzie środkowym. Następnie wyróżnia się cztery kości śródstopia (II, III, IV i V – u psów nie występuje kość śródstopia I będąca odpowiednikiem palucha u stopy). Poprzez trzeszczki oraz stawy zawiasowe kości śródstopia połączone są z paliczkami palców.



**Rys. 2.2** Kości kończyny miednicznej psa: 13 – kość miedniczna, 14 – kość biodrowa, 15 – kość udowa, 16 – rzepka, 17 – kość strzałkowa, 18 – kość piszczelowa, 19 – kości stępu, 19' – guz piętowy, 20 – kości śródstopia [1]



## 2.2 Biomechanika kończyny miednicznej psa

W kończynie miednicznej psa można wyróżnić trzy stawy: biodrowy, kolanowy oraz skokowy.

Staw biodrowy zaliczany jest do stawów kulistych działających głównie w płaszczyźnie strzałkowej i osiowej, zarówno w kierunku doczaszkowo-doogonowym jak i grzbietowo-brzusznym. U psów wyróżnia się bardzo szerokim zakresem ruchów, gdyż umożliwia zginanie i prostowanie, przywodzenie i odwodzenie, oraz rotację na zewnątrz i do wewnątrz. Zbytнім przeprostom w stawie biodrowym zapobiega torebka stawowa [1]. Maksymalne zakresy kątów przy zgięciu kończyny przyjmują wartość  $50^\circ$ , podczas wyprostu ok.  $160^\circ$ , odwodzenia w granicach  $70-80^\circ$ , a przywodzenia  $30-40^\circ$ . Podczas rotacji w stawie biodrowym do wewnątrz zakres ruchu waha się w granicach  $50-60^\circ$ , natomiast na zewnątrz –  $80-90^\circ$  [3,4,5].

Staw kolanowy jest stawem złożonym, zawierającym staw udowo-piszczelowy i staw udowo-rzepakowy. Oba te stawy dzielą jedną jamę stawową. Jest to staw zawiasowy o ruchu ograniczonym jedynie do zginania i prostowania w płaszczyźnie środkowej, stabilizowanym przez więzadła krzyżowe, aby uniknąć nadmiernych przeprostów. Można zauważyć w nim również delikatne odchylenie boczne lub przyśrodkowe. U stojącego psa jest on zawsze zgięty [1]. Ruch zginania i prostowania w kolanie jest połączeniem ślizgania i toczenia występującego między powierzchniami stawowymi kości udowej i piszczelowej. Maksymalny kąt zginania stawu kolanowego mieści się w zakresie  $40-42^\circ$ , natomiast wyprostu –  $160-162^\circ$  [5].

Na pełny staw skokowy, zwany również stawem stepu, składają się cztery poziomy, natomiast ruchy w jego obrębie wykonywane są w stawie stępowo-podudziowym. Jest traktowany jako staw zawiasowy, mimo iż nie wykazuje typowych dla niego cech. Ma on ograniczony ruch zginania w płaszczyźnie środkowej, a jego pełny zakres ( $40-45^\circ$  dla zgięcia i  $165^\circ$  dla wyprostu) nie jest możliwy do osiągnięcia bez jednoczesnego zgięcia stawu kolanowego [5]. Występujące w nim pochyłości powodują również narzucają również boczne odchylenie stopy, w kierunku płaszczyzny osiowej [1].

### **3. Protezowanie kończyny miednicznej psów**

Właściwe protezowanie kończyny miednicznej psa jest zależne od poziomu przeprowadzonej amputacji. Amputacja to zabieg chirurgiczny, który polega na usunięciu narządu lub jego części uszkodzonego w takim stopniu, że niemożliwym jest uratowanie go w inny sposób. Wykonuje się ją przede wszystkim, aby zapobiec rozprzestrzenianiu się części agresywnych form nowotworów lub po urazach mechanicznych, gdy zwierzę nie jest w stanie opierać się na kończynie [8]. Jeśli po przeprowadzeniu amputacji nie jest planowany proces protezowania kończyny, amputacja powinna być przeprowadzona w stawie biodrowym, aby kikut nie przeszkadzał w codziennym funkcjonowaniu psa i nie uległ dodatkowym urazom. W przypadku odjęcia kończyny wskutek nowotworu, zaleca się przeprowadzenie amputacji całej kończyny, aby pozbyć się wszystkich komórek nowotworowych i zapobiec ewentualnemu dalszemu rozprzestrzenianiu się raka. Amputacja zawsze zależy od ogólnego zdrowia zwierzęcia oraz podejścia właściciela do nowej sytuacji [9].

Mimo iż większość psów jest w stanie funkcjonować bez jednej kończyny, protezowanie jest zalecane ze względu na nierówność rozłożenia sił względem płaszczyzny środkowej. W pełni sprawny bok zwierzęcia przenosi większe obciążenia niż druga strona ciała, co skutkuje w bólach karku i kręgosłupa oraz nadwyrężeniu stawów, które często jest powodem zerwanych więzadeł krzyżowych w stawie kolanowym. W przypadku planowanego protezowania amputacja najczęściej przeprowadzana jest w okolicach połowy trzonu kości udowej, a proteza zastępuje całą kończynę miedniczną. Jeśli uraz obejmuje podudzie (kość udowa pozostaje nienaruszona) lub jedynie łapę, możliwe jest zachowanie sprawnego stawu kolanowego – w takim przypadku, proteza zastępuje jedynie strukturę anatomiczną łapy.

Następstwem prawidłowego protezowania zawsze musi być odpowiednio dobrana rehabilitacja. Jako że zwierzę nie ma takiej świadomości jak człowiek i nie dostrzega swojej niepełnosprawności, przyzwyczajenie go do protezy jest trudniejsze. Początkowo pies może starać się używać protezę w ten sam sposób jak naturalną kończynę, co może wiązać się ze zwyrodnieniami stawów i innymi zmianami patologicznymi. Współpraca z zoofizjoterapeutą jest kluczowym etapem po protezowaniu, aby pomóc zwierzęciu w adaptacji do nowej sytuacji poprzez proste ćwiczenia lub korzystanie z bieżni wodnej bądź masażu. Wdrażanie użytkowania nowej protezy powinno być stopniowe, aby pies zwiększał wysiłek i wzmacniał siłę mięśni kikuta [25].

### 3.1 Protezy zastępujące całą kończynę miedniczną

Protezowanie obejmujące całą kończynę miedniczną przeprowadza się po amputacji w okolicach połowy trzonu kości udowej. Takie protezy składają się z leja protezowego lub innego rozwiązania utrzymującego protezę na kikucie oraz elementu nośnego, na którym pies może opierać ciężar ciała.

Lej protezowy jest projektowany poprzez pozyskanie odcisku kikuta z wykorzystaniem gipsu ortopedycznego. Jest to najszybszy i najmniej angażujący zwierzę sposób dokładnego odwzorowania kikuta. Uzyskany odlew gipsowy należy odpowiednio zmodyfikować biorąc pod uwagę naddatki materiałowe i elementy wspomagające (moduły podporowych oraz pasy). Dalsze projektowanie leja jest zależne od wybranego sposobu wytwarzania: klasycznej laminacji ręcznej lub technologii wytwarzania przyrostowego.

Metoda laminacji wykorzystuje laminaty, czyli warstwowo ułożone materiały wzmacniające w postaci włókien szklanych lub węglowych, które są połączone lepiszczem, najczęściej żywicą poliestrową lub epoksydową wraz z utwardzaczami, barwnikami i innymi dodatkami. Pozytyw gipsowy stanowi formę do laminacji, na którą bezpośrednio nanosi się folię ochronną, a następnie naprzemiennie dzianinę i materiał wzmacniający. Po nałożeniu wszystkich warstw, na zabezpieczającej warstwę zewnętrzną folii ochronnej rozprowadza się żywicę połączoną z utwardzaczem, rozcieńczalnikiem i barwnikiem. Podczas pracy z lepiszczem istotna jest kontrola pęcherzy powietrza, aby nie występowały między warstwami wzmacniającymi – najczęściej wykorzystuje się do tego pompę podciśnieniową. Po zabezpieczeniu nadmiaru żywicy laminat utwardza się. Po całkowitym usztywnieniu należy wybić formę gipsową ze środka leja, a następnie przeprowadzić jego końcową obróbkę mechaniczną poprzez szlifowanie. Laminowanie to prosta metoda o niskich kosztach oprzyrządowania. Jest niestety czasochłonna i wiąże się z trudnością doboru odpowiedniej ilości wzmocnienia i przesycań materiału oraz dużymi stratami materiałowymi [17].

W przypadku zastosowania technologii wytwarzania przyrostowego, pierwszym etapem jest przekształcenie odlewu gipsowego w przestrzenny model komputerowy CAD za pomocą skanera trójwymiarowego, np. światła strukturalnego lub laserowego. Gips oświetla się sekwencją prążków (technologia światła strukturalnego) lub promieniami lasera (technologia laserowa) rejestrowanych przez kamery. Uzyskane dane tworzą chmurę punktów przekształconą następnie w trójwymiarowy model komputerowy, który można modyfikować w oprogramowaniu inżynierskim. Następnie model jest eksportowany w rozszerzeniu .STL, koniecznym do poprawnego odczytania go na urządzeniu (drukarce 3D). Plik STL może

wymagać dodatkowej obróbki, np. wymagane może być łątanie dziur czy połączenie przerwanych krawędzi modelu. Kolejnym etapem jest ustalenie parametrów urządzenia, przygotowanie stołu roboczego oraz dobór materiału, z którego zostanie wykonany element. Najpopularniejszą techniką wytwarzania przyrostowego elementów protetycznych jest metoda selektywnego spiekania laserowego (SLS), wykorzystująca światło laserowe do spiekania cząsteczek termoplastycznego polimeru w postaci proszku (np. żywicy termoutwardzalnej jako proszku poliamidowego), łącząc go w kolejne warstwy. Proces wytwarzania elementu jest zautomatyzowany, konieczne jest jednak kontrolowanie poprawności jego przebiegu. Otrzymany wydruk należy następnie poddać post-processingowi, czyli oczyszczeniu z pozostałego proszku oraz poddaniu dodatkowej obróbce mechanicznej w celu uzyskania większej dokładności wyrobu. Technologia wytwarzania przyrostowego umożliwia wytworzenie zindywidualizowanych elementów o wysokiej dokładności i właściwościach mechanicznych oraz usprawnia proces projektowania i wytwarzania elementów protetycznych przy niskiej stracie materiału. Może się natomiast wiązać z wyższymi kosztami produkcji [18,19].

W przypadku obydwóch metod, konieczne jest dodatkowe wyścielenie leja np. wkładką silikonową, żelową lub poliuretanową, aby zniwelować ryzyko pojawienia się otarć czy innych urazów mechanicznych podczas użytkowania protezy. Protezy kończyny miednicznej są najczęściej dodatkowo stabilizowane uprzężą, aby utrzymać lej protezowy na kikutcie podczas chodu i naśladować naturalne ruchy zachowanego stawu biodrowego. Uprząż jest zwykle mocowana do dostosowanych do psa szelek oraz może być stabilizowana pasem pod pachwinowym na drugiej, zdrowej kończynie.



**Rys. 3.1** Przykład protezy zastępującej całą kończynę miedniczną [20]

### 3.2 Protezy zastępujące łapę

Rozwiązania protetyczne zastępujące jedynie łapę psa mogą być zaprojektowane w sposób podobny do protez całej kończyny. Różnica występuje w sposobie zamocowania protezy na kikucie. Jako że amputacja podudzia zakłada zachowanie całego stawu biodrowego wraz z kością udową, staw kolanowy (czasem też skokowy – w przypadku odjęcia jedynie paliczków) również najczęściej pozostaje sprawny, aspekty biomechaniczne kończyny nie są tak ograniczone jak w przypadku amputacji całej nogi. Taka sytuacja umożliwia zaprojektowanie protezy utrzymywanej na kikucie za pomocą materiałowych pasów z rzepami, które są zamocowane jej zewnętrznej części wykonanej z tworzywa sztucznego lub kompozytu. Rozwiązania protetyczne tego typu różnią się w zależności od przypadłości i wielkości psa. Istnieją protezy krótsze, bardziej zabudowane czy o większej lub mniejszej ilości pasów utrzymujących. W przypadku protezowania podudzia, podobnie jak w przypadku całej kończyny, istotne jest odpowiednie wyścielenie wnętrza protezy, aby uniknąć niepożądanych urazów kikuta [21].



Rys. 3.2 Przykład protez zastępujących łapę (zamocowane na kikutach) [21]

Innym, nowszym rozwiązaniem protezowania łapy jest wykorzystanie elementu metalowego składającego się z blaszki w kształcie kopuły i pręta mocowanego w kości pozostałej po amputacji. Do wytworzenia tych części protezy wykorzystuje się stale nierdzewne lub tytan, które następnie pokrywa się warstwą hydroksyapatytu w celu wywołania procesu osteointegracji. Pręt powinien być na tyle długi, aby wystawał z tkanki kikuta i istniała możliwość połączenia go ze stopą protezową wykonanej z tworzywa sztucznego i gumy. Część

metalowa jest elementem stałym protezy i ewentualne usunięcie go jest możliwe jedynie drogą chirurgiczną, natomiast stopa protezowa może być wymieniana za każdym razem, gdy nastąpi zużycie materiału uniemożliwiające dalsze użytkowanie. Jest to bez wątpienia najwygodniejsze rozwiązanie protetyczne z perspektywy komfortu użytkownika podczas codziennych aktywności, które można wykorzystać przy protezowaniu podudzia kończyny miednicznej [22].



Rys. 3.3 Przykład protez wszczepianych zastępujących łapę [22]

### 3.3 Wózki rehabilitacyjno-inwalidzkie

W przypadku niedowładu lub paraliżu kończyn, a także przy występowaniu trudności w protezowaniu kończyn miednicznych, zastosowanie znajdują wózki rehabilitacyjno-inwalidzkie. Tego typu rozwiązania posiadają dedykowane do nich szelki w celu wspierania części miednicznej psa oraz uprzęż, która umożliwia umocowanie całej konstrukcji na klatce piersiowej zwierzęcia. Dodatkowym zabezpieczeniem dla ras dużych i olbrzymich jest również pałąk grzbietowy, znajdujący się w górnej części wózka, nad kłębem psa. Niewładne kończyny bądź kikuty są dodatkowo zabezpieczane opaskami lub dopinanymi butami, aby nie dotykały podłoża. Pozwala to na zniwelowanie ryzyka poranienia łap. Większość wózków, mimo że ich wymiary są dostosowywane do rozmiarów psa, można dodatkowo regulować poprzez kostki regulacyjno-zaciskowe. Dzięki temu rozwiązaniu rama wózka może być wydłużana lub obniżana. Koła w konstrukcji są pochylone w kierunku podłoża, dzięki czemu wózek jest stabilny i może być użytkowany na nierównościach terenu, co daje dużą swobodę ruchu. Większość elementów wózka wykonywana jest z lekkich materiałów metalowych, głównie z aluminium. Elementy upręży, szelki oraz opaski są częściami miękkimi, dzianinowymi [23].



Rys. 3.4 Przykład wózka inwalidzko-rehabilitacyjnego dla psa [24]

### 3.4 Materiały stosowane w produkcji protez

Podrozdział opracowano w oparciu o źródła literaturowe [17,28,29].

Materiały znajdujące zastosowanie w medycynie zarówno ludzkiej jak i weterynaryjnej, noszą miano biomateriałów. Definicja biomateriału przyjęta w roku 1982 na Konferencji Biomateriałów (*Biomaterials Consensus Conference at the National Institute of Health*) opisuje biomateriał jako substancję inną niż lek lub kombinacja substancji syntetycznych lub naturalnych, mogąca być użyta w dowolnym czasie, której zadaniem jest uzupełnianie lub zastąpienie tkanek narządu lub jego części w celu spełnienia ich funkcji.

Biomateriały stosowane w protezowaniu muszą odznaczać się wysoką wytrzymałością oraz odpowiednią sztywnością, biozgodnością, relatywnie małą masą i lekkością, odpornością na korozję i ścieranie oraz hydrofilowością, a ich wykorzystanie do produkcji powinno nieść za sobą stosunkowo niskie koszty. Poszczególne części protez wytwarzane są w różnych materiałach, które wykazują zróżnicowane właściwości odpowiadające ich zastosowaniu. Najszersze zastosowanie w produkcji protez znalazły materiały metalowe, polimerowe oraz włókna węglowe i szklane.

