

POLITECHNIKA POZNAŃSKA  
WYDZIAŁ BUDOWY MASZYN I ZARZĄDZANIA  
INSTYTUT MECHANIKI STOSOWANEJ  
INŻYNIERIA BIOMEDYCZNA

INŻYNIERSKA PRACA DYPLOMOWA

**MODELOWANIE I ANALIZA WŁAŚCIWOŚCI  
MECHANICZNYCH PROTEZY SPORTOWEJ  
PODUDZIA**



Promotor:

**dr hab. Tomasz STREK prof. nadzw. PP**

Poznań 2019



## Spis treści

1. Wprowadzenie .....	5
1.1. Wstęp.....	5
1.2. Cel i zakres pracy .....	6
1.3. Układ pracy .....	6
2. Budowa anatomiczna i biomechanika kończyny dolnej.....	7
3. Chód i biomechanika chodu .....	10
3.1. Opis chodu .....	10
3.2. Fazy i determinanty chodu .....	11
3.3. Reakcje podłoża podczas chodu.....	13
4. Protezy kończyny dolnej.....	17
4.1. Rodzaje protez.....	17
4.2. Protezy sportowe .....	19
4.3. Materiały na protezy .....	21
5. Naprężenia i odkształcenia w ciele stałym .....	23
5.1. Naprężenia i odkształcenia.....	23
5.2. Prawo Hooke'a.....	24
5.3. Związek konstytutywny .....	25
5.4. Równanie Naviera.....	27
5.5. Tłumienie .....	28
6. Metoda Elementów Skończonych .....	29
7. Modele i metody badań.....	31
7.1. Opis modelu .....	31
7.2. Wirtualny model i stosowane oprogramowanie.....	33
8. Modelowanie i symulacja .....	35
8.1. Założenie symulacji .....	35
8.2. Symulacja naprężeniowa i odkształceniowa w trakcie chodu .....	40
8.3. Symulacja częstotliwościowa.....	49

---

9. Podsumowanie i wnioski .....	56
Streszczenie .....	58
Abstract.....	58
Literatura .....	59

## 1. Wprowadzenie

### 1.1. Wstęp

Współpraca medycyny z inżynierią prowadzi do powstawania wielu produktów wspomagających leczenie, rehabilitację i codzienne życie człowieka. Jedną z dziedzin, w której widać kooperację tych dyscyplin jest protetyka. Wiedza z biomechaniki, materiałoznawstwa, wytrzymałości materiałów z jednej oraz z fizjologii, anatomii, rehabilitacji z drugiej dziedziny dają razem dużą bazę danych do jak najlepszego zaopatrzenia pacjentów. Beneficjenci najnowszych wynalazków branży protetycznej to również osoby pragnące aktywnie spędzać czas. By sprostać tym oczekiwaniom, w ostatnich latach widać rozwój protetyki sportowej. Dzięki zastosowaniu odpowiedniej geometrii oraz materiałów sportowe protezy podudzia przeznaczone do biegania pozwalają imitować układ mięśniowy przez odpowiednie magazynowanie i oddawanie energii.

Wykorzystanie mocy obliczeniowej komputerów do projektowania inżynierskiego w ostatnich dziesięcioleciach stało się powszechne. Dzięki zastosowaniu odpowiedniego oprogramowania można wirtualnie wykonać modele, testy i analizy bez niepotrzebnego tworzenia prototypów. Symulacje wytrzymałościowe stają się coraz dokładniejsze dzięki stosowaniu metod rozwiązywania układów równań różniczkowych, takich jak np. Metoda Elementów Skończonych.

Dla odpowiedniego zaopatrzenia chorego należy jak najlepiej dostosować protezę do jego warunków anatomicznych. Z pomocą przychodzi zaawansowane metody komputerowe śledzenia ruchu (np. system BTS) czy tworzenie modeli 3D ze zdjęć (np. Autodesk ReMake, 3D Doctor). Dobra analiza danych geometrycznych i anatomicznych pacjenta oraz analiza jego nastawienia psychicznego pozwala zindywidualizować produkt, by ten jak najlepiej pasował do niepełnosprawnego. Dzięki temu wzrasta szansa na usamodzielnienie pacjenta, poprawę jego kondycji fizycznej i psychicznej.

---

## **1.2. Cel i zakres pracy**

Celem pracy jest analiza właściwości mechanicznych sportowej protezy podudzia w warunkach dynamicznych. Symulacje przeprowadzono dla obciążeń występujących w trakcie chodu. Wiedza o materiałach stosowanych w protetyce oraz budowie protez sportowych została wykorzystana do stworzenia wirtualnego modelu w programie Autodesk Inventor. Dzięki danym pozyskanym z systemu BTS możliwe było wprowadzenie warunków brzegowych bliskich do rzeczywistych wartości. Symulacje przeprowadzono w programie Comsol Multiphysics. Przeanalizowano wpływ modelu tłumienia na występujące naprężenia, odkształcenia oraz częstotliwości i postaci drgań własnych w konstrukcji.

## **1.3. Układ pracy**

Praca została podzielona na rozdziały wprowadzające do tematyki protezowania oraz analizy komputerowej. Pierwszy z rozdziałów przybliży istotę pracy oraz jej cel. Kolejny rozdział przedstawia budowę oraz biomechanikę kończyny dolnej. Następna część pracy opisuje parametry chodu oraz reakcje podłoża na naciski występujące w trakcie przemieszczania się. Wiedza na ten temat jest bardzo ważna w kontekście analizy dynamicznej. Kolejny z rozdziałów przedstawia protezy kończyny dolnej, ze szczególnym uwzględnieniem protez sportowych. Dalsza część została poświęcona na przybliżenie naprężeń oraz odkształceń występujących w ciele. Opisuje prawo Hooke'a, równania ruchu oraz tłumienie. Kolejny rozdział omawia metodę elementów skończonych, która stosowana jest w zastosowanym oprogramowaniu. Następny rozdział przedstawia stworzony wirtualny model oraz opisuje programy użyte do modelowania oraz symulacji. Ostatnie dwa rozdziały to opis symulacji, analiza wyników oraz podsumowanie.

## 2. Budowa anatomiczna i biomechanika kończyny dolnej [1-4]

Kończyny dolne człowieka służą jako narzędzia lokomocji. Stosunkowo szeroka miednica i długie części wolne kończyn dźwigają ciężar górnej części ciała i pozwalają na pozostawanie w pozycji pionowej przez długi czas bez dużych wydatków energetycznych organizmu. Wydłużenie stawianych kroków przyspiesza chód człowieka. Kończyna dolna składa się z dwóch elementów: obręcz kończyny dolnej oraz części wolnej kończyny dolnej. Układ kostny stabilizowany jest więzadłami, natomiast układ mięśniowy, pozwalający na ruchy poszczególnych kości względem siebie, jest połączony z szkieletem przez ścięgna. Mięśnie pełnią rolę siłowników sterowanych przez impulsy z układu nerwowego.

Obręcz kończyny dolnej tworzą od tyłu, będąca częścią kręgosłupa, kość krzyżowa i dwie kości miedniczne, które z przodu łączą się chrząstkozrostem zwanym spojeniem łonowym. Na kość miedniczną składają się kość biodrowa, kość kulszowa i kość łonowa. Miednica kostna nie posiada własnego dna, jest ono tworzone przez mięśnie i więzadła.

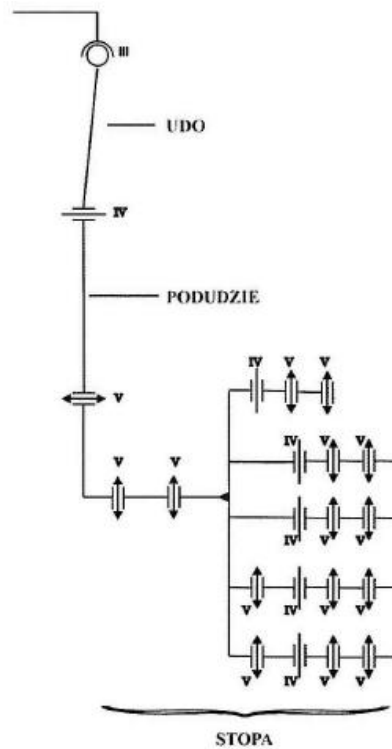
Część wolna kończyny dolnej zbudowana jest z kości udowej, rzepki, kości piszczelowej, kości strzałkowej i wielu małych kości stopy. Kość miedniczna z kością udową tworzą staw biodrowy. Kość biodrowa, rzepka oraz kość piszczelowa wchodzi w skład stawu kolanowego. Kość strzałkowa z kością piszczelową budują staw piszczelowo-strzałkowy. Natomiast w skład stawu skokowego wchodzi kość strzałkowa, kość piszczelowa oraz kości stępu. Staw biodrowy i kolanowy są największymi stawami człowieka, mogą przenosić obciążenia kilkukrotnie większe niż masa człowieka, dlatego posiadają bardzo rozbudowany aparat więzadeł.



Rys. 2.1 Budowa anatomiczna kończyny dolnej [16].