Materiały metaliczne odznaczają się bardzo korzystnymi właściwościami mechanicznymi, głównie odpornością na korozję zmęczeniową, pękanie oraz wytrzymałość na rozciąganie i zginanie. Odznaczają się najniższą biokompatybilnością wśród wszystkich

biomateriałów i ich obecność w organizmie może prowadzić do reakcji alergicznych. W niektórych zastosowaniach protetycznych ich rezystywność na korozję elektrochemiczną może być niewystarczająca, czego skutkiem jest rozkład materiału w środowisku tkankowym i wystąpienie metalozy. W celu uzyskania satysfakcjonującej odporności korozyjnej, w protetyce stosowane są materiały metaliczne nierdzewne, takie jak stale austenityczne, stopy tytanu oraz aluminium.

Stale austenityczne zawdzięczają swoją odporność na korozję oraz środowisko kwaśne dodatkom stopowym takim jak chrom i nikiel. Zawartość chromu w stali na poziomie ok. 13% zmienia potencjał stali z ujemnego na dodatni, zbliżony do potencjału metali szlachetnych, w wyniku czego materiał ma zwiększoną odporność w środowisku utleniającym. Nikiel natomiast zwiększa rezystywność na korozję naprężeniową, lecz może być pierwiastkiem silnie uczulającym – w takim przypadku, zastosowanie znajdują stale austenityczne bezniklowe, które w strukturze chemicznej posiadają zwiększoną ilość manganu. Oprócz wcześniej wymienionych pierwiastków, stale austenityczne posiadają również takie dodatki stopowe jak molibden, krzem, azot czy niob.

Tytan i jego stopy jest szeroko stosowanym materiałem w protetyce. Charakteryzuje się wysoką odpornością na korozję wżerową i międzykrystaliczną w środowiskach chlorkowych, kwaśnych i utleniających oraz dobrą wytrzymałością mechaniczną i plastyczną. Jego moduł sprężystości jest zbliżony do modułu kości, ma również niską gęstość i wysoką biokompatybilność. Tytan oraz jego stopy najczęściej stosowane są na części protez mające bezpośredni kontakt z tkanką ze względu na swoją biogodność.

Aluminium i jego stopy są materiałami bardzo lekkimi, o dobrym stosunku ciężaru właściwego do wytrzymałości. Są podatne na obróbkę plastyczną, dzięki czemu ich właściwości mechaniczne mogą ulec znacznej poprawie, a produkowanie konstrukcji o skomplikowanym kształcie jest łatwiejsze. Materiały te wykazują również dobrą odporność korozyjną ze względu na warstwę pasywną tlenku glinu tworzącą się na ich powierzchni.

Biomateriały polimerowe można podzielić na polimery naturalne i syntetyczne. Polimery naturalne, zwane również biopolimerami, są wytwarzane przez organizmy żywe i zaliczyć do nich można np. kolagen, jedwab, fibrynogeny czy celulozę. Szersze zastosowanie w przemyśle protetycznym znalazły jednak polimery syntetyczne niedegradowalne wykazujące wysoką odporność na działanie środowiska zewnętrznego. Ich zaletami są również łatwość



sterylizacji i formowania oraz bardzo dobra jakość fizykochemiczna. Ostateczne właściwości polimerów określa jednak ich struktura. Najpopularniejszymi polimerami stosowanymi w produkcji elementów protez są szeroko rozpowszechnione termoplasty takie jak polipropylen, polietylen i kopolimer nylonu, a także żywice polimerowe służące do laminowania lejów protezowych.

Wśród materiałów wykorzystywanych jako osnowy w produkcji lejów protezowych wyróżnić można żywice epoksydowe, poliestrowe, winyloestrowe i fenolowe. Każda z nich ma specjalne właściwości, które należy dobrać indywidualnie do pacjenta. Żywice epoksydowe charakteryzują się największą wytrzymałością, poliestrowe najniższą ceną, a winyloestrowe najlepszą odpornością chemiczną. Praca z żywicą rozpoczyna się, gdy ta jest w stanie ciekłym, natomiast po dodaniu utwardzacza i nałożeniu jej na włókna twardnieje w temperaturze pokojowej. Zachodzi wówczas proces usieciowania przestrzennego, a żywica staje się twarda, nierozpuszczalna i nietopliwa. Żywice są dielektrykami, czyli nie przewodzą prądu elektrycznego.

Włókno węglowe jest materiałem wysoce wytrzymałym i sztywnym, odpornym na środowisko chemiczne i lekkim. Bardzo dobre właściwości materiału przekładają się na jego wysoką cenę. Otrzymywane jest na drodze karbonizacji prekursora z poliakrylonitrylu lub oleju bądź smoły węglowej. Występują w postaci tkanin zbudowanych ze splecionych ze sobą włókien, w których skład wchodzi tysiące nitek. Włókna węglowe mogą być wykorzystywane w produkcji stóp protezowych oraz lejów. Leje protezowe wytwarzane są również z tkanin szklanych, które nie wykazują tak dobrych właściwości mechanicznych jak włókna węglowe, ale są od niego tańsze. Są one dedykowane do standardowego, mało wymagającego użytkowania protezy. Przy produkcji lejów protezowych z użyciem włókien węglowych bądź szklanych istotne jest zastosowanie osnowy w postaci żywicy epoksydowej, poliestrowej, winylowej lub fenolowej, aby stworzyć trwały kompozyt polimerowy.

## 4. Właściwości mechaniczne w ciele stałym

Rozdział opracowano w oparciu o źródła literaturowe [10-12, 31].

### 4.1 Naprężenia i odkształcenia

Działanie na ciało obciążeniem mechanicznym (nierównoważącymi się siłami zewnętrznymi) powoduje jego odkształcenie – ulega ono deformacji poprzez zmianę swojego kształtu oraz wymiarów. Oznacza to, że każdy punkt materialny w ciele przemieszcza się o pewną wartość, która zależy od właściwości materiału oraz parametrów działającego obciążenia. Określenie wartości przemieszczeń jednostkowych względem przyjętego przestrzennego układu współrzędnych  $x$ ,  $y$ ,  $z$  można określić za pomocą składowych wektora  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Badany obiekt lub jego fragment, jeśli to możliwe, można myślowo uprościć do prostopadłościanu, którego krawędzie opisuje się jako  $dx$ ,  $dy$  i  $dz$ . Odkształcenia oraz zmiana długości krawędzi pod wpływem działającego obciążenia można przedstawić za pomocą zapisu:

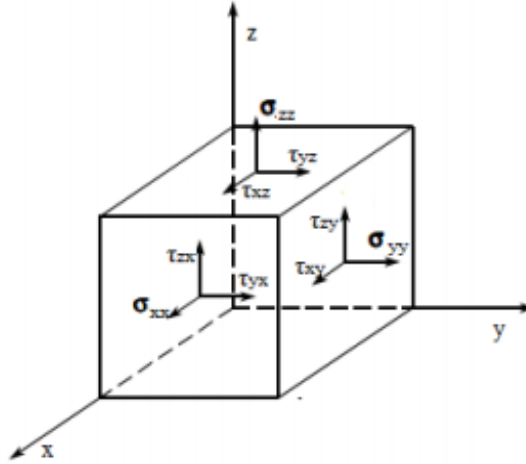
$$(1 + \varepsilon_x) dx, (1 + \varepsilon_y) dy, (1 + \varepsilon_z) dz \quad (4.1)$$

gdzie:  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$  są wydłużeniami względnymi (liniowymi) i opisują względną zmianę długości krawędzi.

Oprócz wydłużenia liniowego, odkształcenia w ciele można również opisać za pomocą odkształceń kątowych, które określa się za pomocą kątów zawartych między krótkimi i prostopadłymi odcinkami związanymi z odkształcanym ciałem przed i po jego deformacji. Współrzędne kątowe można opisać składowymi  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{xz}$ . Biorąc pod uwagę wydłużenie liniowe oraz odkształcenia kątowe, możliwe jest opisanie całego stanu odkształcenia za pomocą tensora odkształcenia  $\varepsilon$  w postaci macierzowej:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

W celu wyznaczenia naprężeń w obiekcie, należy przyjąć współrzędne układu  $x, y, z$  i myślowo przeciąć obiekt płaszczyznami równoległymi do osi układu. Otrzymane naprężenia można podzielić na naprężenia normalne o składowych  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  (prostopadłe do płaszczyzny przekroju) oraz styczne o składowych  $\tau_x, \tau_y, \tau_z$  (styczne do płaszczyzny przekroju). Biorąc pod uwagę oba rodzaje naprężeń, otrzymane naprężenia można zapisać za pomocą tensora naprężeń  $\sigma$  (4.3), którego składowe przedstawiono na rysunku 4.1.



Rys. 4.1 Składowe tensora naprężeń [13]

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \frac{\tau_{xy}}{2} & \frac{\tau_{xz}}{2} \\ \frac{\tau_{yx}}{2} & \sigma_y & \frac{\tau_{yz}}{2} \\ \frac{\tau_{zx}}{2} & \frac{\tau_{zy}}{2} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Analizując zarówno naprężenia normalne jak i styczne, oddziaływanie naprężeń na obiekt można przedstawić za pomocą maksymalnego naprężenia zredukowanego von Misesa bazującego na hipotezie Huberta-Misesa-Henck'owego. Zakłada ona, że materiał plastyczny odkształca się w miejscu, gdzie naprężenia zredukowane wg von Misesa stają się równe lub przekraczają granicę plastyczności materiału. Naprężenia zredukowane można opisać za pomocą wzoru:

$$\sigma_{red} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{yz}^2)}. \quad (4.4)$$

## 4.2 Prawo Hooke'a

### 4.2.1 Prawo Hooke'a dla jednoosiowego stanu naprężeń

Prawo Hooke'a, będące jednym z podstawowych praw mechaniki, opisuje wzajemną zależność między odkształceniem ciała a naprężeniem, które spowodowało deformację. W aspekcie jednoosiowego stanu naprężeń prawo Hooke'a zakłada, iż odkształcenie ciała pod wpływem działającej nań siły jest proporcjonalne do tej siły. Współczynnikiem proporcjonalności między odkształceniem a siłą jest tzw. moduł Younga, którego wartości są stałe i zależą od materiału, z którego ciało jest zbudowane. Prawo Hooke'a można zapisać zależnością:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (4.5)$$

gdzie:  $\sigma$  - naprężenie normalne,  $E$  - współczynniki sprężystości wzdłużnej,  $\varepsilon$  - odkształcenie względne (liniowe).

### 4.2.2 Prawo Hooke'a dla trójwymiarowych układów naprężeń

Wykorzystując moduł Younga  $E$ , współczynnik Poissona  $\nu$  oraz zależności między naprężeniami ścinającymi i odkształceniami kątowymi, prawo Hooke'a można odnieść również do trójwymiarowych układów naprężeń.

Moduł Younga jest stosunkiem naprężeń normalnych do odkształceń liniowych, co w przypadku jednoosiowego obciążenia można zapisać zależnością:

$$E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \frac{\sigma_y}{\varepsilon_y} = \frac{\sigma_z}{\varepsilon_z} \quad (4.6)$$

Współczynnik Poissona opisuje ujemny stosunek odkształcenia poprzecznego do wzdłużnego. Biorąc pod uwagę naprężenie działające w kierunku osi  $x$ , powodującym odkształcenie na osi  $y$  i przy osiowym stanie naprężenia wyrazić go można jako:

$$\nu = \frac{-\varepsilon_x}{\varepsilon_y} \quad (4.7)$$

Przyjmując, że ciało ma charakter izotropowy, czyli jego właściwości materiałowe nie zmieniają się w zależności od kierunku, w którym są mierzone, oraz biorąc pod uwagę moduł Younga, współczynnik Poissona oraz naprężenia normalne  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ , można wyznaczyć składowe odkształceń  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$  odpowiadające naprężeniom:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned}\tag{4.8}$$

Dla materiałów izotropowych naprężenia ścinające nie mają wpływu na odkształcenia normalne, lecz powodują występowanie odkształceń ścinających (kątowych), zapisywanych zależnością:

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}\end{aligned}\tag{4.9}$$

Występujący we wzorach (4.9) współczynnik  $G$ , czyli moduł Kirchoffa, jest zależnością modułu Younga oraz współczynnika Poissona i określa sprężystość poprzeczną materiału.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}\tag{4.10}$$

### 4.3 Związki konstytutywne

Związki konstytutywne są matematycznymi modelami rzeczywistego materiału, które charakteryzują zależności między naprężeniami i odkształceniami. Opisywane są za pomocą tensorów.

Biorąc pod uwagę izotropowość materiału oraz fakt, że jest liniowo-sprężysty, można wyznaczyć uogólnione prawo Hooke'a dla trójosiowego stanu naprężeń:

$$\sigma_{i,j} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 D_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad i, j = 1 \div 3,\tag{4.11}$$

gdzie  $\mathbf{D}$  jest tensorem konstytutywnym czwartego rzędu, zwanym również tensorem sztywności. Zawiera on 81 stałych materiałowych. Liczbę tę można zmniejszyć do 36, przyjmując symetryczność tensorów naprężeń i odkształceń, a zależność można zapisać poniższym wzorem:

$$\sigma_\alpha = \sum_{\beta=1}^6 D_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta, \alpha=1 \div 6. \quad (4.12)$$

Tensor sztywności można przedstawić również w formie macierzowej (4.13) lub w jego pełnej formie (4.14):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.13)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & D_{55} & D_{56} \\ D_{61} & D_{62} & D_{63} & D_{64} & D_{65} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Zdefiniować można również macierz podatności, czyli odwrotność macierzy konstytutywnej  $\mathbf{D}$ , opisywana wzorem:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma}, \quad (4.15)$$

gdzie:  $\mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1}$ .

Tensor odkształceń  $\boldsymbol{\varepsilon}$  można zapisać jako:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T), \quad (4.16)$$

gdzie:  $\mathbf{u}$  - wektor przemieszczenia.

Prawo Hooke'a można zapisać w postaci macierzowej z uwzględnieniem modułu Younga i współczynnika Poissona:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Jeśli rozważane jest ciało izotropowe liniowo-sprężyste w układzie trójwymiarowym, macierz zgodności należy odwrócić, aby otrzymać ostateczny wzór bazujący na macierzy sztywności:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

#### 4.4 Równanie Naviera

Równanie Naviera pozwala na opisanie ruchu materiału na podstawie zależności odkształcenia i naprężenia. Podstawowe równanie Naviera można zapisać w postaci wzoru:

$$\rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}, \quad (4.19)$$

gdzie:  $\rho_s$  - gęstość ciała stałego,  $\mathbf{u}$  - wektor przemieszczeń  $[u_1, u_2, u_3]$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  - tensor naprężeń,  $\mathbf{F}$  - siła masowa, która w dalszych obliczeniach może być pominięta i zastąpiona wartością 0.

Rozpatrując trójosiowy stan naprężeń, równanie (4.19) można przedstawić w poniższy sposób:

$$\begin{aligned} \rho_s \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial \delta_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \rho_s \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \delta_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \rho_s \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial \delta_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

W przypadku materiałów izotropowych prawo Hooke'a można uprościć i zapisać je w postaci:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \delta_{i,j} \quad (4.21)$$

gdzie:  $\delta_{i,j}$  - delta Kroneckera,  $\mu$  i  $\lambda$  - stałe Lamego będące stałymi sprężystości dla ciał izotropowych:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (4.22)$$

Biorąc pod uwagę prawo Hooke'a oraz stałe Lamego, ostateczne równanie Naviera dla ruchu materiału opisuje zależność:

$$\rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (4.23)$$

#### 4.5 Częstość własna

Częstotliwości własne, zwane również naturalnymi i będące dyskretnymi, są takimi częstościami, pod wpływem których konstrukcja jest podatna na drgania. Występowanie drgań w określonych częstościach własnych powoduje odkształcenie konstrukcji.

Przemieszczenie spowodowane ruchem harmonicznym można opisać poniższym wzorem:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{u}, \quad (4.24)$$

gdzie:  $\omega$  – częstość siły wymuszającej.

Wektor wymuszenia zapisywany jest za pomocą wzoru (4.25):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}) + i \mathbf{u}_2(\mathbf{x}) \quad (4.25)$$

Przemieszczenie spowodowane ruchem harmonicznym jest liczbą rzeczywistą liczby zespolonej w poniższym równaniu:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \text{Re}[\mathbf{u}(\mathbf{x}) e^{(-i\omega t)}] \quad (4.26)$$

Biorąc pod uwagę równanie Hooke'a, macierz sztywności  $\mathbf{C}$ , stałe Lamego, ostateczne równanie Naviera oraz równania 4.24, 4.25 i 4.26, równanie harmoniczne ruchu, które może być traktowane jako równanie dla częstości drgań własnych, w izotropowym materiale liniowo-sprężystym zapisać można za pomocą zależności:

$$-\rho \omega^2 \mathbf{u} - (\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (4.27)$$



## 5. Metoda elementów skończonych

Rozdział opracowano w oparciu o źródła literaturowe [14-16].

Obliczenia inżynierskie wspomagane komputerowo przeprowadzane są za pomocą metody elementów skończonych MES (ang. *FEM – Finite Element Method*). Dzięki niej projektowanie i analizowanie konstrukcji przebiegają szybciej oraz jest bardzo efektywne. Łączy zagadnienia związane z mechaniką, materiałoznawstwem, metodami numerycznymi oraz technikami komputerowymi.

Metoda elementów skończonych polega na sprowadzaniu równań różniczkowych do układu liniowych równań algebraicznych. Podczas gdy tradycyjne metody obliczeniowe stosują liczne uproszczenia i przybliżenia oraz traktują konstrukcję jako model ciągły, a uzyskane rozwiązania dotyczą jedynie pewnej liczby punktów, MES bazuje na podziale obszaru na mniejsze zdefiniowane podobszary (elementy) o skończonej liczbie. Proces ten nazywany jest dyskretyzacją (rysunek 5.1). Funkcja  $\varphi$  interpoluje się wówczas w każdym elemencie obszaru  $\Omega$ :

$$\hat{\varphi} = \sum_{i=1}^n N_i \varphi_i, \quad (5.1)$$

gdzie  $\varphi_i$  to poszukiwane wartości funkcji  $\varphi$  w poszczególnych węzłach elementu,  $N_i$  to bazowe funkcje interpolacji, a  $n$  to liczba węzłów w rozpatrywanym elemencie.

Funkcje bazowe przyjmują wartość zerową poza danym obszarem, tzn. przyjmują wartość równą zero. Zapewniają również ciągłość na granicach sąsiadujących elementów jedynie funkcji pola  $\varphi$ .

Wykorzystując metody residuów ważonych i Galerkina, polegającą na przyjęciu lokalnych funkcji bazowych  $N_i$  jako funkcje wagowe, możliwe jest otrzymanie równań bazowych MES. Metoda residuów ważonych polega na poszukiwaniu takiej wartości funkcji  $\varphi$ , aby spełniła ona poniższe równanie:

$$R = \alpha(\hat{\varphi}) + f = \int_{\Omega} \alpha(\hat{\varphi}) w d\Omega + \int_{\Omega} f w d\Omega = \int_{\Gamma_2} (\hat{q} - \bar{q}) w d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\hat{\varphi} - \bar{\varphi}) \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma, \quad (5.2)$$

gdzie:  $\hat{\varphi}$  - funkcja interpolująca,  $\hat{q} = \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial n}$  - warunek brzegowy Neumanna funkcji interpolującej.

Z powyższego wzoru należy wyodrębnić postać odpowiadającą funkcjom wagi  $N_i$ , które są związane z elementami wewnętrznymi niesąsiadującymi do brzegu :

$$\sum_{e=1}^l \int_{\Omega^e} f N_i d\Omega + \sum_{e=1}^l \int_{\Omega^e} \alpha(\hat{\varphi}) N_i d\Omega = \sum_{e=1}^l \oint_{\Gamma^e} (\hat{q} - \bar{q}^e) N_i d\Gamma, \quad (5.3)$$

gdzie:  $\Omega^e$  i  $\Gamma^e$  - odpowiednio obszar i brzeg elementu,  $e$  i  $l$  - liczba elementów w węźle,  $\bar{q}^e$  - warunek brzegowy pochodzący z rozkładu funkcji interpolującej na brzegu elementu  $e$  w miejscach z nim sąsiadujących.

Do wzoru (5.3) zastosować należy pierwszą formułę Greena, aby otrzymać równanie bazowe dla elementów wewnętrznych:

$$\sum_{e=1}^l \int_{\Omega^e} f N_i d\Omega + \sum_{e=1}^l \int_{\Omega^e} (\text{grad } \hat{\varphi} \text{ grad } N_i + k^2 \hat{\varphi} N_i) d\Omega = 0. \quad (5.4)$$

W powyższym wzorze redukcje całek wynikają ze zmiany znaku pochodnej normalnej w wyniku przejścia do sąsiadującego elementu. Przyjmując, że funkcja wagowa  $N_i$  jest ściśle związana z elementami graniczącymi z brzegiem  $\Gamma_1(\Gamma_1^e)$  lub  $\Gamma_2(\Gamma_2^e)$ , wzór otrzymany za pomocą metodą residuów ważonych przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^l \int_{\Omega^e} f N_i d\Omega + \sum_{e=1}^l \int_{\Omega^e} \alpha(\hat{\varphi}) N_i d\Omega &= \sum_{e=1}^l \int_{\Gamma_2^e} (\hat{q} - \bar{q}) N_i d\Gamma + \\ &+ \sum_{e=1}^l \int_{\Gamma_1^e} (\hat{\varphi} - \bar{\varphi}) \frac{\partial N_i}{\partial n} d\Gamma + \sum_{e=1}^l \int_{\Gamma_3^e} (\hat{q} - \bar{q}^e) N_i d\Gamma, \end{aligned} \quad (5.5)$$

gdzie:  $\Gamma^e = \Gamma_1^e \cup \Gamma_2^e \cup \Gamma_3^e$ , a  $\Gamma_3^e$  jest częścią elementu nieprzylegającą do brzegu obszaru.

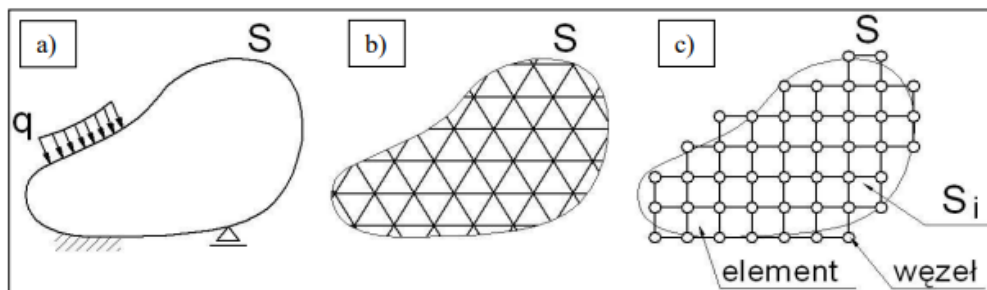
Ostateczne równanie bazowe MES przedstawiono poniżej:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^l \int_{\Omega^e} f N_i d\Omega + \sum_{e=1}^l \int_{\Omega^e} (\text{grad } \hat{\varphi} \text{ grad } N_i + k^2 \hat{\varphi} N_i) d\Omega + \sum_{e=1}^l \int_{\Gamma_1^e} N_i \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial n} d\Gamma &= \\ &= - \sum_{e=1}^l \int_{\Gamma_2^e} \bar{q} N_i d\Gamma + \sum_{e=1}^l \int_{\Gamma_1^e} (\hat{\varphi} - \bar{\varphi}) \frac{\partial N_i}{\partial n} d\Gamma. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Powyższe równanie można przekształcić do układu równań algebraicznych, jeśli indeks  $i$  będzie zmienny od pierwszego do ostatniego węzła w obszarze  $n$ .

Do dyskretyzacji obszarów dwuwymiarowych wykorzystuje się głównie elementy trójkątne i prostokątne, natomiast trójwymiarowych – czworościenne lub sześciennie. Elementy posiadają węzły, które znajdują się na ich wierzchołkach. Węzły stanowią punkt wspólny na

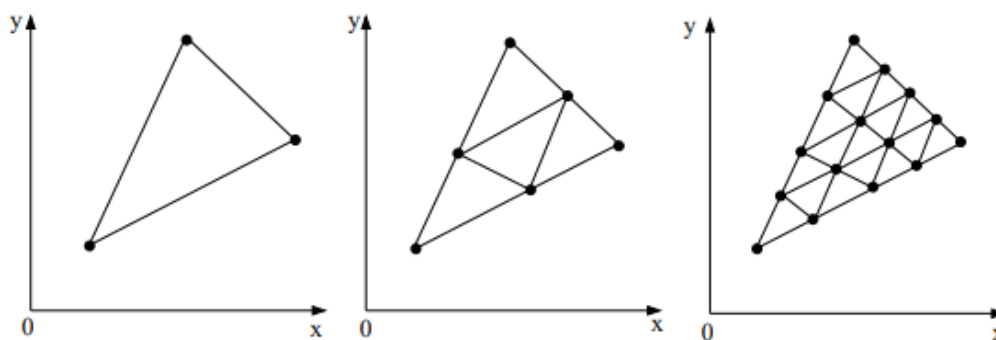
sąsiadujących podobszarów, a dyskretyzacja powoduje powstanie z nich siatki. Punktami siatki są również związane z węzłami wielkości polowe, w których dana wielkość może być poszukiwana lub jest już znana.



Rys. 5.1 Proces dyskretyzacji [16]

Dokładność metody elementów skończonych jest zależna od zagęszczenia siatki. Celem MES jest uzyskanie rozwiązania jak najbardziej zbliżonego do faktycznej, dokładnej wartości, dlatego podczas zagęszczania siatki spełnione muszą zostać dwa warunki:

- podczas zmniejszania elementu każdy punkt danego obszaru powinien znajdować się w granicach elementu, niezależnie od jego wymiarów,
- wszystkie poprzednie siatki muszą wchodzić w skład siatki zagęszczonej.



Rys. 5.2 Zwiększanie dokładności siatki poprzez jej zagęszczenie [14]

Praca z metodą elementów skończonych w oprogramowaniu inżynierskim składa się z poniższych etapów:

- stworzenie modelu matematycznego bazując na obiekcie rzeczywistym z wykorzystaniem systemów CAD,
- nadanie modelowi parametrów geometrycznych i fizycznych (dobór materiału, określenie właściwości fizykochemicznych i wytrzymałościowych),

- zdefiniowanie warunków brzegowych (wybór typu i miejsca utwierdzenia, aby odebrać modelowi stopnie swobody, dobór obciążenia),
- dyskretyzacja (stworzenie siatki o odpowiednim zagęszczeniu),
- przeprowadzenie symulacji poprzez rozwiązanie układów równań różniczkowych,
- analiza uzyskanych wyników (naprężeń, odkształceń, przemieszczeń).

Metoda elementów skończonych umożliwia przeprowadzanie dokładnych obliczeń inżynierskich, lecz jej ograniczenia mogą leżeć po stronie sprzętowej. Utrudnieniem może być również skomplikowana geometria konstrukcji, różnice w objętości modelu, niekoherentność materiałowa czy zróżnicowanie i duża ilość obciążeń. Aby sprostać nadanym warunkom początkowym i brzegowym, należy dobrać odpowiednią gęstość i dokładność siatki – metoda elementów skończonych pozwoli na uzyskanie wyników, lecz przy zwiększonej ilości elementów czas przeprowadzenia obliczeń spowoduje znaczne wydłużenie czasu przeprowadzania obliczeń.

## 6. Model obliczeniowy

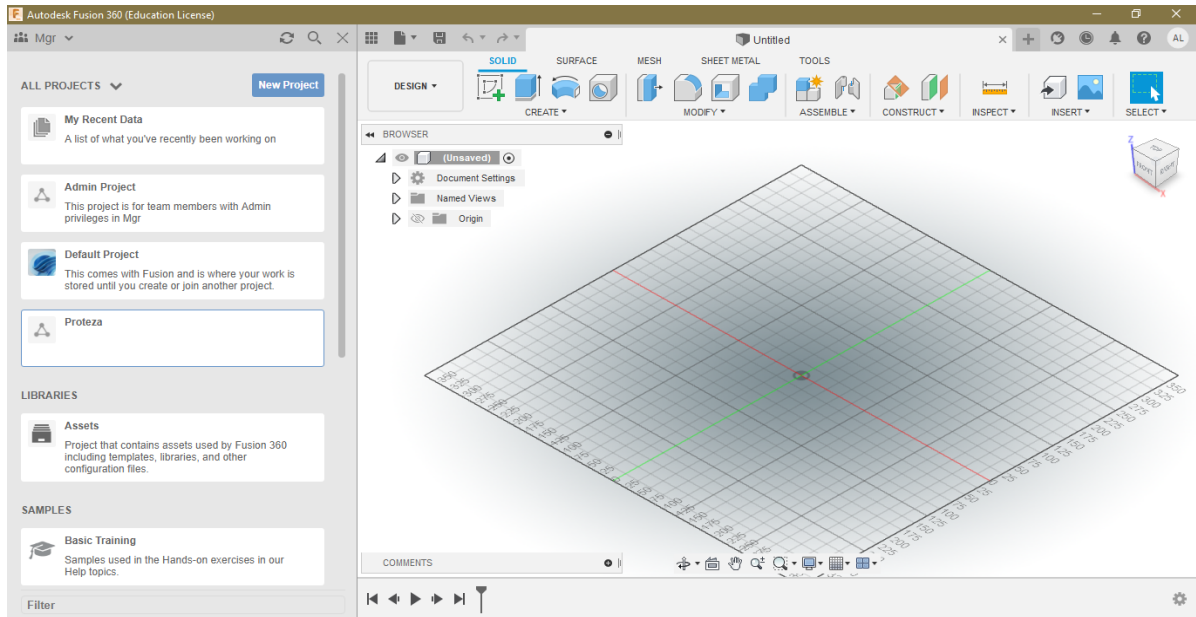
### 6.1 Wykorzystane oprogramowanie inżynierskie

Program RadiANT DICOM Viewer (Rys. 6.1) jest przeznaczony do przeglądania obrazów medycznych uzyskanych poprzez różne metody obrazowania, np. rezonans magnetyczny, tomografię komputerową, ultrasonografię czy radiografię cyfrową. Jego funkcje pozwalają na rekonstrukcję obrazu i tworzenie modeli trójwymiarowych na podstawie setek lub tysięcy zdjęć uzyskanych podczas badania, aby ułatwić analizę anatomiczną i diagnostykę potencjalnego problemu medycznego. Umożliwia również niewielką edycję modeli przestrzennych, np. ich przycinanie, mierzenie elementów oraz zmianę jasności i kontrastu obrazów medycznych [26].

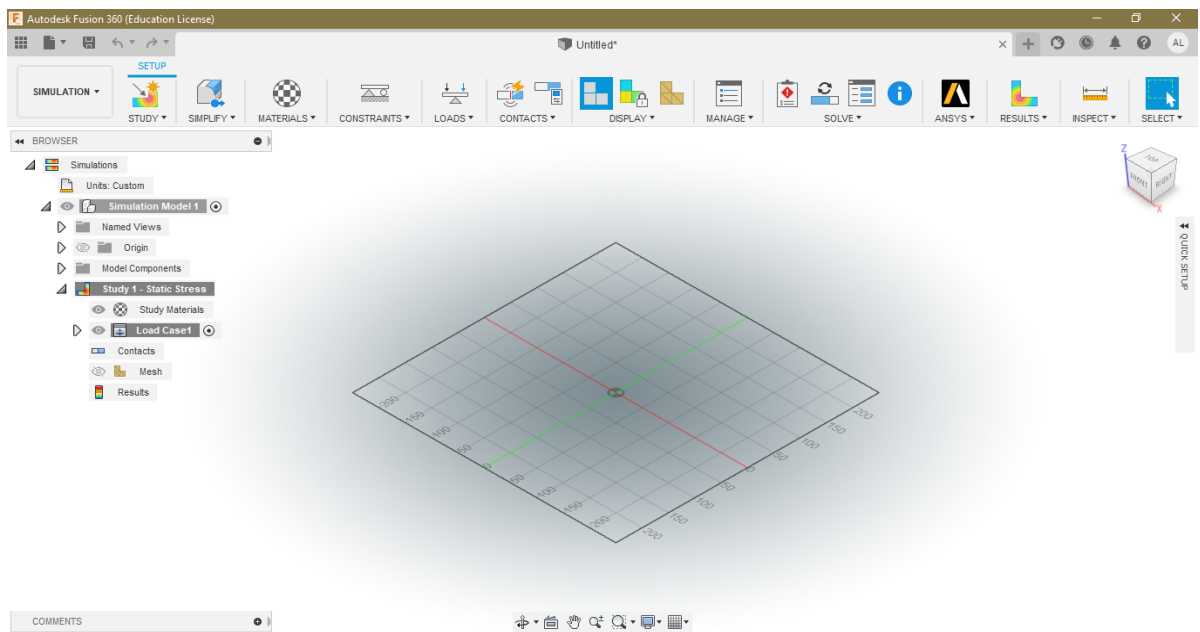


Rys. 6.1 Interfejs programu RadiANT DICOM Viewer

Autodesk Fusion 360 jest zintegrowanym oprogramowaniem wspomagającym projektowanie (CAD), wytwarzanie (CAM), prace nad rozwiązaniami inżynierskimi (CAE) i układami elektronicznymi (PCB). Umożliwia samodzielne lub zespołowe projektowanie elementów w formie modeli bryłowych, blachowych i konstrukcji spawanych w tzw. chmurze, ich swobodną modyfikację na każdym etapie pracy oraz zaawansowane możliwości modelowania przestrzennego. Pozwala również na przeprowadzanie symulacji inżynierskich MES oraz animacji, a także na wykonywanie dokumentacji technicznej zaprojektowanej części [27].