Kończyna dolna, tak jak większość struktur w ciele człowieka, pod względem mechanicznym, stanowi otwarty układ kinematyczny. Dwa sąsiadujące ze sobą segmenty stanowią parę kinematyczną, ruch między nimi jest zapewniony dzięki ruchomości stawów. W obrębie kończyny dolnej możemy wyróżnić staw biodrowy, który wykazuje możliwość ruchów obrotowych względem trzech osi układów współrzędnych, staw kolanowy, który może się obracać wokół dwóch osi oraz staw skokowy i stawy stopy, które obracają się wokół jednej lub dwóch osi. Dwadzieścia trzy człony połączone przez dwadzieścia dwa połączenia stawowe dają ruchliwość kończyny równą trzydziści.





Rys. 2.2. Układ kinematyczny kończyny dolnej [3].

O prawidłowej budowie i ukształtowaniu kończyny dolnej świadczą ustawione pod odpowiednim kątem osie. Wzdłuż całej kończyny przebiega oś mechaniczna, zaczyna się w środku stawu biodrowego a kończy się w środku stawu kolanowego, prawidłowo powinna być odchylna o około  $3^{\circ}$  od osi pionowej. Oś anatomiczna uda przebiega przez środek geometryczny uda i jest odchylna od pionu o  $6^{\circ}$ . Oś anatomiczna podudzia pokrywa się z osią mechaniczną i przebiega od środka stawu kolanowego do środka stawu skokowego.

---

### 3. Chód i biomechanika chodu [3]

#### 3.1. Opis chodu

Chód to podstawowa forma lokomocji człowieka polegająca na przemieszczaniu całego ciała do przodu w pozycji pionowej za pomocą naprzemiennych ruchów kończyn dolnych. Mimo pozornej trywialności wykonania czynności chodu jest to jedna z bardziej złożonych czynności ruchowych człowieka. Spowodowane jest to dużą liczbą stopni swobody kończyn i redukcją liczby stopni swobody w obrębie tułowia. Dodatkowo, przez znaczny czas trwania chodu ciało podpira się tylko na jednej stopie, której styk z podłożem jest niewielki, czyli środek masy ciała rzutuje się poza obrys powierzchni stopy.

Ten sam cel co chód ma również bieg. W celu odróżnienia ich od siebie wprowadzono pewne kryterium. Chodem nazywamy taką formę poruszania się, gdy kontakt z podłożem w dowolnej chwili ma przynajmniej jedna stopa. Eliminuje to bieg w sposób naturalny, ze względu na to, że można zaobserwować w konkretnych momentach biegu chwile, w których żadna stopa nie dotyka podłoża.

Podstawowe parametry czasowo-przestrzenne opisujące chód to:

- Prędkość chodu – prędkość środka ciężkości przemieszczającego się człowieka, średnio to około 0,35-0,45 m/s,
- Długość kroku – odległość między dowolnym punktem stopy przylegającej do podłoża a tym samym punktem drugiej stopy, również w momencie kontaktu z podłożem, przeciętnie jest to 0,70-0,82 m,
- Częstotliwość stawiania kroków – liczba wykonanych kroków w danej jednostce czasu, wartość ta mieści się w przedziale 90-120 kroków/minutę.

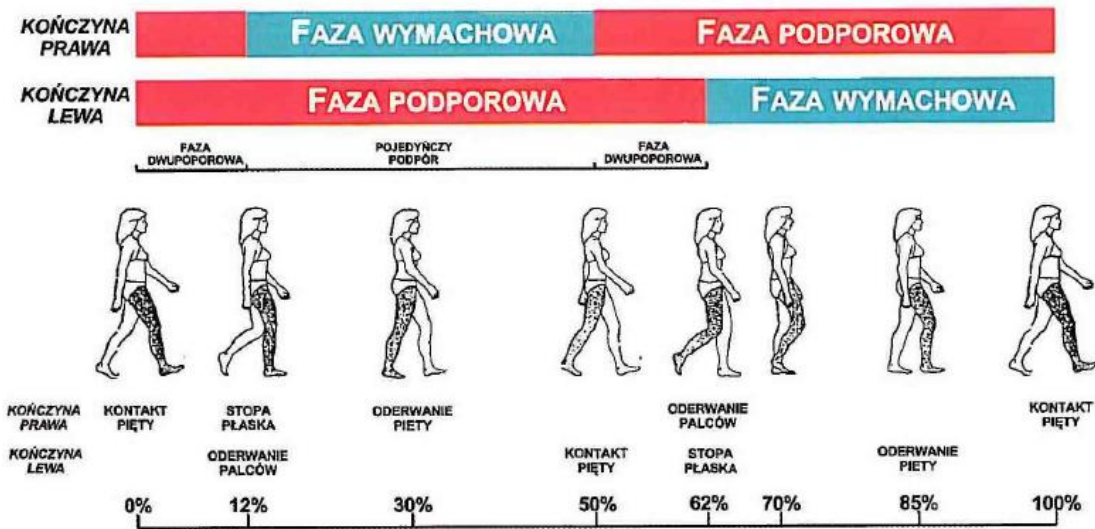
Należy zwrócić uwagę, że wpływ na podane parametry mają wiek, płeć, ogólna stan zdrowia, jak również podłoże, obuwie itp. Zwiększając długość kroku lub częstotliwość stawiania kroków zwiększamy prędkość chodu.

### 3.2. Fazy i determinanty chodu

Chód można opisać jako ruch cykliczny, to znaczy, że w pewnych odstępach czasu powtarzamy te same czynności. Pojedynczy cykl chodu, po którym następuje powtórzenie wszystkich ruchów zawiera w sobie dwa kroki. W trakcie trwania chodu wyznaczamy trzy podstawowe fazy:

- a) Faza podporu – rozpoczyna się w momencie zetknięcia pięty z podłożem, kończy się gdy paluch oderwie się od podłoża. Faza podporu stanowi około 60% całego cyklu chodu. Na fazę podporową składają się:
  - Faza przeciążenia – trwa od pierwszego kontaktu stopy z podłożem do momentu postawienia całej stopy na podłożu. Całkowicie pokrywa się z fazą dwupodporową.
  - Faza odciążenia – podczas trwania tej fazy stopa ma pełen kontakt z podłożem, kończy się wraz z oderwaniem pięty. Ciężar ciała spoczywa na jednej kończynie.
  - Faza propulsji (napędowa) – rozpoczyna się w momencie oderwania pięty od podłoża, kończy się wraz z oderwaniem palców od podłoża. Środek masy ciała zyskuje wtedy największą prędkość. W końcowym etapie tej fazy rozpoczyna się faza dwupodporowa.
- b) Faza wymachu – dla tej samej kończyny jest to faza odwrotna do fazy podporu. Początkiem fazy jest oderwanie palucha od podłoża, a końcem ponowny kontakt pięty z powierzchnią. Faza ta stanowi około 40% całego cyklu chodu.
  - Faza czynnego wymachu – trwa od oderwania palców stopy od podłoża. Staw kolanowy jest zgięty najbardziej w porównaniu do reszty chodu. Dużą pracę odgrywają mięśnie zginające stawu biodrowego. Część wolna kończyny przyspiesza ku górze i do przodu.
  - Faza biernego wymachu – nie uczestniczą w niej żadne mięśnie. Kończyna porusza się do przodu bezwładnie.
  - Faza hamowania – działają prostowniki stawu biodrowego i zginacze stawu kolanowego. Kończyna jest wyhamowywana w celu przystawienia stopy do podłoża.

c) Faza dwupodporowa – czas, w którym obie stopy stykają się z podłożem. Jest to charakterystyczna faza dla chodu. Faza ta występuje dwukrotnie – na początku i na końcu fazy podporu – i stanowi około 10% cyklu chodu.



Rys. 3.1. Fazy chodu [3].

Chód jako środek lokomocji służy nam do przemieszczania się do przodu. Żeby było to jak najefektywniejsze wydatek energetyczny organizmu na chód powinien być jak najmniejszy. Podczas chodu występują charakterystyczne ruchy – determinanty – których odpowiednie wykonanie zapewnia najlepszy stosunek wydatku energetycznego do pokonywanego dystansu. Wyznaczniki chodu bada się podczas ruchu po płaskiej powierzchni, pozwala to na bezbłędne odczytanie ruchów.