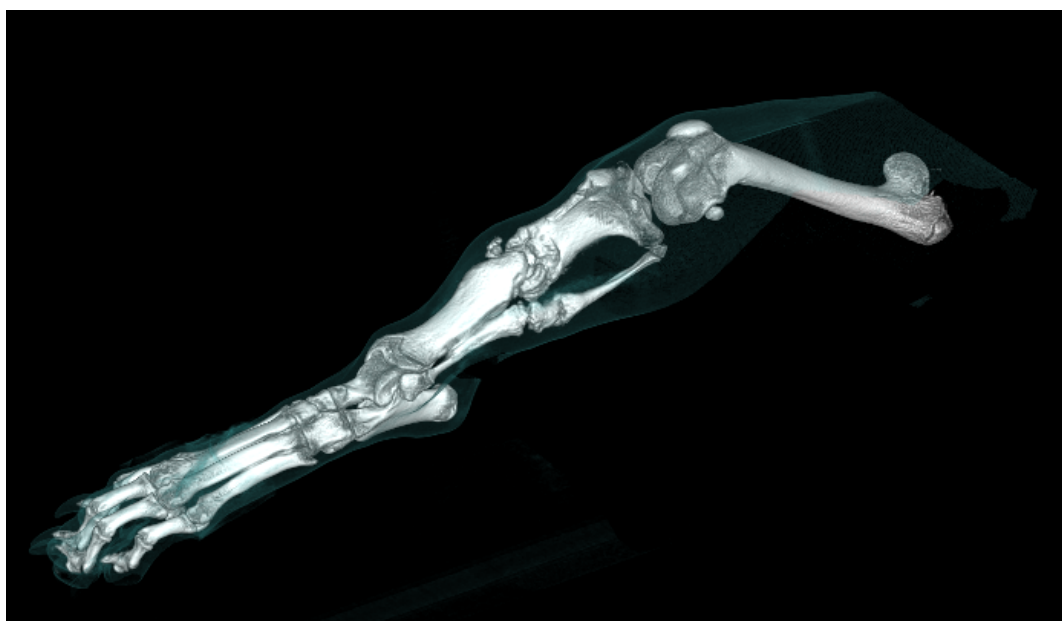
Rys. 6.2 Interfejs programu Autodesk Fusion 360 w trybie Design



Rys. 6.3 Interfejs programu Autodesk Fusion 360 w trybie Simulation

## 6.2 Opis przypadku

Rozpatrywanym w niniejszej pracy przypadkiem jest dorosły pies nierasowy o masie ok. 10 kg z niedowładem kończyny miednicznej lewej. Kości podudzia były zdeformowane, a staw kolanowy niesprawny - odpowiedniej siły mięśniowej nie pozwalał na opieranie na niej ciężaru ciała. Kończyna została zakwalifikowana przez weterynarza do amputacji w okolicy połowy trzonu kości udowej. Trójwymiarowy model kończyny w programie RadiANT DICOM Viewer, uzyskany na podstawie badania tomograficznego przeprowadzonego przed amputacją, przedstawiono na rysunku 6.4.



Rys. 6.4 Model trójwymiarowy opisywanego przypadku w programie RadiANT DICOM Viewer

## 6.3 Opis modelu protezy

Planowanie projektowania protezy rozpoczęto w programie RadiANT DICOM Viewer od analizy zestawu zdjęć tomograficznych i powstałego z nich modelu trójwymiarowego kończyny miednicznej psa przed amputacją przedstawionego na rysunku 6.4. W skład danych analizowanego modelu przestrzennego weszło 1140 tomogramów. Zdjęcia tomograficzne umożliwiły wyznaczenie wszystkich potrzebnych wymiarów do zaprojektowania protezy, na przykład długości poszczególnych części kończyny czy szerokość uda.

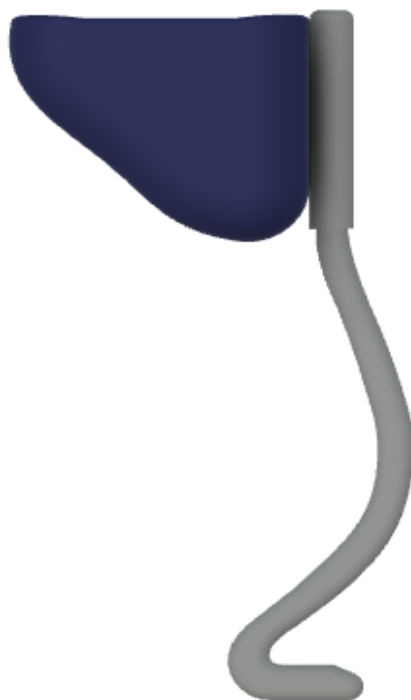
Uproszczony model protezy zaprojektowano w programie Autodesk Fusion 360. Składa się on z modułu nośnego imitującego łapę i podudzie psa, części łączącej lej protezowy z modułem oraz leja. Ilość elementów protezy została zmniejszona do minimum, aby ułatwić

proces jej ewentualnego wytworzenia technikami przyrostowymi. Moduł zastępujący podudzie został zaokrąglony, aby odwzorować strukturę anatomiczną kończyny miednicznej i zapewnić dodatkową amortyzację konstrukcji. Z powodu uproszczenia modelu komputerowego, nie uwzględniono połączeń śrubowych, które są konieczne do połączenia leja z modułem nośnym protezy oraz dodatkowych pasów i szelek stabilizujących protezę na kikucie. Zaprojektowaną protezę i jej charakterystyczne wymiary przedstawiono odpowiednio na rysunkach 6.5, 6.6, 6.7 i 6.8.



**Rys. 6.5** Zaprojektowany model protezy – widok ogólny

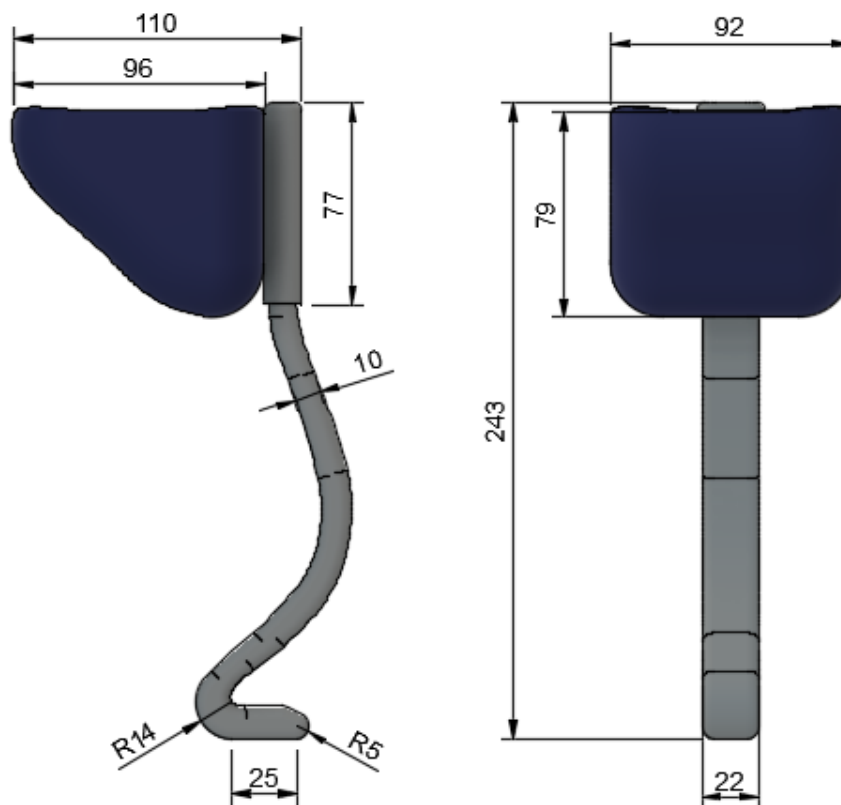




**Rys. 6.6** Zaprojektowany model protezy – widok boczny



**Rys. 6.7** Zaprojektowany model protezy – widok przedni



Rys. 6.8 Charakterystyczne wymiary zaprojektowanej protezy

#### 6.4 Opis przeprowadzonych symulacji

Przeprowadzenie symulacji składa się z trzech etapów: preprocessingu, solvingu i postprocessingu.

Preprocessing polega na przygotowaniu badania, czyli ustaleniu warunków początkowych niezbędnych do przeprowadzenia symulacji. Powinny być one odwzorowane jak najdokładniej, aby uzyskać realistyczne wyniki.

Solving jest etapem obliczeniowym – program rozwiązuje liniowe równania różniczkowe dla każdego elementu czworobocznego siatki wygenerowanej podczas preprocessingu. Następnie wyznaczane są wektory przesunięcia elementów skończonych i poprzez dodatkowe ich przekształcenia możliwe jest wyznaczenie szukanych wartości naprężeń, odkształceń, przemieszczeń oraz częstotliwości własnych. Szybkość przeprowadzenia symulacji jest zależna od mocy procesora komputera oraz programu.

Postprocessing polega na przedstawieniu i analizie otrzymanych wyników, która umożliwia ocenę wytrzymałości i bezpieczeństwa zaprojektowanego obiektu.

W oprogramowaniach inżynierskich posiadających moduł symulacyjny, wyniki prezentowane są w formie legendy barw, które są adekwatnie przeniesione na przestrzenną geometrię modelu. Obliczone przez program wartości analizować można nie tylko na powierzchni zewnętrznej obiektu, ale również w dowolnych punktach jego przekroju oraz na poszczególnych krawędziach i punktach.

#### 6.4.1 Symulacje naprężeń, odkształceń i przemieszczeń

Pierwszą symulację podzielono na dwa przypadki zakładające różne miejsca przyłożenia obciążenia i utwierdzenia protezy. Ich celem było wyznaczenie maksymalnych wartości naprężeń, odkształceń i przemieszczeń oraz miejsc ich występowania w konstrukcji protezy podczas obciążania jej w trakcie zwykłego użytkowania, na przykład podczas chodu.

Pierwszym krokiem było przypisanie materiałów do poszczególnych części protezy. Program Autodesk Fusion 360 umożliwia wybór materiału z przygotowanej biblioteki, a także dodanie dowolnie zdefiniowanych wartości nowego tworzywa. Dla symulacji przeprowadzonych w ramach niniejszej pracy wybrano dwa materiały z biblioteki programu: polipropylen dla modułu nośnego oraz części łączącej go z lejem, dla leja protezowego natomiast zastosowano laminat fenolowy. Właściwości wybranych materiałów przedstawiono w tabelach 1 oraz 2.

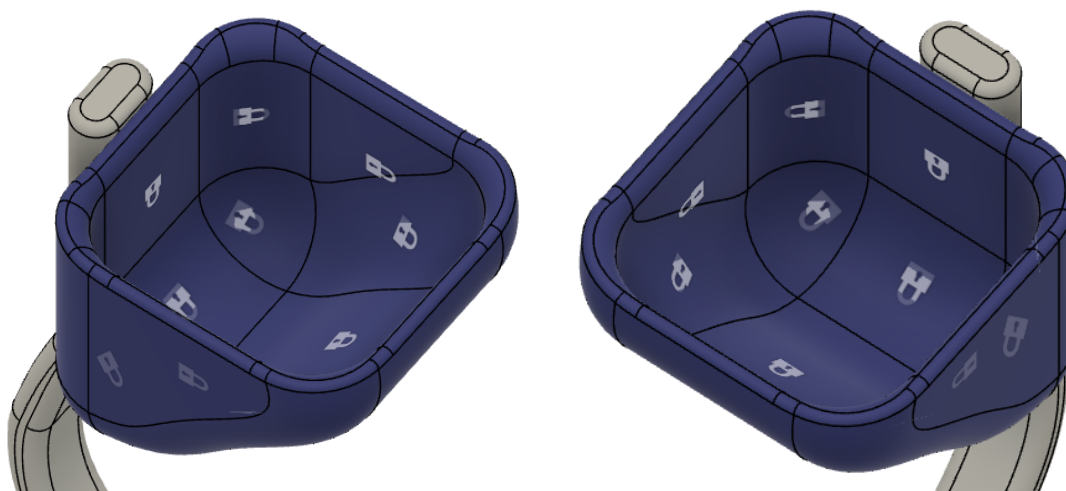
**Tabela 1.** Właściwości mechaniczne polipropylenu w bibliotece programu Autodesk Fusion 360

Właściwość	Wartość	Jednostka
Gęstość	0,899	g/cm <sup>3</sup>
Moduł Younga	1,34	GPa
Współczynnik Poissona	0,39	-
Moduł Kirchoffa	757	MPa
Granica plastyczności	30,3	MPa
Wytrzymałość na rozciąganie	36,5	MPa

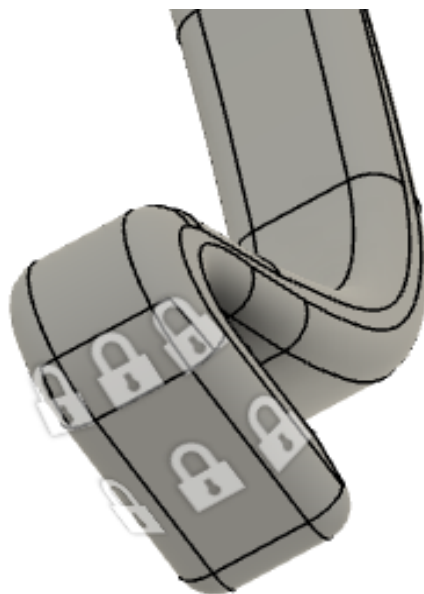
**Tabela 2.** Właściwości mechaniczne laminatu fenolowego w bibliotece programu Autodesk Fusion 360

Właściwość	Wartość	Jednostka
Gęstość	1,38	g/cm <sup>3</sup>
Moduł Younga	6,89	GPa
Współczynnik Poissona	0,34	-
Moduł Kirchoffa	4616	MPa
Granica plastyczności	51,71	MPa
Wytrzymałość na rozciąganie	51,71	MPa

Następnym etapem było utwierdzenie modelu, czyli odebranie mu stopni swobody. W programie Autodesk Fusion 360 unieruchomienie konstrukcji możliwe jest na różne sposoby poprzez moduł „Structural Constraints”. W przypadku rozpatrywanego modelu zastosowano utwierdzenie „Fixed” - wybrane płaszczyzny unieruchomienia znajdowały się wewnątrz lejki protezowego, w miejscu kontaktu kikuta z protezą, zakładając iż nie powinien on ulegać żadnym przemieszczeniom podczas chodu. Poszczególne elementy protezy również są względem siebie nieruchome.

**Rys. 6.9** Miejsce utwierdzenia modelu – przypadek 1

W drugiej części symulacji miejsce utwierdzenia modelu zmieniono na powierzchnię łapy protezowej, mającej kontakt z podłożem. Również zastosowano unieruchomienie typu „Fixed”, zakładając brak występowania jakiegokolwiek ruchu protezy w tym miejscu.



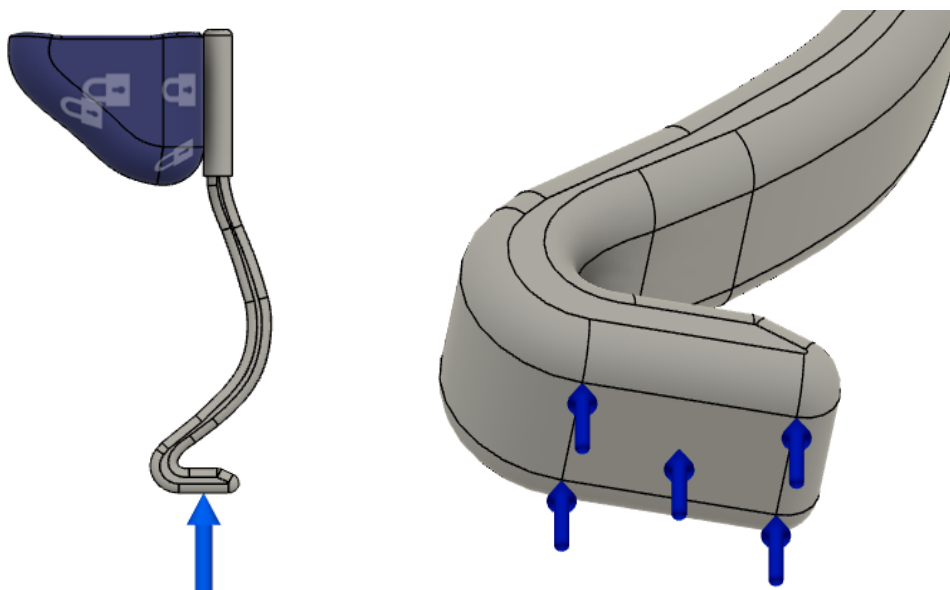
**Rys. 6.10** Miejsce utwierdzenia protezy – przypadek 2

Następnie należało określić działanie sił zewnętrznych na protezę podczas zwykłego użytkowania. Zdefiniowaniu podlegał typ, wartość, zwrot oraz lokalizacja przyłożenia obciążeń. W przypadku psów, rozkład obciążenia na kończyny piersiowe to około 58% (29% na jedną kończynę piersiową) masy ciała, natomiast na miedniczne około 42% (21% na jedną kończynę miedniczną) [30]. Z powodu niskiej wagi rozpatrywanego przypadku i dodatku masy protezy, ubytek masy powstały po amputacji pominięto. Siłę działającą na protezę wyznaczono za pomocą wzoru 6.1.

$$F = m \cdot 21\% \cdot g, \quad (6.1)$$

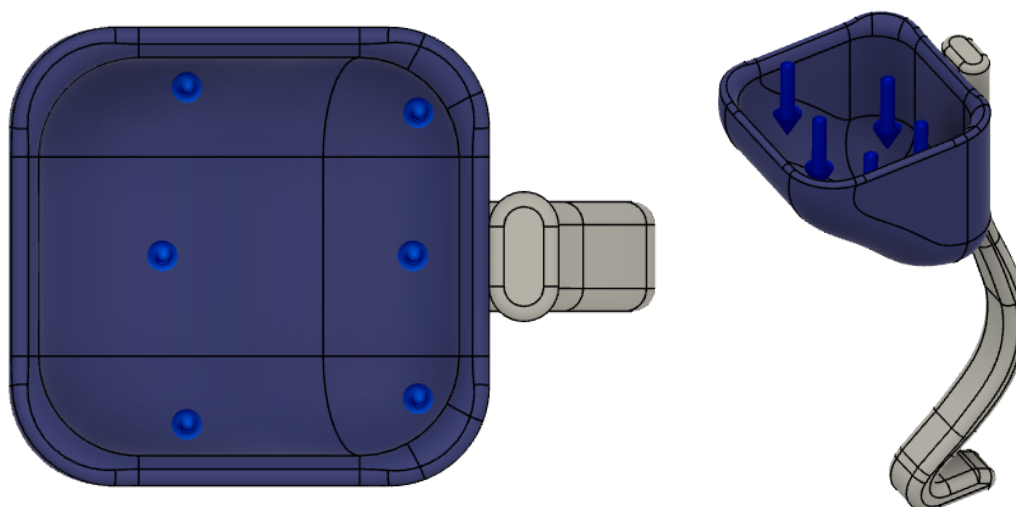
gdzie:  $m$  – masa ciała psa = 10 kg,  $g$  – przyspieszenie grawitacyjne = 9,81 m/s<sup>2</sup>.

Wyznaczona siła przyjęła wartość 20,6 N i została przyłożona do powierzchni kontaktowej protezy z podłożem. Nie przyjęto obciążenia leja protezowego związanego z masą ciała psa, zakładając zniwelowanie działających nań sił poprzez konieczność stosowania szelek stabilizujących protezę na kończynie.



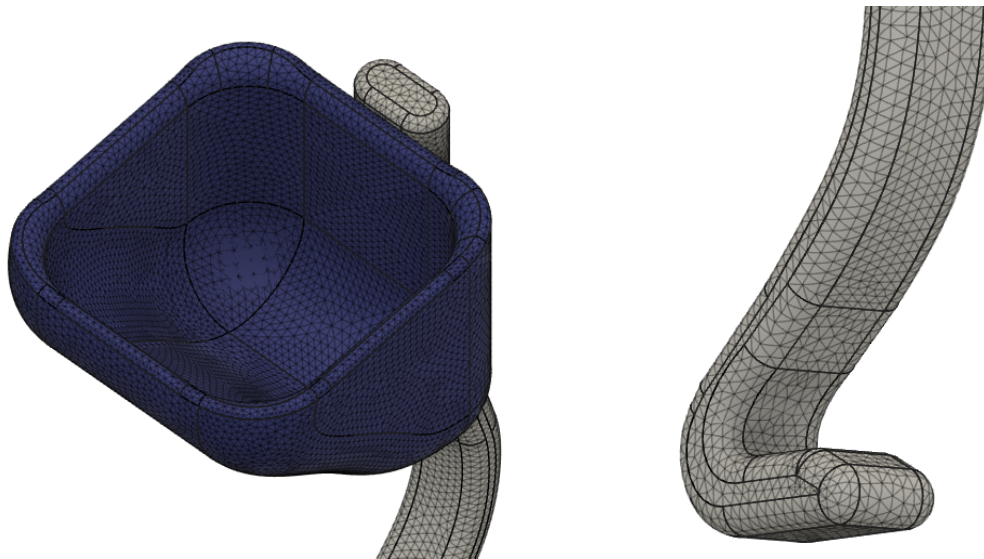
**Rys. 6.10** Miejsce występowania obciążeń w modelu – przypadek 1

Drugim rozpatrywanym przypadkiem jest obciążenie leja protezowego pionową siłą o takiej samej wartości jak w pierwszej części symulacji, wynikającą z obciążenia leja masą ciała psa.



**Rys. 6.11** Miejsce występowania obciążeń w modelu – przypadek 2

Ostatnim etapem przed rozpoczęciem symulacji było wygenerowanie siatki elementów skończonych. Program Autodesk Fusion 360 umożliwia uzyskanie siatki o różnej gęstości i jakości poprzez moduł „Generate Mesh”. Im gęstsza siatka, tym większe prawdopodobieństwo przeprowadzenia prawidłowych i dokładniejszych obliczeń. Dla badanego modelu otrzymano bardzo gęstą siatkę bryłową czworosieczną (identyczną dla obu rozpatrywanych przypadków), składającą się z 237059 elementów i 364277 węzłów.



**Rys. 6.12** Wygenerowana siatka dla modelu – symulacja naprężeń, odkształceń i przemieszczeń

#### **6.4.2 Symulacje częstotliwościowe**

Celem symulacji częstotliwościowych jest analiza zachowania konstrukcji podczas występowania naturalnych drgań. Symulację częstotliwościową podzielono na trzy etapy – pierwszy został przeprowadzony bez żadnego oddziaływania siłami zewnętrznymi na model oraz bez utwierdzenia, drugi brał pod uwagę jedynie utwierdzenie protezy na wewnętrznej powierzchni leja protezowego, trzeci natomiast utwierdzenie w miejscu kontaktu łapy protezowej z podłożem. Deformacje modelu analizowano przy dziesięciu częstościach drgań własnych. W każdym przypadku pominięto siłę oddziałującą na konstrukcję wynikającą z masy ciała psa. Wygenerowana siatka elementów skończonych składała się z 237026 elementów i 364234 węzłów.



**Rys. 6.12** Wygenerowana siatka dla modelu – symulacja częstotliwościowa

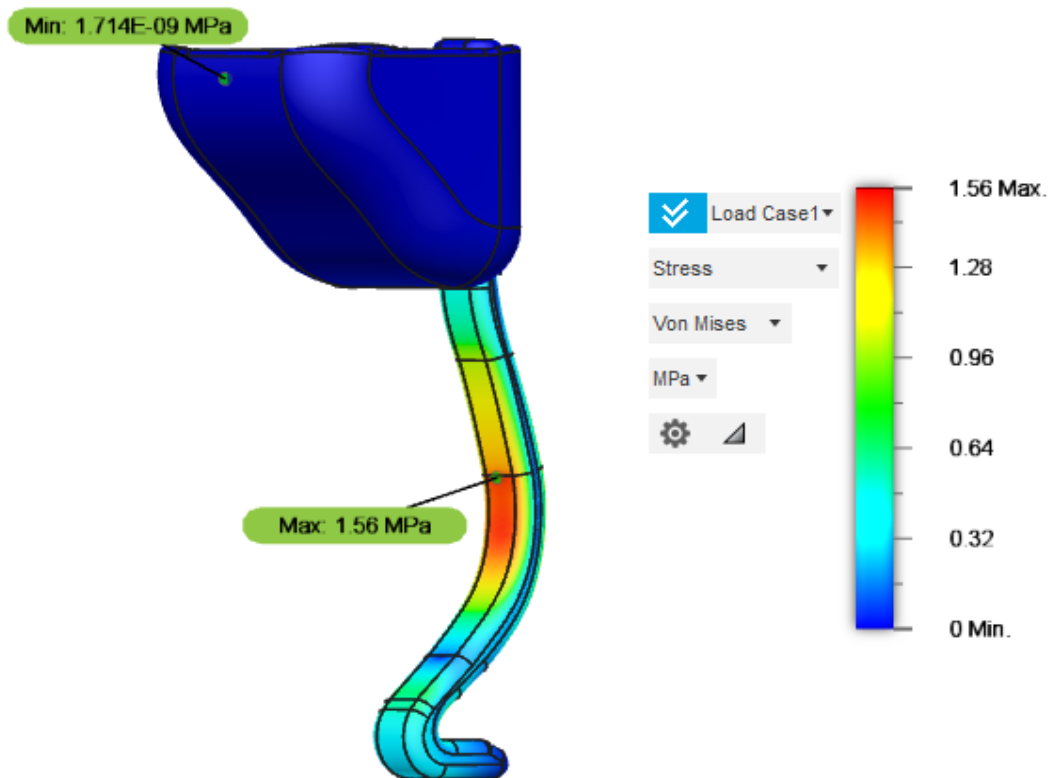
Analiza symulacji częstości własnych pozwala na ocenę deformacji modelu, lecz nie niesie ze sobą informacji na temat amplitudy drgań oraz wartości przemieszczeń. Te mogą być określone jedynie w przypadku, gdy znane jest wzbudzenie rzeczywiste wraz z właściwościami tłumiącymi.



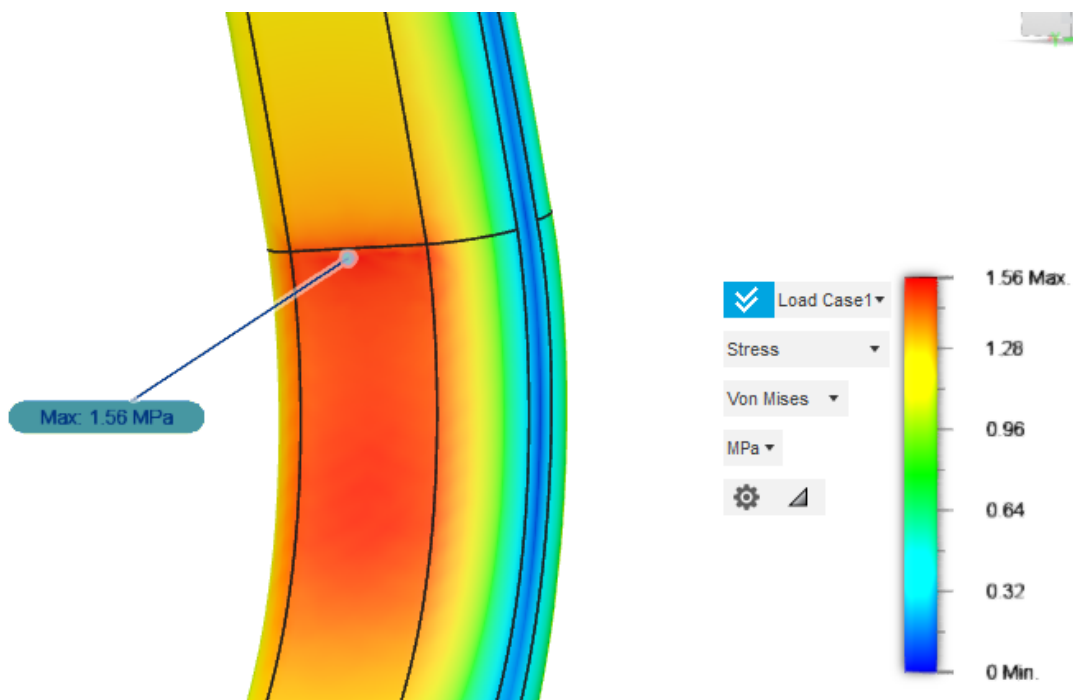
## 7. Wyniki symulacji

### 7.1 Symulacja naprężeń, odkształceń i przemieszczeń – przypadek 1

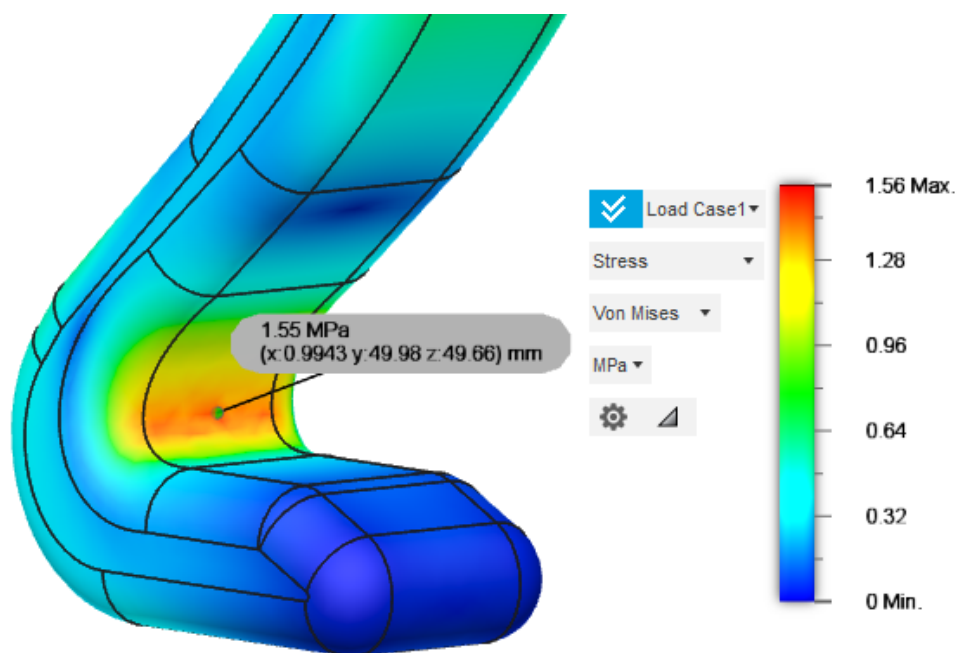
Najwyższa wartość naprężeń zredukowanych von Misesa jest równa 1,56 MPa. Wystąpiły w module nośnym protezy, w jej miejscu zakrzywienia. Naprężenia o podobnej wartości odnotowano również w okolicach zaokrąglenia łapy protezowej, w jej tylnej części. Wartości naprężeń zredukowanych maleją w kierunku leja protezowego, gdzie przyjmują najniższe wielkości, oraz w kierunku kontaktu protezy z podłożem. Powstałe naprężenia nie przekraczają granicy plastyczności i wytrzymałości na rozciąganie przypisanych do protezy materiałów.