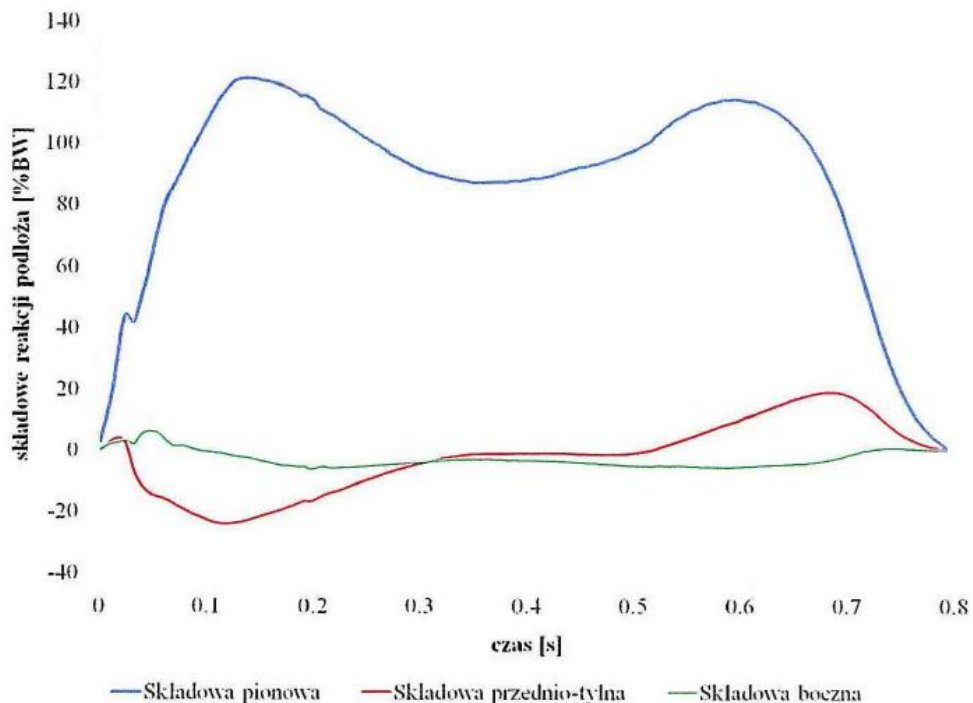
- Rotacja miednicy wokół osi długiej ciała – miednica porusza się naprzemiennie w lewo i prawo na skutek wysunięcia nogi wykroczonej do przodu, obrót pozwala również na wykonanie dłuższego kroku. Uzyskujemy obrót o około  $5^{\circ}$  podczas chodu o przeciętnej prędkości około 5 km/h.
- Przechylenie miednicy wokół osi strzałkowej – poprzez ustawienie się ukośnie, niżej w kierunku kończyny w fazie wymachu uzyskujemy bardziej płaską trajektorię ruchu środka masy. Staw biodrowy znajduje się wyżej w trakcie podparcia niż w trakcie przenoszenia nogi.
- Ruchy boczne miednicy w płaszczyźnie pionowej – przenoszenie ciężaru z kończyny prawej na lewą skutkuje charakterystycznym bujaniem się miednicy. Zauważalne jest przemieszczanie się miednicy w stronę kończyny podporowej.

- Zgięcie w stawie kolanowym w trakcie fazy podporowej – zgięcie w stawie kolanowym jest największe w fazie podporowej i wynosi około  $15-20^{\circ}$ , potem kolano prostuje się, a pod koniec znowu się zgina.
- Ruch w stawie kolanowym oraz ruch stopy i stawu skokowego – wraz z początkiem fazy podporowej stopa jest zgięta grzbietowo, następnie zgina się podeszwowo, aż do końca fazy dwupodporowej. Staw skokowy przechodzi łukiem ponad piętą. Pod koniec fazy podporowej, gdy kolano się zgina, kostka podnosi się i przemieszcza do przodu. Odpowiednia współpraca ruchów stopy i kolana pozwala uzyskać bardziej płaskie przemieszczanie się środka masy.

### 3.3. Reakcje podłoża podczas chodu

Podczas badania reakcji podłoża podczas fazy podporowej chodu można zauważyć ich charakterystyczny przebieg we wszystkich trzech składowych. Wyróżniamy:

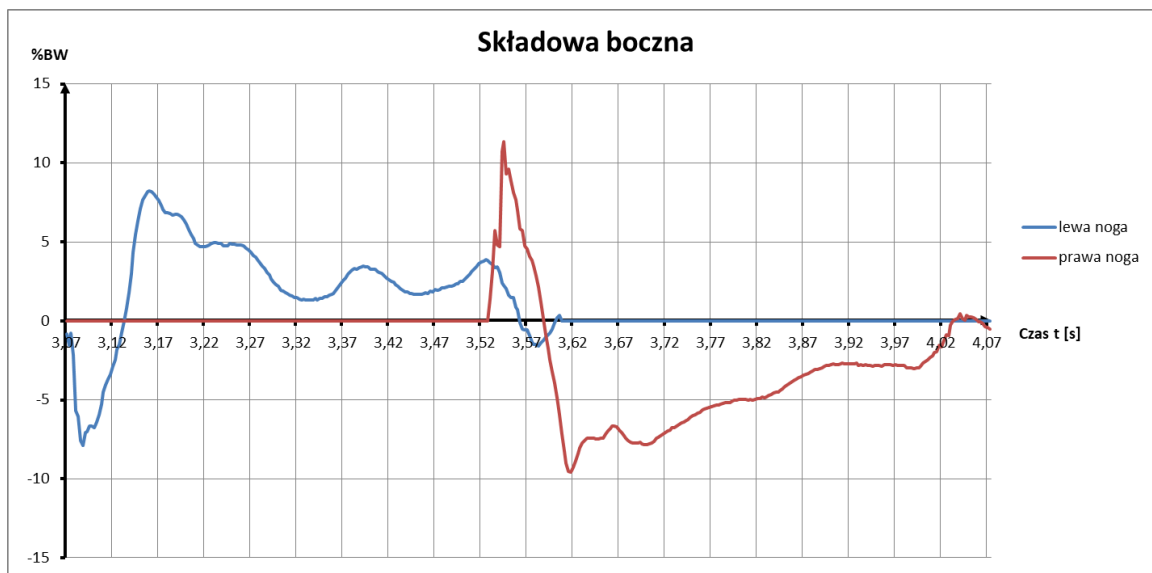
- Składową boczną,
- Składową przednio-tylną,
- Składową pionową.



Rys. 3.2. Wykres składowych reakcji podłoża podczas chodu [3].

Najczęściej przy opisywaniu wykresów składowych sił reakcji podłoża odnosimy wartości do procentu ciężaru badanej osoby - %BW (BW-body weight). Pozwala to na bezpośrednie porównanie badań różnych ludzi z różną dynamiką chodu.

Składowa boczna określa przemieszczanie się środka masy na boki. Jej pojawienie spowodowane jest stawianiem stopy na bok od linii wyznaczającej kierunek chodu.



Rys. 3.3. Przykładowy przebieg reakcji składowej bocznej.

Składowa przednio-tylna początkowe wartości ma ujemne, co oznacza, że zwrot tej składowej jest przeciwny do kierunku chodu, czyli następuje hamowanie. W drugiej części ma wartości dodatnie, czyli skierowana jest zgodnie z kierunkiem chodu, co oznacza, że napędza kończynę.



Rys. 3.4. Przykładowy przebieg reakcji składowej przednio-tylnej.

Składowa pionowa ma dwa wyraźne peaki związane z przyłożeniem stopy do podłoża i odbiciem stopy kończyny od podłoża. Szczyty te przewyższają ciężar badanej osoby zwykle o 15-25% w zależności od tego jak szybko badany idzie oraz od sposobu przyłożenia stopy do ziemi. Między maksimami następuje okres odciążenia spowodowany przenoszeniem drugiej kończyny, której przenoszona masa do przodu i do góry odciąża siłą bezwładności kończynę podporową. Najczęściej wartość tej składowej w fazie odciążenia wynosi około 80% ciężaru ciała.



Rys.3.5. Przykładowy przebieg reakcji składowej pionowej.

Badania do wyznaczenia sił reakcji podłoża podczas chodu prowadzone są na specjalnie zaprojektowanych stanowiskach. Takie możliwości daje technika BTS stosowana w Laboratorium Biomechaniki Politechniki Poznańskiej, w którym podczas zajęć z Biomechaniki inżynierskiej wykonałem pomiary, których wyniki są wyżej prezentowane. System BTS pozwala analizować odbyty ruch w kontekście analizy ruchu przyczepianych do osoby badanej specjalnych znaczników śledzonych przez sześć kamer lub też poprzez analizę nacisków specjalnych platform zamontowanych w podeście rejestrujących siły.

---

Pomiar ciężaru osoby badanej wykonuje się poprzez umieszczenie pacjenta na jednej platformie dynamometrycznej i zatrzymanie badanego w bezruchu przez kilka sekund. Sczytane uśrednione wartości pionowe reakcji platformy stanowią dokładny ciężar.

Pomiaru reakcji podłoża podczas chodu dokonuje się poprzez chód z jednostajną prędkością przez całą długość podestu ze szczególnym uwzględnieniem umieszczenia jednej ze stóp na jednej platformie i drugiej stopy na drugiej platformie w celu zmierzenia dokładnych wartości sił. W celu uzyskania średnich wartości i odrzucenia niedokładnych pomiarów wykonuje się kilka lub kilkanaście prób ze starannością, aby prędkości chodu były do siebie zbliżone. Wykresy sił składowych reakcji podłoża dla chodu szybkiego i wolnego bardzo się od siebie różnią.



## 4. Protezy kończyny dolnej [5, 11-13]

### 4.1. Rodzaje protez

Za protezy kończyn uznaje się sztuczne uzupełnienie brakującej części kończyny w celu przywróceniu kończynie jak największej sprawności. Czasami protezy zakłada się również w celu poprawy kondycji psychicznej chorego bez konieczności przejmowania przez nią jakichkolwiek funkcji.

Protezy kończyny dolnej można podzielić ze względu na stopień amputacji zaopatrywanej nogi. Wyróżniamy uzupełnienia protetyczne stopy, protezy podudzia, protezy uda i protezy całej kończyny.

Usunięcie palców stopy osłabia propulsję, lecz nie zaburza sprawności chodu, najczęściej nie wymaga zakładania protezy, a jedynie wykorzystuje się uzupełnienia obuwia specjalnymi wkładkami. W takiej sytuacji bardzo utrudnione staje się prowadzenie aktywnego trybu życia, występują problemy z bieganiem, skakaniem i szybkim chodzeniem. Aby wyjść naprzeciw oczekiwaniom osób zaopatrywanych stosuje się wzmacnianie podeszwy buta blachą jak również metalowy stabilizator pięty. Duże zaburzenia w chodzeniu sprawia amputacja palucha. Usunięcie kości śródstopia pozbawia stopę dwóch punktów podparcia w trakcie chodu. Bardzo pomocne w takich sytuacjach są uzupełnienia silikonowe obuwia.

Protezy podudzia wykonuje się na kilkunastocentymetrowy kikut poniżej kolana. Odległość ta zapewnia zarówno dobre ukrwienie oraz intuicyjne sterowanie protezą. Protezy goleni składają się z leja protetycznego, łącznika i stopy. Proces doboru protezy do kikuta jest dwuetapowy. Początkowo zakłada się protezę tymczasową w celu uregulowania wymiarów kikuta i dostosowaniu ergonomicznemu leja ostatecznego.

Protezy uda charakteryzują się większym poziomem skomplikowania w budowie. Spowodowane jest to koniecznością wprowadzenia do konstrukcji dwóch elementów ważnych dla statyki i lokomocji chorego, a mianowicie stopę i staw kolanowy. Ścisły kontakt leja protezowego z kikutem daje większą stabilność i kontrolę nad protezą. Przegub kolanowy musi być tak zbudowany, aby zapewniał stabilność w fazie podparcia i ułatwiał wykonanie kroku w fazie wymachu przy jak najmniejszym skracaniu długości kroku.

---

Protezy całej kończyny dolnej stosuje się po wyłuszczeniu w stawie biodrowym, amputacji podkłętarzowej lub amputacji przezmiedniczej. Nie mamy wtedy do czynienia z kikutem udowym. Stosuje się wtedy protezy kanadyjskie. W konstrukcji obecne są przeguby w stawie biodrowym i kolanowym. Stosowany jest mechanizm Puttiego polegający na przesunięciu osi stawu biodrowego do przodu, a osi stawu kolanowego do tyłu. Powoduje to zablokowanie przegubów protetycznych.

Wśród protez kończyny dolnej wyróżniamy:

a) Protezy skorupowe

Konstrukcja będąca obudową, odwzorowującą naturalny kształt nogi, do istniejącego kikuta kończyny, który jest wystarczająco sprawny by stanowić wewnętrzny szkielet protezy. Rozwiązanie to stosowane jest coraz rzadziej. Zaletami takiej konstrukcji są trwałość, proste mechanizmy sterowania, łatwość naprawy i niska cena. Wadami natomiast są długi okres wykonywania oraz fakt, że elementy mechaniczne nie współpracują ze stawami, co prowadzi do ich ciągłego przeciążania.



*Rys. 4.1. Proteza uda o budowie skorupowej [17].*

b) Protezy modularne

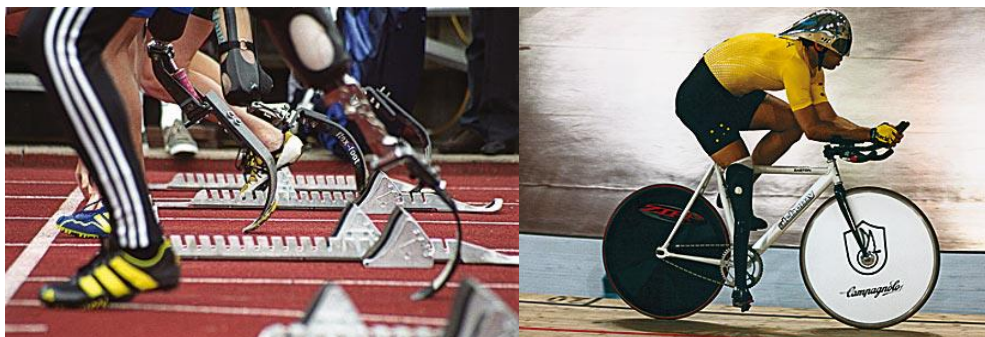
Konstrukcja mająca charakter modułarny, co znaczy, że każdy element jest traktowany jako moduł, który można wymienić na inny bez konieczności wymieniania całej protezy. Proteza modułarna ułatwia odpowiednie dopasowanie do pacjenta, którego anatomia zmienia się w czasie korzystania z protezy. Czynności wykonywane z użyciem tego zaopatrzenia są bardziej naturalne. Niestety koszt takiej protezy jest większy o około 20% w porównaniu do protezy skorupowej.



Rys. 4.2. Proteza uda o budowie modularnej [18].

#### 4.2. Protezy sportowe

Protezy sportowe różnią się od protez do codziennego użytku w wielu aspektach. Przede wszystkim są one dopasowywane do konkretnej dziedziny sportu, np. biegania, kolarstwa czy pchnięcia kulą.



Rys. 4.3. Przykładowe protezy w różnych dziedzinach sportu [19].

---

Projektowanie protezy sportowej wymaga więcej czasu ze względu na większą ilość czynników wpływających na parametry danej protezy. Przykładowo przy tworzeniu protezy do biegania bierze się pod uwagę ciężar zawodnika, jego wydolność mięśniową, poziom wytrenowania, dystans na jaki biegnie, styl biegu czy nawet kierunek skrętu biegni. Protezy biegaczy muszą być odpowiednio dopasowane do formy zawodnika. Kiedy jest odpowiednio wytrenowany jego mięśnie wywierają większy nacisk na protezę, przy ekstremalnych warunkach może ona pęknąć, jednocześnie biegacz musi uprawiać sport w ekstremalnych warunkach wytrzymałościowych by osiągać wyniki.

Dla biegaczy z amputacją na wysokości podudzia jest obecnie kilka produktów. Takie firmy jak Freedom Innovations, Ottobock czy Ossur mają w swojej ofercie produkty przeznaczone dla niepełnosprawnych sportowców. Wszystkie rozwiązania bazują na wykorzystaniu włókna węglowego jako materiału, odzyskiwaniu energii dostarczonej w celu mocniejszego wybiecia oraz odpowiedniej sztywności. Różnią się m.in. geometrią czy mocowaniem do leja.



Rys. 4.4. Przykładowe sportowe protezy podudzia (od lewej: Freedom Innovations Catapult, Ottobock Sprinter, Ossur Cheetah) [20, 21, 22]

### 4.3. Materiały na protezy

Bez względu na aplikację danego materiału w protezie, wszystkim materiałom stawia się kilka głównych wymagań. Są to:

- biogodność,
- mała masa,
- odporność na korozję,
- niska cena.

W dzisiejszej protetyce wykorzystuje się materiały z różnych grup materiałów inżynierskich. Różnicowanie materiałów jest spowodowane wieloma odmiennymi wymaganiami elementów protezy. Przeguby stawowe wykonywane są z metali, np. aluminium czy tytan. Leje protezowe formowane są z materiałów termoplastycznych. Na stopy protezowe stosuje się włókna węglowe.

Tytan – jest to materiał bardzo szeroko stosowany w protetyce. Swoją popularność zawdzięcza m.in. małej gęstości, odporności korozyjnej nawet w kontakcie ze słoną wodą lub chlorem, modułowi sprężystości zbliżonym do kości, nie wywoływaniu reakcji alergicznych, nie wykazywaniu własności ferromagnetycznych.

Aluminium – jest to materiał bardzo podatny na obróbkę cieplną. Wykazuje dobrą odporność korozyjną oraz dobry stosunek ciężaru właściwego do wytrzymałości.

Termoplasty – są to materiały termoplastyczne wykorzystywane do formowania lei protezowych. Szeroka gama tych materiałów oferuje różne właściwości wytrzymałościowe. Wykazują bardzo dobre dostosowywanie się do używanej formy.

Włókno węglowe – jest to kompozyt będący włóknem składającym się głównie z rozciągniętych struktur węglowych podobnych do grafitu. Są nietopliwe i odporne chemicznie. Włókna węglowe wyróżniają się małą gęstością, dużym modułem Younga, dużą wytrzymałością na rozciąganie, dobrze tłumią drgania. Ze względu na swoje dobre właściwości mechaniczne materiał ten jest drogi.

Włókno węglowe występuje jako tkanina w różnych splotach, które mają różne właściwości mechaniczne. Tkaniny jednokierunkowe zapewniają dużą wytrzymałość wzdłuż włókien i niewielką prostopadle do włókna. Splot „twill” – włókna przecinające

---

się pod kątem prostym zapewniają podobną wytrzymałość we wszystkich kierunkach. Splot „plain” – włókna ułożone pod różnymi kątami nie dają dużej rozciągliwości.