Rys. 7.1 Naprężenia zredukowane von Misesa – przypadek 1, widok ogólny

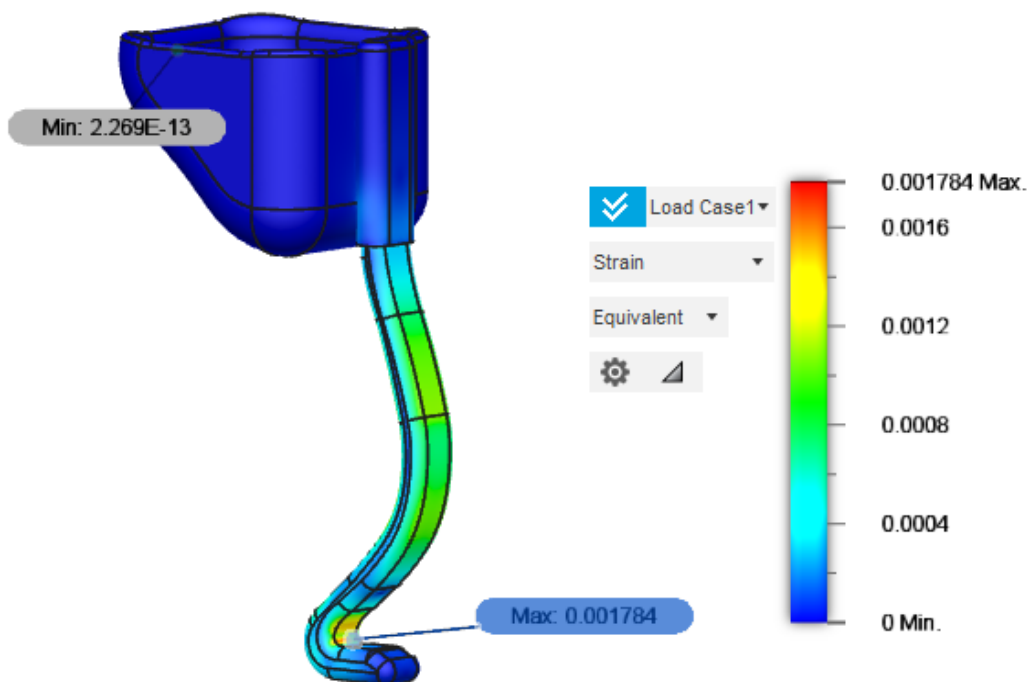


Rys. 7.2 Naprężenia zredukowane von Misesa w protezie – przypadek 1, widok zakrzywienia modułu nośnego protezy

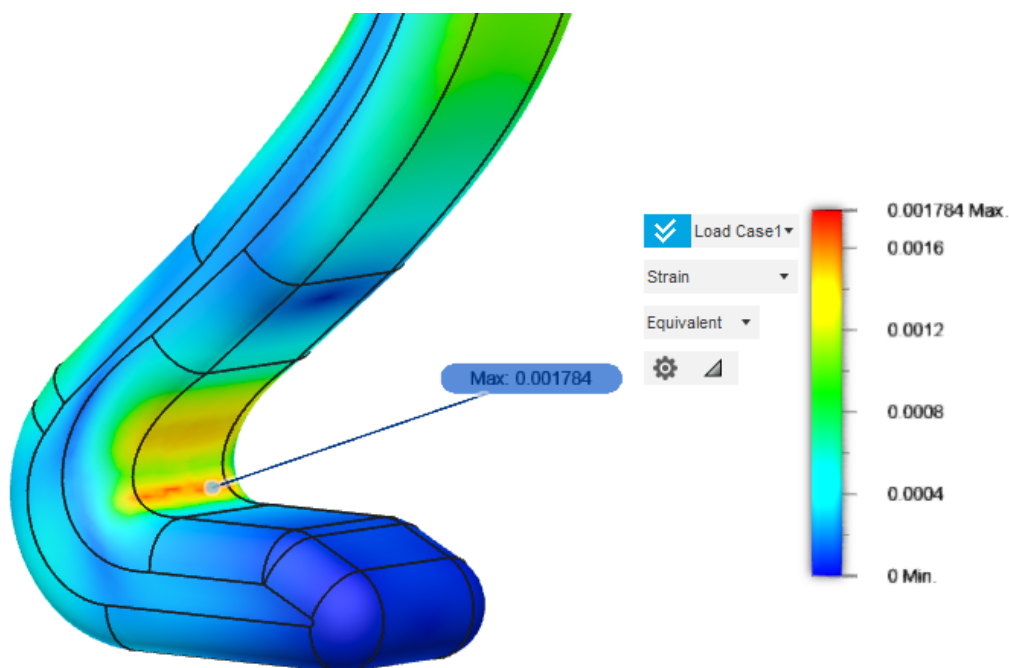


Rys. 7.3 Naprężenia zredukowane von Misesa w protezie – przypadek 1, widok łapy protezowej

Największe odkształcenia odnotowano w miejscu zakrzywienia łapy protezowej, gdzie przechodzi ona w część protezy imitującej podudzie kończyny. Mimo bycia maksymalną wartością, jest ona bardzo niska i równa 0,001784. Odkształcenia rzędu 0,0012 wystąpiły w okolicach zakrzywienia modułu nośnego protezy – w pozostałych jej częściach przyjęły wartości pomijalnie niskie.

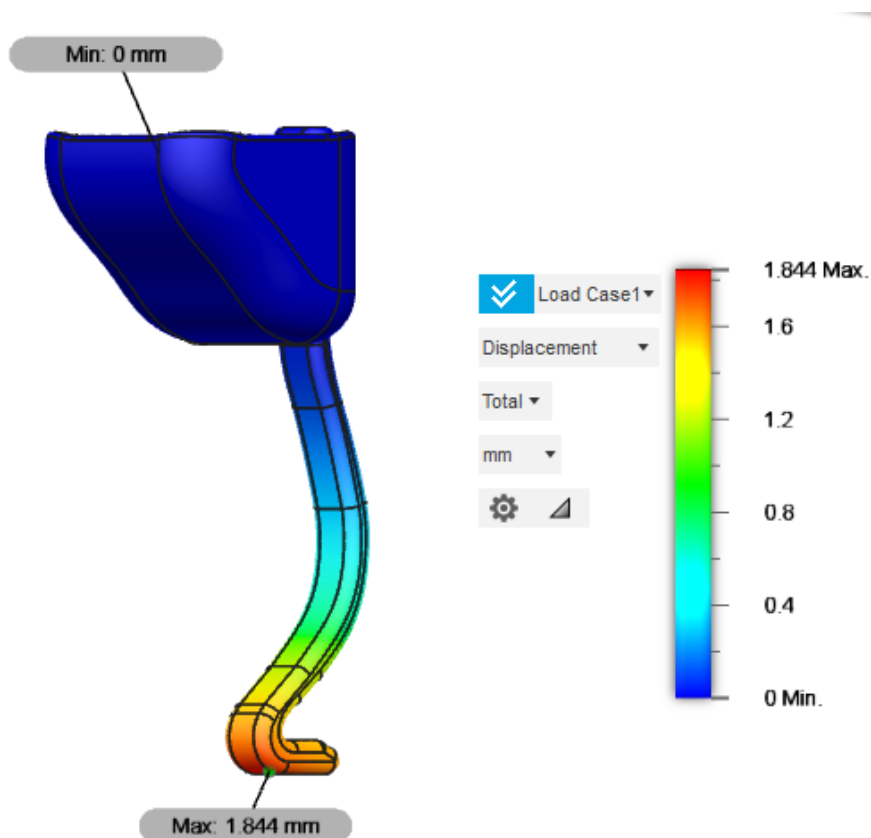


Rys. 7.4 Odkształcenia w protezie – przypadek 1, widok ogólny

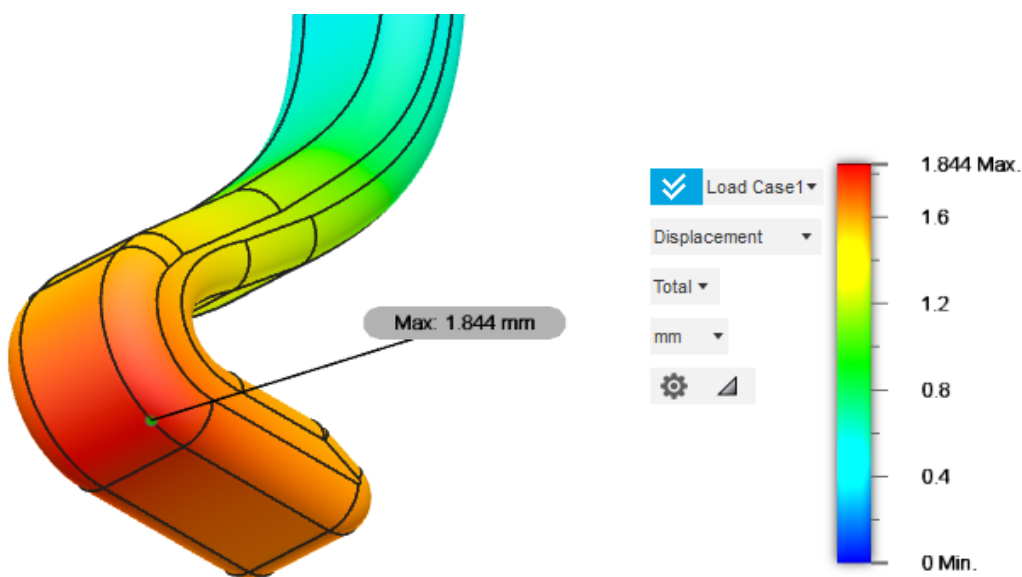


Rys. 7.5 Odkształcenia w protezie – przypadek 1, widok łapy protezowej

Wielkości przemieszczenia w modelu rosną od miejsca kontaktu protezy z podłożem – najwyższa wartość jest równa 1,844 mm i występuje na powierzchni łapy protezowej. Przemieszczenie jest zerowe w górnej części modułu nośnego protezy oraz w miejscu jej utwierdzenia, czyli w leju protezowym.



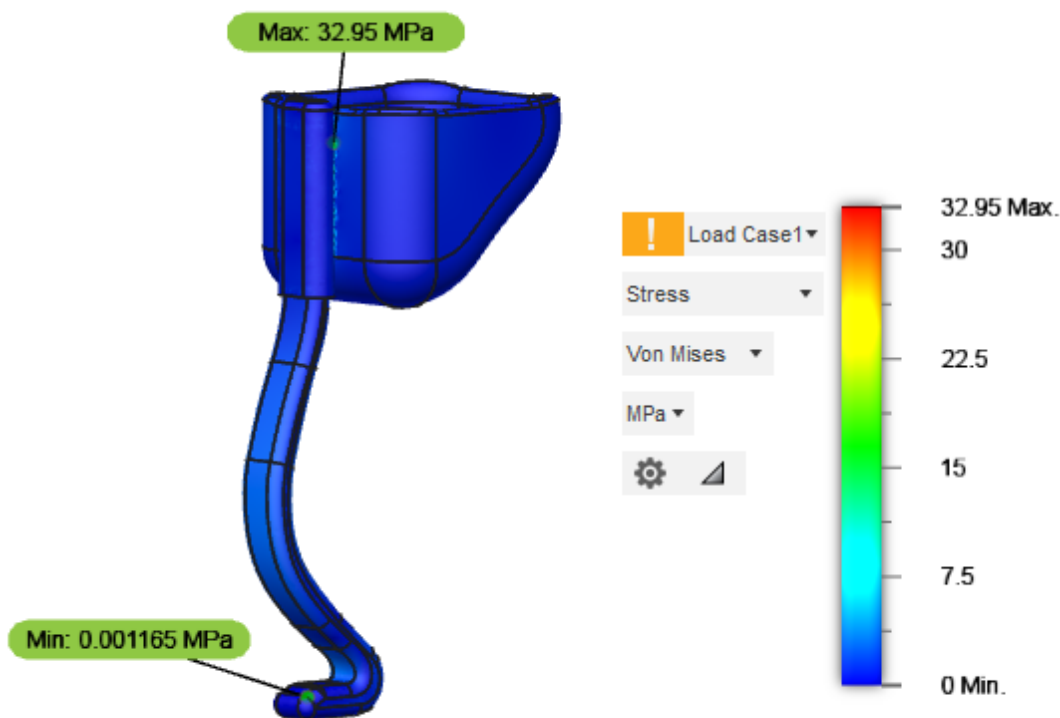
Rys. 7.6 Przemieszczenie w protezie – przypadek 1, widok ogólny



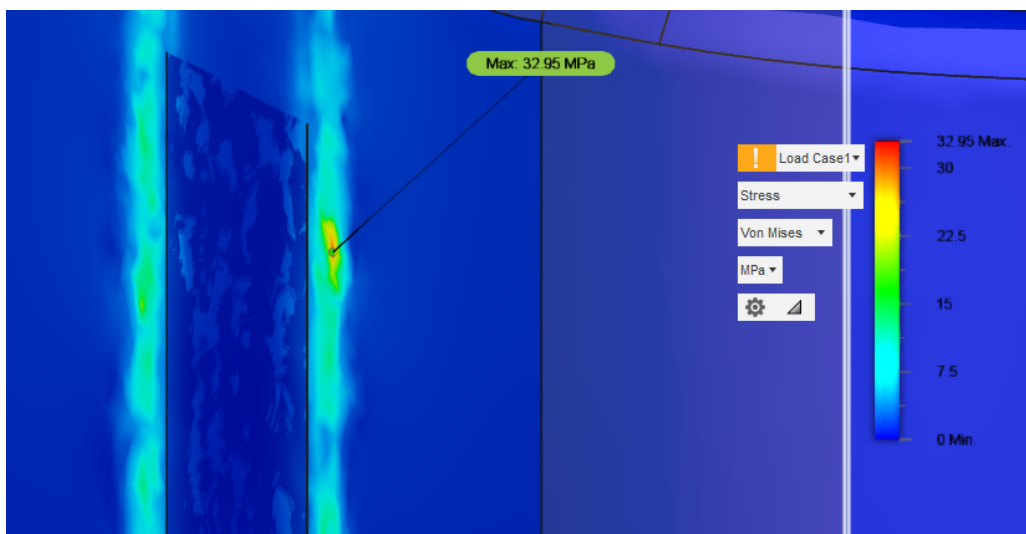
Rys. 7.7 Przemieszczenie w protezie – przypadek 1, widok łapy protezowej

## 7.2 Symulacja naprężeń, odkształceń i przemieszczeń – przypadek 2

Obliczone maksymalne naprężenia zredukowane są wyższe niż w przypadku pierwszym i osiągają wartość 32,95 MPa. Występują w miejscu połączenia leja protezowego z modułem nośnym i nieznacznie przewyższają granicę plastyczności polipropylenu. Może to wynikać z zastosowanego rodzaju kontaktu między elementami protezy i uproszczenia modelu (niezastosowanie połączeń gwintowych). Jest to jednak tylko jeden punkt – na przekroju protezy widać, że inne wartości naprężeń są niskie i ich wartości przyjmują około 7,5 MPa. Maksymalne naprężenie zredukowane w takim przypadku może być pominięte z punktu widzenia projektowania protezy. Naprężenia zredukowane występujące w pozostałych częściach protezy są pomijalnie niskie, lecz wyższe niż w przypadku pierwszym. Jest to związane z większą powierzchnią, na którą działała siła zewnętrzna i mniejszą powierzchnią utwierdzenia modelu.

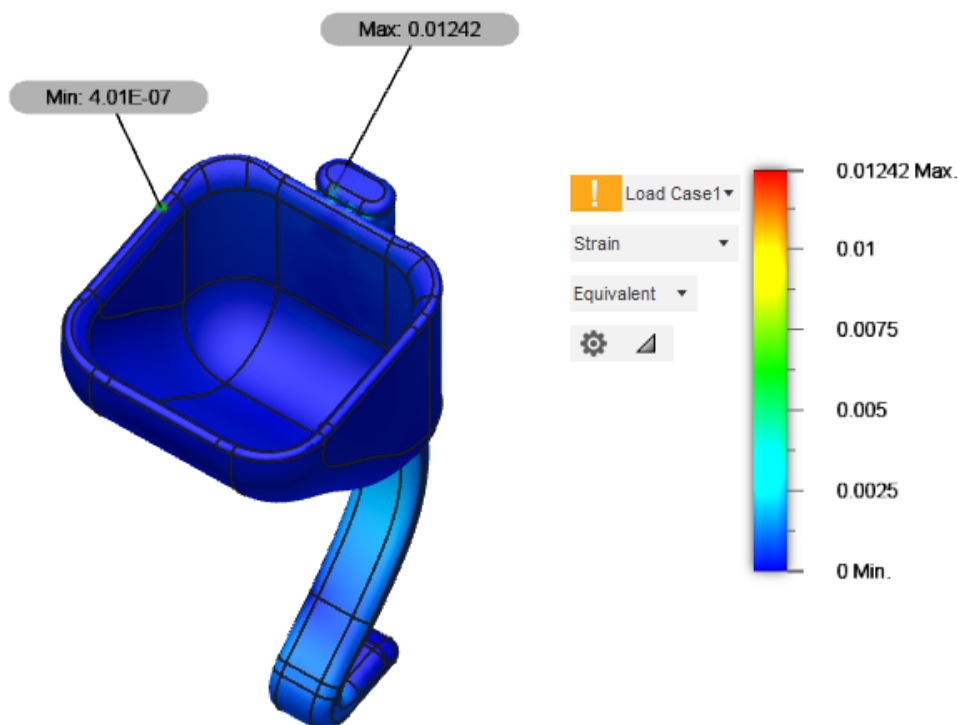


Rys. 7.8 Naprężenia zredukowane von Misesa – przypadek 2, widok ogólny

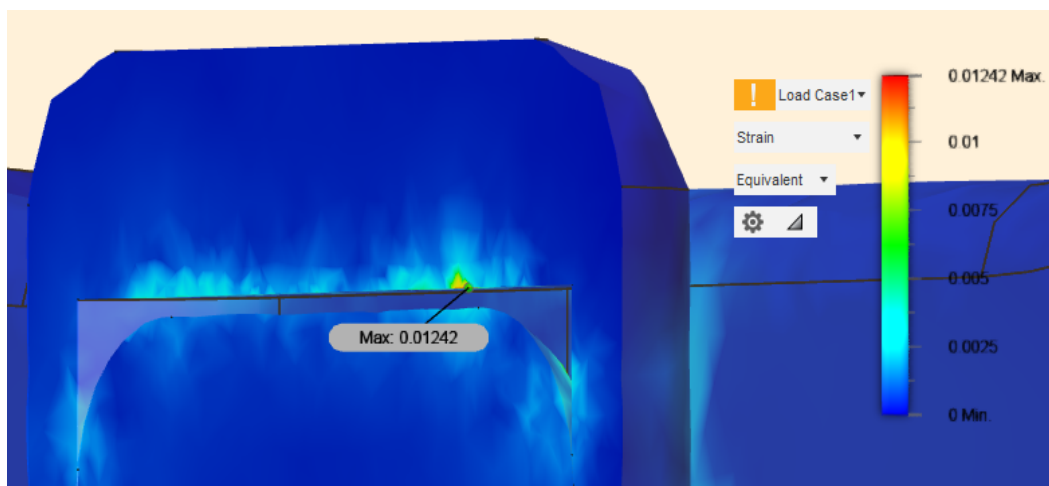


Rys. 7.9 Naprężenia zredukowane von Misesa – przypadek 2, widok łączenia leja z modułem nośnym

Największe odkształcenia odnotowano w miejscu kontaktu części łączącej lej z modułem nośnym. Odkształcenia wystąpiły w jednym punkcie przekroju elementu łączącego. Ich maksymalna wartość wyniosła 0,01242. W pozostałych elementach protezy przyjęły wartości pomijalnie niskie.