Na protezy sportowe do biegania wykorzystuje się tylko włókno węglowe. Dzięki temu proteza jest odpowiednio sprężysta i pozwala na osiągnięcie dobrych wyników sportowych. Odpowiednia sprężystość, czyli też magazynowanie i uwalnianie energii, ułatwia szybki ruch i częściowo zastępuje brak mięśni łydki oraz stopy.

## 5. Naprężenia i odkształcenia w ciele stałym [6-8]

### 5.1. Naprężenia i odkształcenia

Jeżeli na ciało działa pewne obciążenie mechaniczne, to ciało ulega odkształceniu. Powoduje to przemieszczenie się każdego punktu materialnego o pewną wartość, która zależna jest od parametrów działającego obciążenia i właściwości materiału, z którego zbudowany jest dany obiekt. Przy rozpatrywanym układzie odniesienia o współrzędnych  $x, y, z$  przemieszczenie jednostkowe oznaczamy kolejno jako  $u, v, w$ . Upraszczając myślowo fragment obiektu do prostopadłościanu, jego krawędzie oznaczmy jako  $dx, dy, dz$ . Wpływ zadanego obciążenia będzie wpływał na długość tych krawędzi i w ich odkształceniu. Można to zapisać następująco:

$$(1 + \varepsilon_x)dx, \quad (1 + \varepsilon_y)dy, \quad (1 + \varepsilon_z)dz \quad (5.1)$$

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  określają względne zmiany długości krawędzi. Jednakże przez działające obciążenie można wyznaczyć również odkształcenie kątowe opisywane współrzędnymi kątowymi określane jako  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ . Tensor odkształcenia prezentuje się następująco:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Aby zdefiniować naprężenia uproszczony myślowo fragment przecinamy płaszczyznami równoległymi do osi układu współrzędnych  $x, y, z$ . Naprężenia działające na obiekt dzielimy na naprężenia normalne  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  – prostopadłe do płaszczyzny przekroju i naprężenia styczne  $\tau_x, \tau_y, \tau_z$  – styczne do płaszczyzny przekroju. Tensor naprężeń prezentuje się następująco:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \frac{\tau_{xy}}{2} & \frac{\tau_{xz}}{2} \\ \frac{\tau_{yx}}{2} & \sigma_y & \frac{\tau_{yz}}{2} \\ \frac{\tau_{zx}}{2} & \frac{\tau_{zy}}{2} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Znając naprężenia główne działające na ciało możliwe jest określenie maksymalnego naprężenia zredukowanego dzięki hipotezie von Misesa, zgodnie z którą materiał plastyczny zaczyna ustępować w miejscu, w którym wartości naprężeń zredukowanych stają się równe lub przekraczają granice naprężenia. Za tę granicę uznaje się granicę plastyczności materiału. Naprężenia zredukowane wg von Misesa opisane są zależnością:

$$\sigma_{red} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (5.4)$$

## 5.2. Prawo Hooke'a

Prawo Hooke'a jest jednym z podstawowych praw mechaniki. Opisuje zależność między odkształceniem ciała a naprężeniem działającym na ciało, które spowodowało odkształcenie. Reguła ta głosi, że odkształcenie jakiemu ulega ciało jest wprost proporcjonalne do działającej na nie siły. Współczynnik między tymi wielkościami jest stały i charakteryzuje materiał, z którego ciało jest zbudowane. Nazywamy go modułem sprężystości bądź modułem Younga. Zapis prawa Hooke'a w przypadku zagadnień jednowymiarowych:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (5.5)$$

Prawo Hooke'a pozostaje prawdziwe tylko dla niewielkich odkształceń, poniżej granicy proporcjonalności.

Materiały inżynierskie liniowo sprężyste mają w określonych warunkach stałe wartości modułu Younga  $E$  i współczynnika Poissona  $\nu$ . Zakładając, że ciało jest izotropowe, czyli jego właściwości nie zmieniają się wraz ze zmianą kierunku w jakim są mierzone, jak również przyjmując, że działają na nie składowe naprężenia normalnych  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ , to możemy wyznaczyć odpowiadające naprężeniom składowe odkształceń  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \quad (5.6)$$



Odształcenia normalne nie są zależne od naprężeń ścinających, te powodują powstanie odkształceń ścinających, kątowych  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ , zależnych również od modułu Kirchhoffa  $G$ , czyli współczynnika sprężystości poprzecznej:

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \\ G &= \frac{E}{2(1 + \nu)}\end{aligned}\tag{5.7}$$

### 5.3. Związek konstytutywny

Związki konstytutywne to matematyczne modele rzeczywistego materiału opisujące zależności między naprężeniami i odkształceniami opisane tensorami. Uogólnione prawo Hooke'a dla trójosiowego stanu naprężeń materiału liniowo sprężystego opisuje zależność:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad i, j = 1 \text{ do } 3,\tag{5.8}$$

gdzie  $C_{ijkl}$  to tensor konstytutywny (tensor sztywności) zawierający 81 stałych materiałowych. Przyjmując, że tensory naprężeń i odkształceń są symetryczne, liczbę stałych zmniejszymy do 36, wtedy wzór przyjmuje postać:

$$\sigma_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^6 C_{\alpha\beta} \varepsilon_{\beta}, \quad \alpha, \beta = 1 \text{ do } 6\tag{5.9}$$

A w postaci macierzowej:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.10)$$

W pełnej formie wzór 5.10 możemy zapisać w postaci:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

Definiujemy również macierz  $\mathbf{D}$  – macierz podatności, która jest macierzą odwrotną do  $\mathbf{C}$ , zależność tą opisujemy:

$$\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1} \quad (5.12)$$

Dzięki macierzy  $\mathbf{D}$  możemy zapisać zależność:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma} \quad (5.13)$$

Tensor odkształceń ma postać:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T), \quad (5.14)$$

gdzie  $\mathbf{u}$  – wektor przemieszczenia.

Prawo Hooke'a z uwzględnieniem modułu Younga i współczynnika Poissona w postaci macierzowej przyjmuje postać:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (5.15)$$

Odwrotna relacja zapisana jest następująco:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$

#### 5.4. Równanie Naviera

Podstawowe równanie ruchu materiału liniowo sprężystego zapisujemy:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}, \quad (5.17)$$

gdzie  $\rho$  – gęstość,  $\mathbf{u}=[u_1, u_2, u_3]$  – wektor przemieszczenia,  $\mathbf{F}$  – siła masowa.

Dla trójosiowego stanu naprężenia możemy zapisać:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial \delta_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= F_x \\ \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \delta_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= F_y \\ \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial \delta_z}{\partial z} &= F_z \end{aligned} \quad (5.18)$$

---

Prawo Hooke'a dla materiałów izotropowych:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\delta_{ij}, \quad (5.19)$$

gdzie  $\delta_{ij}$  – delta Kroneckera,  $\mu, \lambda$  – stałe Lamego

$$\begin{aligned} \mu &= G = \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \lambda &= \frac{E \cdot \nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Końcowo równanie Naviera przyjmuje postać:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - (\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})) = \mathbf{0} \quad (5.21)$$

## 5.5. Tłumienie

Tłumienie (damping) drgań to zdolność materiału, z którego jest zbudowane ciało do rozpraszania lub pochłaniania i zamieniania w energię cieplną naprężeń działających na układ. Tłumienie może być materiałowe, konstrukcyjne lub zewnętrzne. Tłumienie materiałowe dotyczy mechanizmów zachodzących w materiale związanych z wewnętrzną strukturą ciała. Tłumienie konstrukcyjne zależy m.in. od tarcia na łącznikach czy tarcia w połączeniach ruchomych. Na tłumienie zewnętrzne wpływ mają czynniki zewnętrzne takie jak kontakt z podłożem czy tarcie.

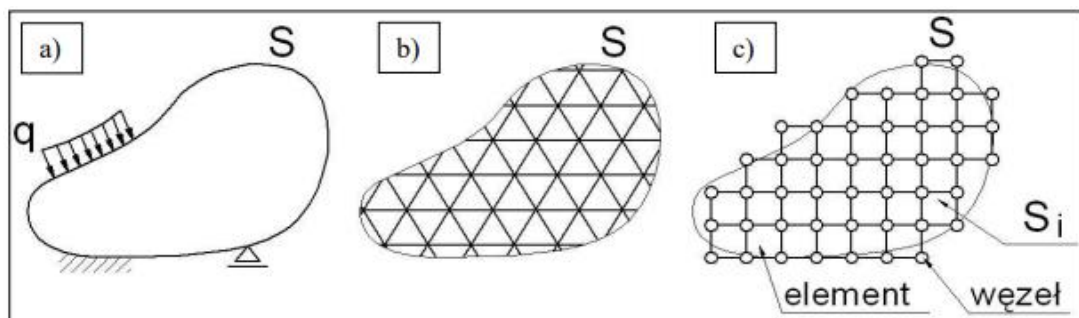
Współczynnik strat (isotropic loss factor) lub określony współczynnik tłumienia (specific damping factor) –  $\eta_s$  - definiuje się jako energię rozproszoną na radian do maksymalnej energii potencjalnej w cyklu. Gdy bierzemy pod uwagę tłumienie tensor  $\mathbf{C}$  przyjmuje nową wartość wyznaczaną z zależności:

$$\mathbf{C}_s = \mathbf{C}(1 + j\eta_s), \quad (5.22)$$

gdzie  $\mathbf{C}_s$  – tensor sztywności z uwzględnieniem tłumienia,  $\mathbf{C}$  – pierwotny tensor sztywności,  $j$  – jednostka urojona,  $\eta_s$  – izotropowy współczynnik tłumienia (ang. isotropic loss factor).

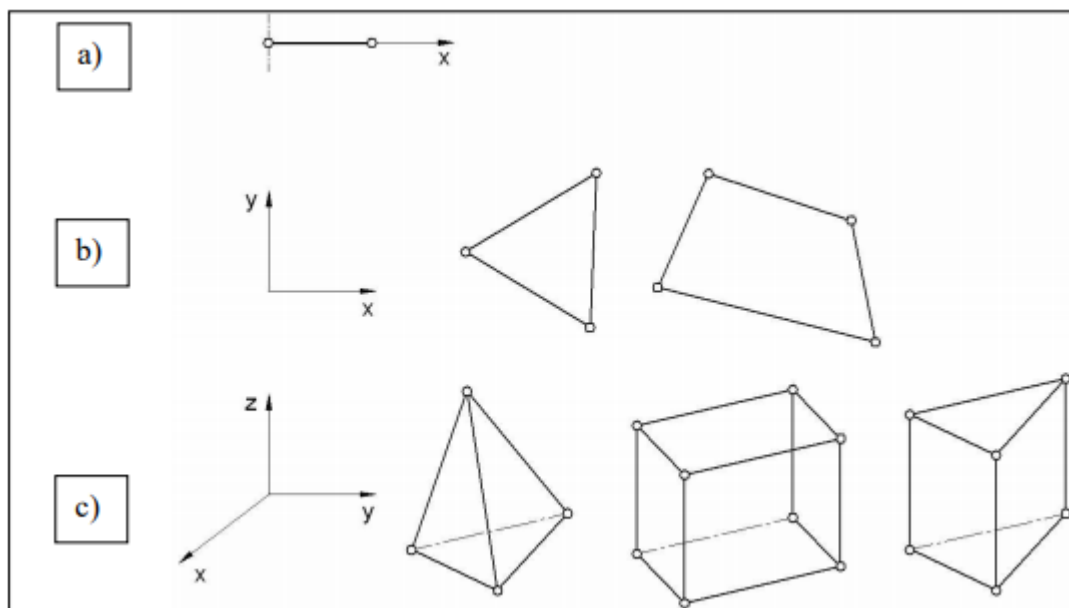
## 6. Metoda Elementów Skończonych [9, 10, 14]

Metoda elementów skończonych (MES, ang. FEM – finite-element method) to rozwiązanie inżynierskie pozwalające na prostsze i szybsze projektowanie konstrukcji oraz jej analizowanie. Jest to metoda komputerowa przeprowadzania złożonych i dokładnych obliczeń i rozwiązywania układów równań różniczkowych. Podczas używania tradycyjnych metod obliczeniowych obiekt traktujemy jako model ciągły, w metodzie elementów skończonych konstrukcja analizowana jest jako pewna skończona liczba predefiniowanych elementów dyskretnych. Proces dzielenia nazywamy dyskretyzacją. Rozwiązywanie takiego układu polega na przeprowadzeniu obliczeń tylko dla węzłów tych elementów, czyli miejsc połączenia poszczególnych elementów.



Rys. 6.1. Przebieg dyskretyzacji [14].

Geometria podstawowych modeli elementów skończonych jest zróżnicowana. Mogą to być elementy 1-wymiarowe (belki), 2-wymiarowe (trójkąty, wieloboki) i 3-wymiarowe (bryły czteroboczne i wieloboczne). Podczas tworzenia siatki na modelu często występują różnice w wielkości i zagęszczeniu elementów. Dzięki temu otrzymamy więcej dokładnych danych w miejscach, gdzie występuje charakterystyczna zmiana geometrii modelu lub następuje spiętrzenie naprężeń.



Rys. 6.2. Podstawowe modele elementów skończonych [14].

Po przeprowadzeniu dyskretyzacji należy ustalić wartości początkowe, brzegowe, takie jak obciążenia, utwierdzenia, temperatury, szybkości przepływów. Należy również sprecyzować rodzaj materiału naszego modelu oraz wskazać szukane wielkości oraz ich zależność od danych wejściowych. Następnie następuje związanie niewiadomych z wartościami danymi we wszystkich węzłach modelu i rozwiązanie układu.

Metoda elementów skończonych zdecydowanie ułatwia wykonywanie skomplikowanych obliczeń inżynierskich. Usprawnia proces projektowania i szybkiego wykluczania słabych elementów konstrukcji bez konieczności tworzenia modeli i prototypów oraz tradycyjnego analizowania. Powoduje to, że projektowanie jest szybsze oraz tańsze. Ograniczenia metod komputerowych leżą w ich naturze software'owej i hardware'owej. Przy zadaniu skomplikowanego kształtu, niejednorodności materiału, wielu obciążeń i zależności oraz wygenerowaniu gęstej siatki elementów skończonych, obliczenia mogą trwać przez wielkie godzin a nawet dni.

## 7. Modele i metody badań

### 7.1. Opis modelu

Stworzony model sportowej protezy do biegania powstał na podstawie europejskiego patentu firmy Ossur o nr EP 2 065 018 B1 [15]. Wybrany został największy rozmiar, który dobierany jest na podstawie wzrostu potencjalnego pacjenta.

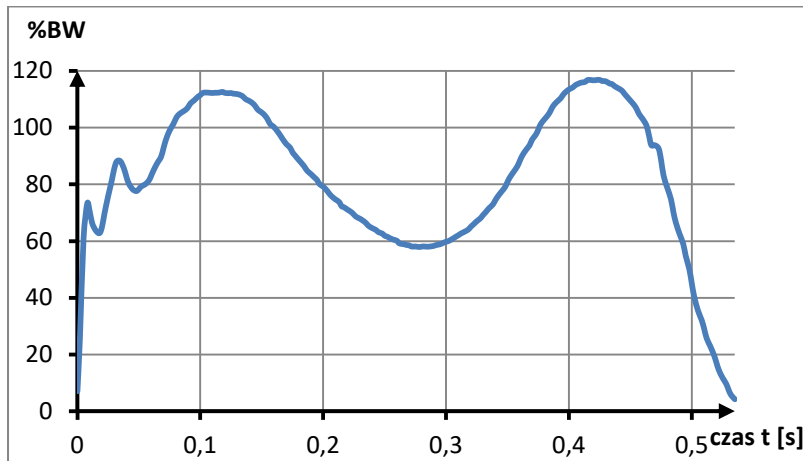
Ze względu na posiadany przebieg reakcji podłoża podczas chodu stworzony podczas zajęć laboratoryjnych z przedmiotu Biomechanika Inżynierska został on odpowiednio uproszczony do celów symulacyjnych.

Ciężar osoby badanej wynosił 804,6151 N, prędkość chodu to 1,454 m/s, częstotliwość próbkowania równała się 400 Hz.



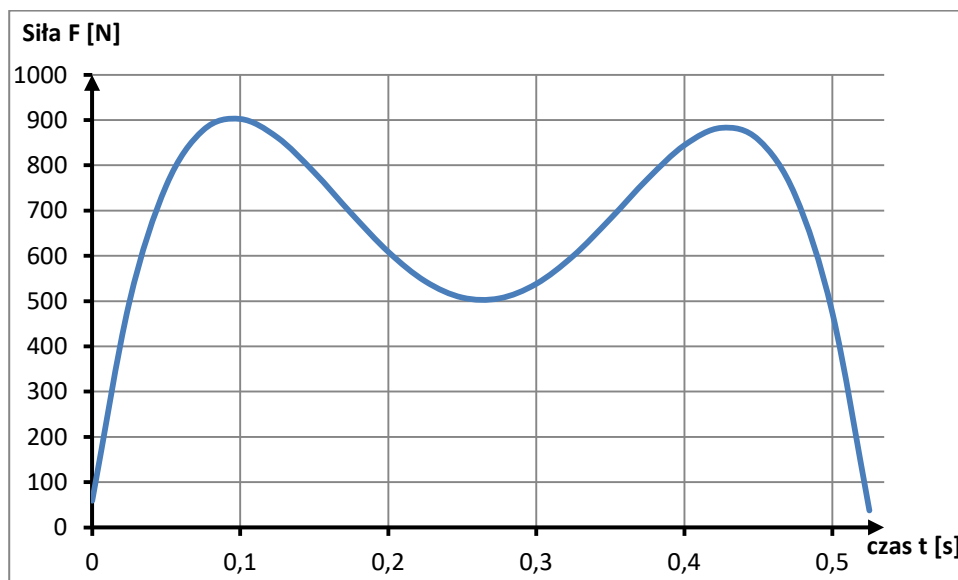
Rys. 7.1. Przykładowy przebieg reakcji składowej pionowej.