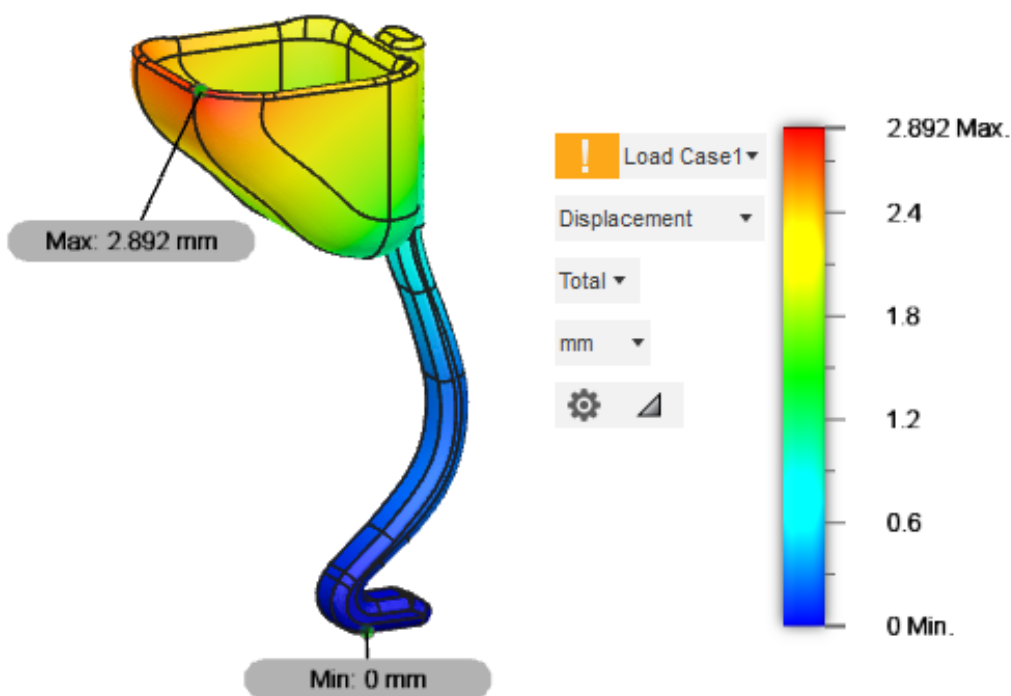


Rys. 7.10 Odkształcenia w protezie – przypadek 2, widok ogólny

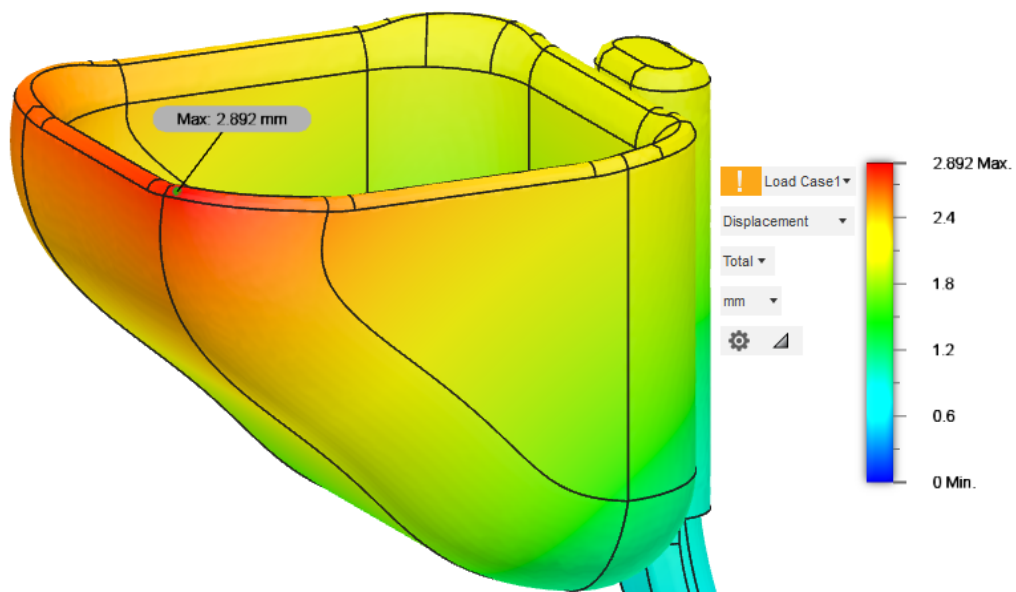


Rys. 7.11 Odształcenia w protezie – przypadek 2, widok kontaktu łącznika z modulem nośnym protezy

Wielkości przemieszczenia w modelu zwiększają swoje wartości od miejsca kontaktu protezy z podłożem – najwyższa wartość jest równa 2,892 mm i występuje na górnej krawędzi leja protezowego. Przemieszczenie jest zerowe w dolnej części modułu nośnego protezy oraz w miejscu jej utwierdzenia, czyli na powierzchni łapy protezowej.



Rys. 7.12 Przemieszczenie w protezie – przypadek 2, widok ogólny

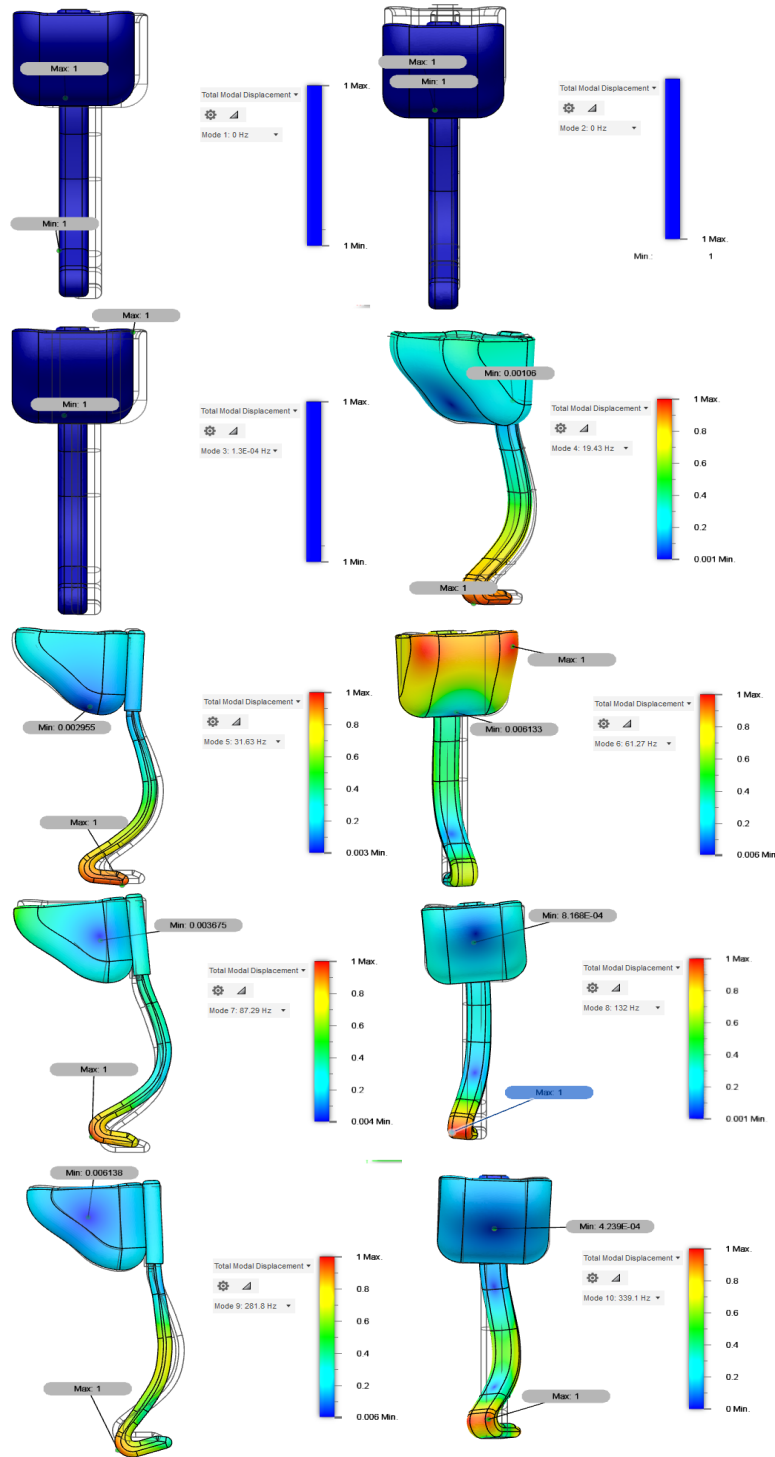


Rys. 7.13 Przemieszczenie w protezie – przypadek 2, widok krawędzi leja protezowego



### 7.3 Symulacje częstotliwościowe

Rysunek 7.14 obrazuje deformacje modelu odpowiadające poszczególnym częstotliwościom naturalnym. W tabeli 3 przedstawiono wartości częstotliwości drgań własnych otrzymanych w symulacji nieuwzględniającej utwierdzenia modelu.



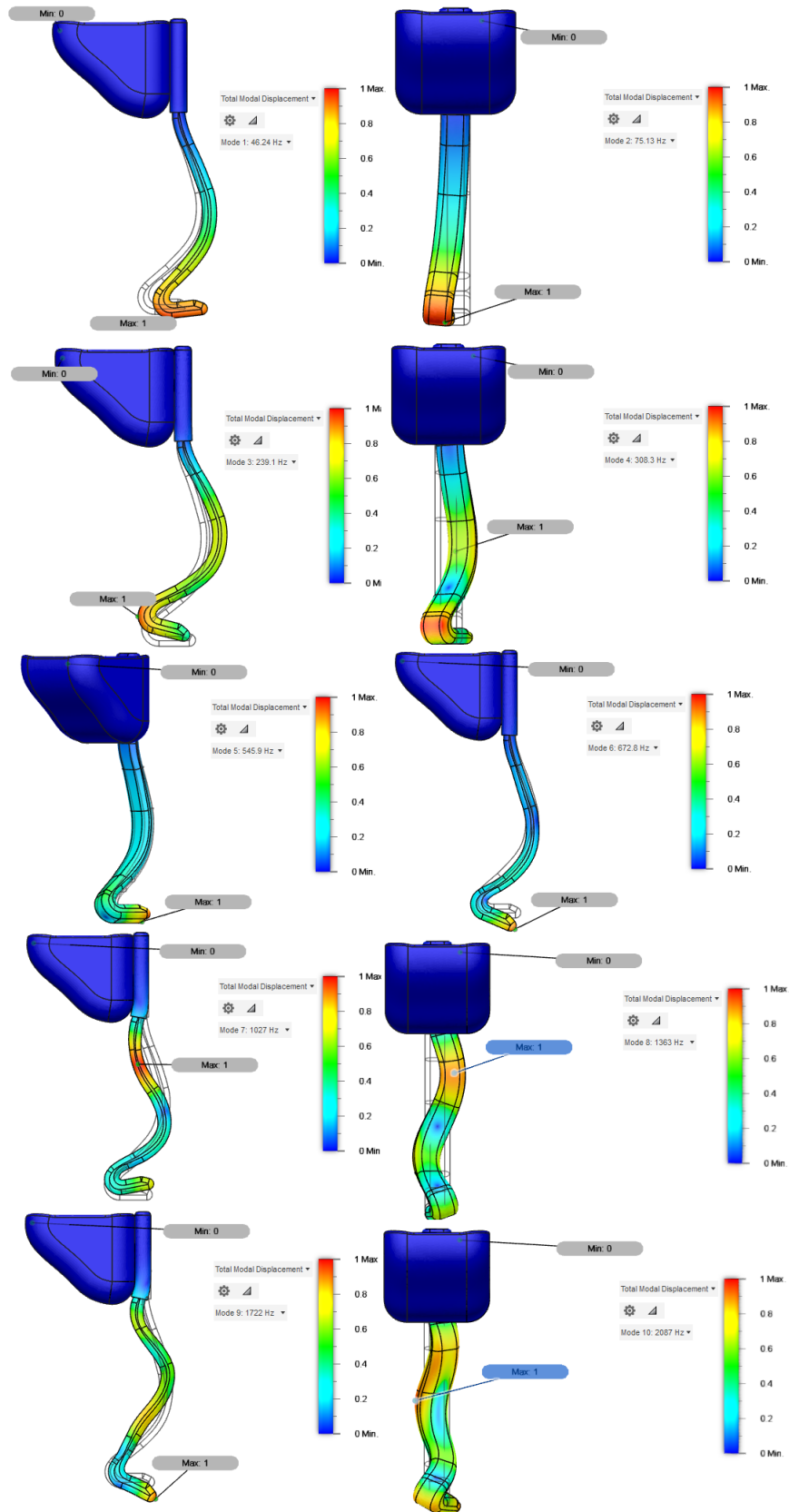
Rys. 7.14 Postacie drgań własnych modelu - symulacja bez utwierdzenia modelu

**Tabela 3.** Wartości częstotliwości własnych - symulacja bez utwierdzenia modelu

Lp.	Wartość [Hz]
1	0
2	0
3	$1,3 \cdot 10^{-4}$
4	19,43
5	31,63
6	61,27
7	87,29
8	132
9	281,1
10	339,1

Trzy pierwsze wartości są równe zeru lub bliskie zeru z powodu braku wybranego utwierdzenia protezy. Program traktuje model jako ciało sztywne i jest w stanie zmieniać jego położenie bez występowania żadnych drgań. Pierwsze drgania harmoniczne pojawiają się przy częstotliwości własnej o wartości 19,43 Hz. Każda z częstości drgań naturalnych modelu oddziałuje na łapę protezową protezy w przedniej jej części, deformując ją w różnych kierunkach. Jedynie szоста postać drgań wywołuje największe przemieszczenie w leju protezowym, na jego zewnętrznej powierzchni w miejscu zaokrąglenia.

Rysunek 7.15 obrazuje deformacje modelu odpowiadające poszczególnym częstotliwościom naturalnym, które wpływają na drgania protezy utwierdzonej na wewnętrznej powierzchni leja protezowego. W tabeli 4 przedstawiono wartości częstości drgań własnych otrzymanych w symulacji uwzględniającej utwierdzenie modelu we wnętrzu leja protezowego.