Przebieg reakcji pionowej podłoża w trakcie jednego kroku przed uproszczeniem prezentował się następująco (czas trwania jednego kroku wyniósł 0,535s):



Rys. 7.2. Przebieg reakcji pionowej podłoża w trakcie jednego kroku.

Dla ułatwienia przeprowadzenia symulacji zastosowano uproszczenie tego przebiegu wybierając co dziesiąty rekord oraz wyznaczając argumenty wielomiany obrazującego powyższy wykres. Ze względu na jednomiejscowe podparcie protezy o podłoże podczas chodu zrezygnowano z podziału przebiegu na część tylną i przednią, gdyż funkcje te przejmują jedno miejsce podparcia.



Rys. 7.3. Uproszczony przebieg reakcji pionowej podłoża w trakcie jednego kroku.



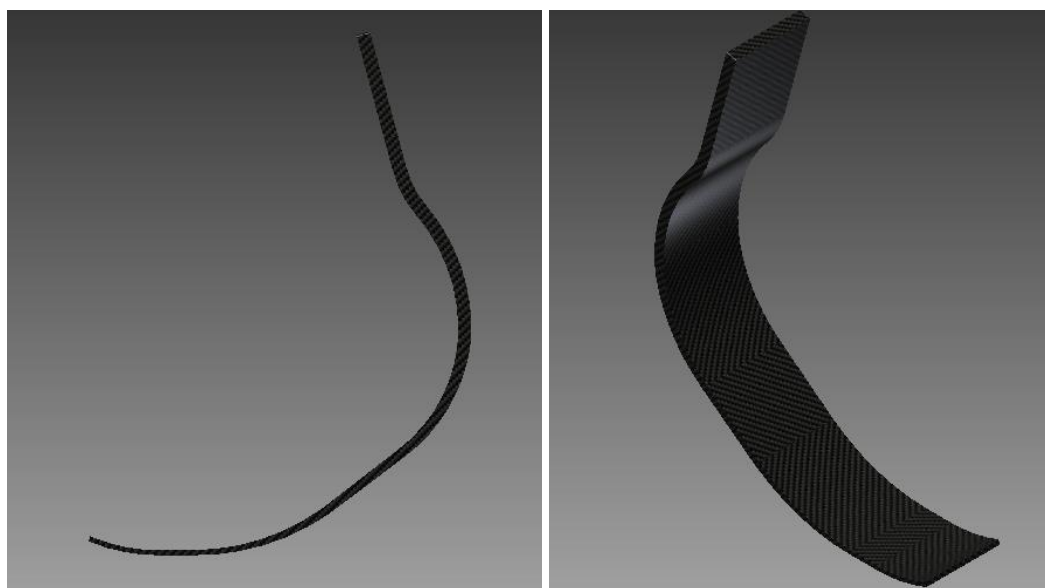
Materiał przypisany do modelu to włókno węglowe, zgodnie z obecnie panującymi standardami przy tworzeniu protez sportowych.

Współczynnik Poissona $\nu$	0.394
Moduł Younga E	242 GPa
Gęstość $\rho$	1.81 kg*m <sup>-3</sup>
Isotropic loss factor $\eta_s$	0,0024

Tab. 7.1. Zestawienie właściwości mechanicznych włókna węglowego.

## 7.2. Wirtualny model i stosowane oprogramowanie

Wirtualny model protezy, wzorowany na patencie firmy Ossur, został zaprojektowany w programie Autodesk Inventor. Jest to narzędzie CAD do projektowania brył w trzech wymiarach. Oprogramowanie umożliwia stworzenie rysunków wykonawczych i złożeniowych. Program posiada trzy główne moduły pracy, każde z nich ma swoje specyficzne formaty plików: moduł części z formatem .ipt, moduł złożzeń z formatem .iam oraz moduł tworzenia dokumentacji .idw. Środowisko Inventor obsługuje również formaty bardziej uniwersalne takiej jak .dwg czy .dxf. Program posiada bogate biblioteki oraz intuicyjny interfejs. Jego dużą zaletą jest bezpłatna dostępność na czas trzech lat dla studentów szkół wyższych.



Rys. 7.4. Widoki modelu.



Rys. 7.5. Widoku modelu.

Wszelkie symulacje opisane w następnym rozdziale przeprowadzone były w programie Comsol Multiphysics. Stosowany jest do wykonywania skomplikowanych obliczeń inżynierskich w jednym, dwóch lub trzech wymiarach. Możliwe jest również proste projektowanie struktur poprzez tworzenie podstawowych brył. Program posiada dużą liczbę modułów umożliwiających pracę w różnych dziedzinach nauki, np. mechanika, elektromagnetyzm, mechanika płynów. W pracy wykorzystano moduł „*Structural Mechanics*”, w którym wykonano analizę naprężeniowo-odkształceniową zmienną w czasie oraz częstotliwościową.

## 8. Modelowanie i symulacja

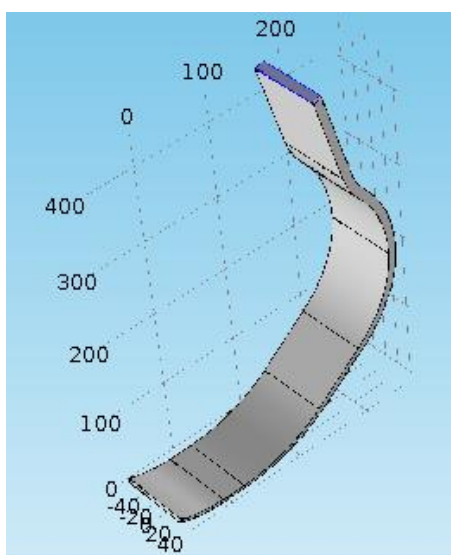
### 8.1. Założenie symulacji

W programie Comsol Multiphysics. można znaleźć bardzo bogatą bazę materiałów. Materiał należy zdefiniować dla całej konstrukcji na początku przygotowania analizy. Wykonuje się to na drzewku zadań w zakładce Component, w podpunkcie Materials. Możliwe jest zdefiniowanie różnych materiałów dla różnych części modelu, w przedstawionym przypadku cała proteza wykonana jest z jednakowego materiału – włókna węglowego, którego włókna ułożone są wzdłużnie. Ze względu na niekompletność wszystkich niezbędnych danych, zdefiniowano potrzebne wielkości materiału, tj. moduł Younga, liczbę Poissona oraz gęstość.

Property	Variable	Expression	Unit	Size
Young's modulus	E	$242 \cdot 10^9$	Pa	1x1
Poisson's ratio	nu	0.394	1	1x1
Density	rho	1.81	kg/m <sup>3</sup>	1x1

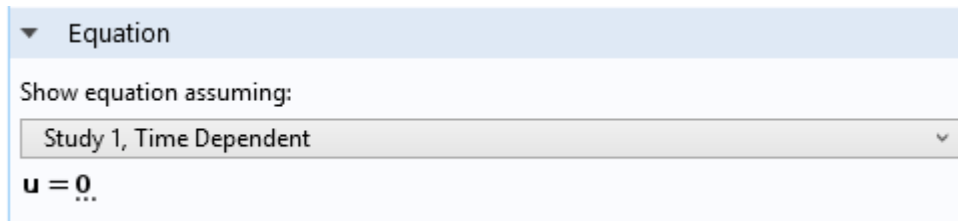
Rys. 8.1. Zdefiniowane wartości właściwości mechanicznych włókna węglowego.

Kolejnym etapem jest utwierdzenie modelu. Dla przyjętego modelu za punkt utwierdzenia wybrano miejsce połączenia protezy z lejem, co oznacza, że miejsce to jest nieruchome. W programie Comsol Multiphysics. unieruchomienie wykonuje się wybierając na drzewku zadań „Solid Mechanics”, zakładkę „Fixed Constraint”.



Rys. 8.2. Miejsce utwierdzenia.

Dla utwierdzenia wektor przemieszczenia  $u$  jest wektorem zerowym, co potwierdza nam program wyświetlając równanie ruchu dla tej płaszczyzny.



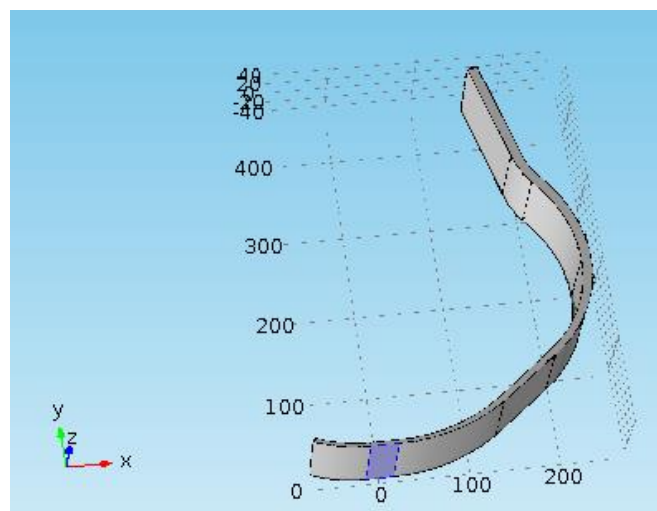
Rys. 8.3. Równanie ruchu dla płaszczyzny utwierdzenia.