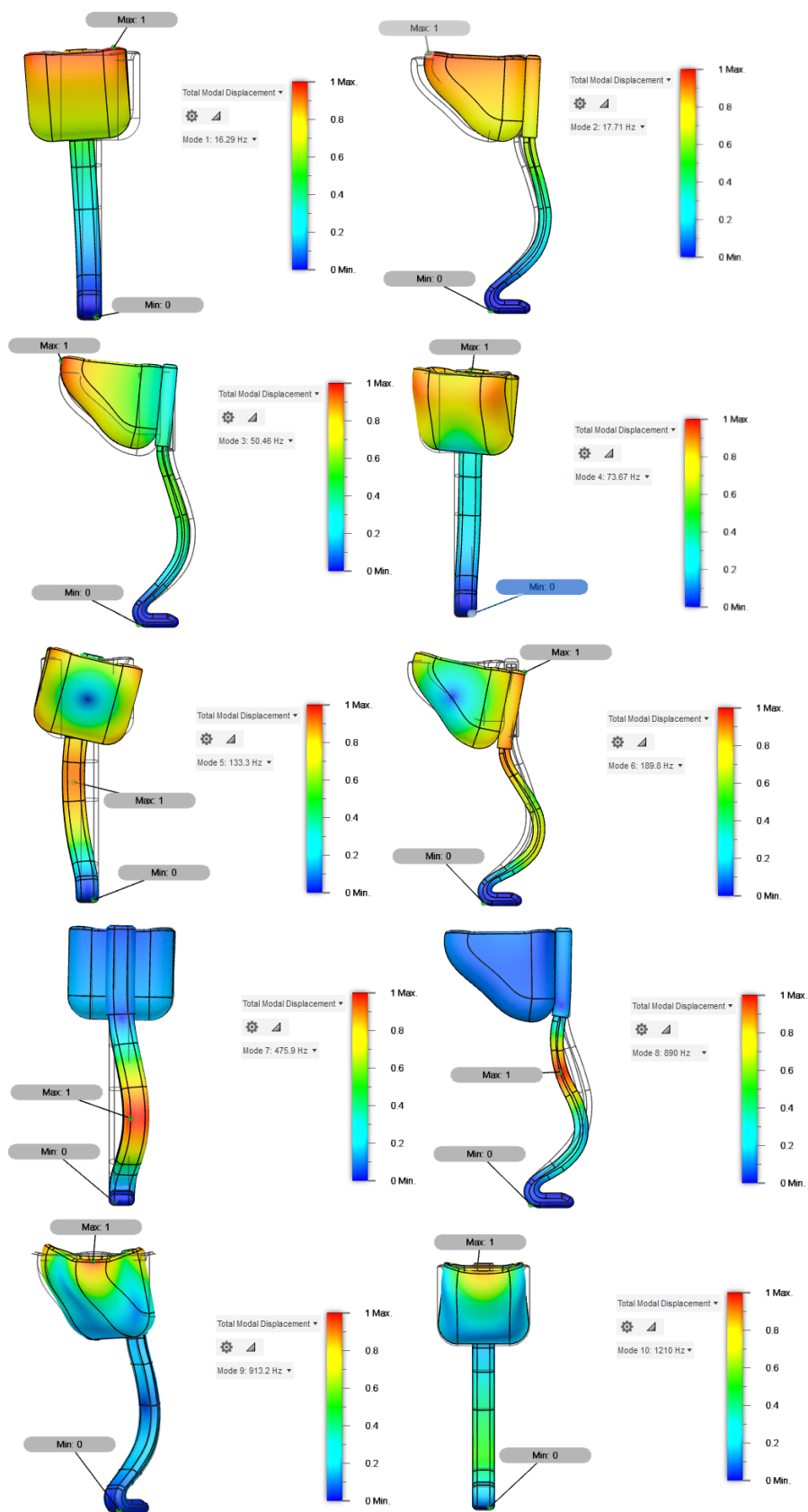
Rys. 7.15 Postacie drgań własnych modelu - symulacja z utwierdzeniem modelu w leju protezowym

**Tabela 4.** Wartości częstotliwości drgań własnych - symulacja z utwierdzeniem modelu w leju protezowym

Lp.	Wartość [Hz]
1	46,24
2	75,13
3	239,1
4	308,3
5	545,9
6	672,8
7	1027
8	1363
9	1722
10	2087

Z powodu utwierdzenia modelu, w przeciwieństwie do pierwszego etapu badania, wartości częstości drgań własnych nie były zerowe – program nie był w stanie swobodnie poruszać protezą. Pierwsza z nich była równa 46,24 Hz, a różnice między kolejnymi wielkościami były duże. Pierwsza, druga i trzecia częstość w największym stopniu oddziałuje na łapę protezową w jej przedniej części, piąta, szósta i dziewiąta w tylnej, natomiast czwarta, siódma, ósma i dziesiąta powoduje największe przemieszczenia w module nośnym protezy, zarówno w miejscu jej zaokrąglenia, jak i bliżej leja protezowego.

Rysunek 7.16 obrazuje deformacje modelu odpowiadające poszczególnym częstotliwościom naturalnym, które wpływają na drgania protezy utwierdzonej na powierzchni łapy protezowej mającej kontakt z podłożem. W tabeli 5 przedstawiono wartości częstości drgań własnych otrzymanych w symulacji uwzględniającej utwierdzenie modelu w miejscu kontaktu z podłożem.



Rys. 7.16 Postacie drgań własnych modelu - symulacja z utwierdzeniem modelu na powierzchni kontaktu z podłożem

**Tabela 5.** Wartości częstotliwości drgań własnych - symulacja z utwierdzeniem modelu na powierzchni kontaktu z podłożem

Lp.	Wartość [Hz]
1	16,29
2	17,71
3	50,46
4	73,67
5	133,3
6	189,8
7	475,9
8	890
9	913,2
10	1210

Podobnie jak w poprzednim przypadku, z powodu utwierdzenia modelu wartości częstości drgań własnych nie były zerowe – program nie był w stanie swobodnie poruszać protezą. Pierwsza z nich była równa 16,29 Hz. Wszystkie wartości częstotliwości własnych były niższe niż w przypadku częstości występujących przy utwierdzeniu modelu w wewnętrznej części leja protezowego. Pierwsza, druga, trzecia i dziewiąta częstość w największym stopniu oddziałuje na lej w jego przedniej części, czwarta, szósta i dziesiąta na łącznik leja z modulem nośnym, natomiast piąta, siódma i ósma powoduje największe przemieszczenia w module nośnym protezy, w okolicach jego zaokrąglenia.

## 8. Podsumowanie i wnioski

Celem pracy było zaprojektowanie modelu przestrzennego protezy kończyny miednicznej psa oraz przeprowadzenie szeregu analiz badających jej właściwości mechaniczne. Protezę zamodelowano w programie Autodesk Fusion 360 bazując na wiedzy zdobytej podczas toku nauczania, materiałów uzyskanych dzięki uprzejmości Uniwersyteckiego Centrum Medycyny Weterynaryjnej Uniwersytetu Przyrodniczego w Poznaniu oraz źródeł literaturowych związanych z ortopedią weterynaryjną. Przeprowadzenie symulacji obejmowało przypisanie danych materiałowych częściom protezy, określenie warunków brzegowych i ocenę występujących w konstrukcji naprężeń, odkształceń, przemieszczeń oraz częstości własnych.

Projekt protezy stworzono po analizie zróżnicowanych, istniejących już rozwiązań protetycznych dla psów i dostosowano go do rozpatrywanego przypadku. Zastosowanie zaokrągleń i płynnych przejść między częściami protezy wpływa na dobrą amortyzację oraz magazynuje i uwalnia energię podczas użytkowania. Lej protezowy został zaprojektowany w taki sposób, aby obejmował cały kikut i nie przeszkadzał psu w poruszaniu się.

Zrealizowane symulacje wykazały, że zaprojektowana proteza jest bezpieczną konstrukcją dla psa o wadze 10 kg. W przypadku pierwszej symulacji wytrzymałościowej, maksymalne wartości naprężeń zredukowanych nie są zbliżone do granic plastyczności i wytrzymałości na rozciąganie dobranych materiałów, a proteza nie ulegnie deformacjom podczas jej normalnego użytkowania. Druga symulacja wykazała występowanie naprężeń zredukowanych przekraczające granicę plastyczności polipropylenu, lecz z perspektywy projektowania może to być wartość pomijalna. Odkształcenia i przemieszczenia w modelu są pomijalnie niskie – występują jedynie w module nośnym. Wpływ ma na to amortyzacyjny, zaokrąglony kształt protezy. Istotny jest fakt, iż wszystkie symulacje zostały przeprowadzone biorąc pod uwagę jedynie obciążenie wynikające z ciężaru masy ciała badanego psa (20,6 N). Uzyskane wartości mogą się różnić w zależności od tempa chodu oraz wypadków losowych, takich jak uderzenie w protezę. Analiza częstotliwości drgań naturalnych wykazała, że znaczne deformacje konstrukcji mogą pojawić się jedynie w przypadku bardzo wysokich częstości, nieosiągalnych w trakcie zwykłego chodu. Ich wartości są niższe w przypadku braku jakiegokolwiek utwierdzenia modelu.

Uzyskane wyniki, mimo wiarygodności, należy traktować z przybliżeniem. Zaprojektowana proteza jest modelem uproszczonym – aby ułatwić przeprowadzenie symulacji,

konstrukcja nie posiada dodatkowych połączeń gwintowych, wypełnienia leja protezowego oraz uprzęży koniecznych do umocowania protezy na kikucie. Przybliżone są również wartości związane z obciążeniem modelu, co może generować dodatkowe błędy i odchyłki. Model i otrzymane wyniki są jednak bardzo dobrą bazą do dalszych badań i ulepszania rozwiązań protetycznych w weterynarii.

Analiza metodą elementów skończonych jest przydatnym narzędziem w modelowaniu skomplikowanych problemów konstrukcyjnych. Pozwala na przewidywanie zachowania układu i wdrażanie lepszych rozwiązań przed wyprodukowaniem wyrobu. Wykorzystuje się ją nie tylko w zagadnieniach mechanicznych, ale coraz częściej również w medycynie i weterynarii. Staje się podstawą w projektowaniu indywidualnych rozwiązań protetycznych dla pacjenta, również zwierzęcia. Dzięki temu proces projektowania jest szybszy i tańszy oraz unika się błędów mogących pojawić się podczas eksploatacji wyrobu.



## **Streszczenie**

Celem niniejszej pracy było zaprojektowanie oraz analiza właściwości mechanicznych protezy kończyny miednicznej psa z wykorzystaniem metody elementów skończonych. Model protezy zaprojektowano w programie Autodesk Fusion 360 na podstawie tomogramów uzyskanych podczas badania tomograficznego psa, którego kończynę zakwalifikowano do amputacji. W pracy zawarto dwie symulacje naprężeń, odkształceń i przemieszczeń oraz symulację częstotliwościową w trzech przypadkach, odzwierciedlając warunki występujące podczas użytkowania protezy. Część teoretyczna pracy obejmuje zagadnienia anatomiczne, weterynaryjne, mechaniczne i materiałowe.

## **Abstract**

The aim of this thesis was to design, model and analyze mechanical properties of canine hind limb prosthesis with finite element method. Prosthesis model was created using Autodesk Fusion 360 program basing on tomograms from computer tomography scan of dog, which limb was qualified for amputation. Two types of stress, strain, displacement and three modal frequency simulations were included in this thesis, reflecting conditions that occur during usage the prosthesis. The theoretical part of the thesis covers anatomical, veterinary, mechanical and material issues.

## Bibliografia

- [1] Dyce K.M., Syke W.O., Wensing C.J.G.: *Anatomia weterynaryjna*. Saunders Elsevier Inc., St. Louis 2011
- [2] Bachman N., Lasso M., Olaode O., Walfield E., Al Zuhairi M.: *Design of a Prosthesis for Canines with Front Limb Deformities*. Worcester Polytechnic Institute, Worcester 2017
- [3] Jaegger G., Marcellin-Little D.J., Levine D.: *Reliability of goniometry in Labrador Retrievers*. „American Journal of Veterinary Research“, 2002, 63, 979-986.
- [4] Ginja M.M.D. i wsp.: *Diagnosis, genetic control and preventive management of canine hip dysplasia: a review*. „The Veterinary Journal“, 2010, 184, 269-276.
- [5] Gareth A.: *Orthopedic examination of the dog 2. Pelvic limb*. „In Practice“, 2011, 33, 172-179.
- [6] Fischer S., Anders A., Nolte I., Schilling N.: *Compensatory load redistribution in walking and trotting dogs with hind limb lameness*, 2013
- [7] *Prosthetics in Dogs*, <https://wagwalking.com/treatment/prosthetics>, [dostęp: 24.08.2021]
- [8] Skiernis K.: *Amputacja u psa i kota: z czym się wiąże?* Cowsierscipiszczy.pl, 2021, <https://cowsierscipiszczy.pl/amputacja/#przebieg-amputacji-u-psa> [dostęp: 24.08.2021]
- [9] Robinson M.: *Canine Amputation – Tripod Dog*. Walkingpets.com, Animal Wellness Magazine, <https://www.handicappedpets.com/canine-amputation-tripod-dog/> [dostęp: 24.08.2021]
- [10] Ostwald M.: *Podstawy wytrzymałości materiałów i konstrukcji*. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2017
- [11] Gabryszewski Z.: *Teoria sprężystości i plastyczności*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2001
- [12] Guminiak M., Rakowski J.: *Teoria sprężystości i plastyczności*. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2018
- [13] Wierzbowski K.: *Naprężenia i odkształcenia*. AGH, Kraków, [http://www.ftj.agh.edu.pl/~wierzbowski/Napr\\_odksz.pdf](http://www.ftj.agh.edu.pl/~wierzbowski/Napr_odksz.pdf) [dostęp: 24.08.2021]
- [14] Sikora J.: *Numeryczne metody rozwiązywania zagadnień brzegowych. Podstawy metody elementów skończonych i metody elementów brzegowych*. Politechnika Lubelska, Lublin 2012
- [15] Zienkiewicz O., Taylor R.: *The Finite Element Method*. Butterworth-Heinemann, Oxford 2000
- [16] Budzyński A.: *Krótki wstęp do zastosowania Metody Elementów Skończonych (MES) do numerycznych obliczeń inżynierskich*. <http://www.knse.pl/publikacje/65.pdf> [dostęp: 24.08.2021]

- [17] Astriab M., Stręk T.: *Właściwości mechaniczne lejów protezowych z warstwami wzmacniającymi*. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2021
- [18] Zieliński D.: *Technologia SLS*. <https://drukarki3d.pl/technologie/technologie-sls/> [dostęp: 23.08.2021]
- [19] Gołaszewski M., Grygoruk R., Bissenik I.: *Wykorzystanie skanowania przestrzennego i druku 3D w procesie tworzenia protezy kończyny zwierzęcia*. „Mechanik”, 2015, 8-9, 682-684
- [20] Malm S.: *The peg-legged pug: Dog who's learning to walk again after he was fitted with a prosthetic*. Dailymail.co.uk, 2012 <https://www.dailymail.co.uk/news/article-2217972/Pug-whos-learning-walk-fitted-prosthetic.html> [dostęp: 24.08.2021]
- [21] *Back Leg/Hindlimb/Pelvic Prosthetics for Animals*, <https://orthopets.com/brace-and-prosthetic-solutions/pelvic-hind-limb-prosthetics/> [dostęp: 24.08.2021]
- [22] *Amputation Prosthesis (PerFiTS)*, fitzpatrickreferrals.co.uk <https://www.fitzpatrickreferrals.co.uk/orthopaedic/amputation-prosthesis-perfits/> [dostęp: 24.08.2021]
- [23] *Wózek niedowład tylny*. Firma-admiral.pl <http://www.firma-admiral.pl/wozek-niedow-adylny.html> [dostęp: 01.09.2021]
- [24] Prochocka A.: *Wózek inwalidzki dla psa. Gdzie go kupić i jaki wybrać?* Psy.pl, 2021 <https://www.psy.pl/wozek-inwalidzki-dla-psa/> [dostęp: 01.09.2021]
- [25] M. P.: *Nauka i rehabilitacja psa z protezą*. Protezydlazwierzat.com, 2019 <https://www.protezydlazwierzat.com/blog/nauka-i-rehabilitacja-psa-z-proteza/> [dostęp: 01.09.2021]
- [26] Medixant. RadiAnt DICOM Viewer [Software]. Version 2021.1. Jun 27, 2021. <https://www.radiantviewer.com> [dostęp: 24.08.2021]
- [27] Fusion 360 <https://www.autodesk.pl/products/fusion-360/overview> [dostęp: 24.08.2021]
- [28] Świczko-Żurek B.: *Biomateriały*. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2009
- [29] Hucińska J. et al: *Metaloznawstwo*. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 1995
- [30] Fischer S., Anders A., Nolte I., Schilling N.: *Compensatory load redistribution in walking and trotting dogs with hind limb lameness*, 2013
- [31] Łączna D., Dłużniewski F., Stręk T.: *Analysis of Eigenfrequencies of the Foot Prosthesis with Auxetic Component Layer*. *Vibrations in Physical Systems*, 2020, 31(2), 2020215