Następnym etapem jest określenie występujących obciążeń. Ze względu na obciążenie zmienne w czasie konieczne jest zdefiniowanie parametru czasu w zakładce „Global Definitions”.

▶▶ Name	Expression	Value	Description
t	1[s]	1 s	

Rys. 8.4. Określenie parametru czas.

Nałożenie obciążenia wymaga określenia miejsca przyłożenia obciążenia oraz jego wartości. W programie Comsol Multiphysics wykonuje się to w zakładce „Boundary Load”. Możliwe jest scharakteryzowanie typu obciążenia. Do wyboru mamy opis jako siłę, siłę na jednostkę powierzchni lub wartość wywieranego ciśnienia. Lokalizacja występowania siły została zdefiniowana jako spód protezy, czyli miejsce kontaktu z podłożem. W ten sposób symulujemy nacisk podłoża na model przy jego unieruchomieniu w miejscu kontaktu z ciałem pacjenta.



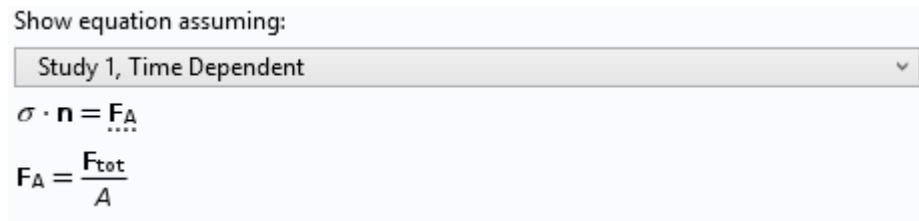
Rys. 8.5. Miejsce przyłożenia obciążenia.

Obciążenie jest skierowane ku górze, wzdłuż osi Y i określone równaniem wyznaczonym na podstawie badań opisanych w rozdziale 7, które prezentuje się następująco:

$$\left( \left( -62474 * \left( t * \left[ \frac{1}{s} \right] \right)^4 + 65654 * \left( t * \left[ \frac{1}{s} \right] \right)^3 - 22388 * \left( t * \left[ \frac{1}{s} \right] \right)^2 + 2692,9 * \left( t * \left[ \frac{1}{s} \right] \right) + 7,3306 \right) * 8,046151 \right) [\text{N}] \quad (7.1)$$

Dodanie mnożnika  $\left[ \frac{1}{s} \right]$  po każdym t było konieczne i zastosowano je w celu wyrugowania jednostki czasu, dzięki temu równanie końcowe obciążenia zdefiniowane jest w jednostce siły.

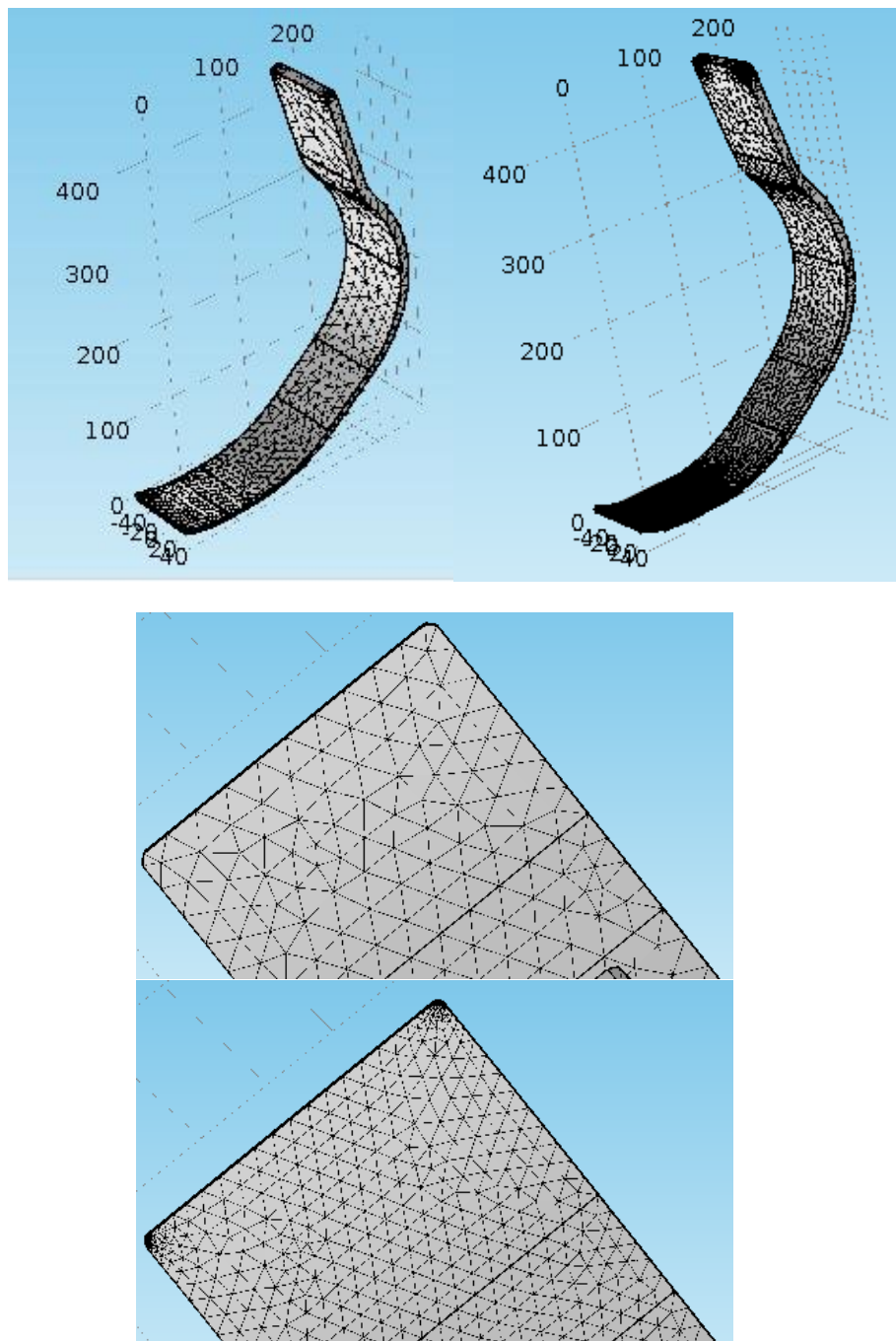
Żeby móc wyliczyć naprężenia występujące w modelu program przedstawił równania, z których wyznaczy niewiadome. Występujące w równaniu symbole oznaczają:  $\sigma$  – składowa normalna naprężenia,  $\mathbf{n}$  – wektor normalny do płaszczyzny powierzchni, na którą działa siła (wyznaczony automatycznie po zdefiniowaniu lokalizacji obciążenia),  $\mathbf{F}_A$  – wypadkowy wektor naprężenia,  $\mathbf{F}_{\text{tot}}$  – wektor sił wewnętrznych (obciążenie zadane), A – pole przekroju.



Rys. 8.6. Równania wygenerowane przez program do obliczenia naprężeń.

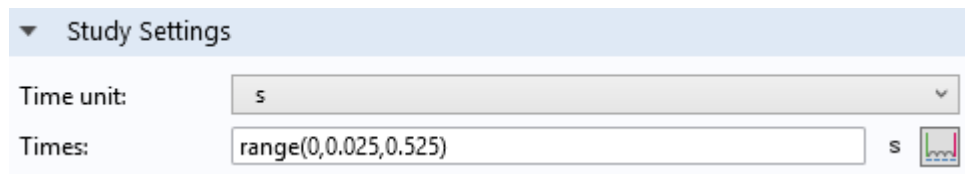
Jednym z ostatnich kroków przed rozpoczęciem symulacji jest nałożenie na model siatki elementów skończonych, do których program wykona obliczenia równań różniczkowych. Siatka może być bardziej lub mniej gęsta. Im gęstsza siatka tym otrzymane wyniki będą bardziej dokładne, jednocześnie znacznie wydłuży się czas symulacji. W programie Comsol Multiphysics siatkę generuje się w zakładce „Mesh”. Możliwe jest wygenerowanie siatki o 9 różnych stopniach zagęszczenia – od „Extremely Coarse”, czyli bardzo rzadkiej do „Extremely Fine”, czyli bardzo gęstej. Dla analizowanego modelu wygenerowano dwie siatki, w celu porównania wyników. Dla pierwszej siatki o stopniu zagęszczenia „Normal”, dla której program wygenerował

2 591 elementów, dla drugiej o zagęszczeniu „*Extra Fine*” otrzymano 15 865 elementów.



Rys. 8.7. Porównanie wygenerowanych siatek (lewa – „*Normal*”, prawa – „*Extra Fine*”).

Ostatnim etapem przygotowania do symulacji obciążenia zmiennego w czasie jest ustalenie parametrów czasowych. Ze względu na czas fazy podporowej symulowanego chodu wynoszącą 525 ms symulację przeprowadzono w zakresie od 0 s do 0,525 s z krokiem czasowym 0,025 s.

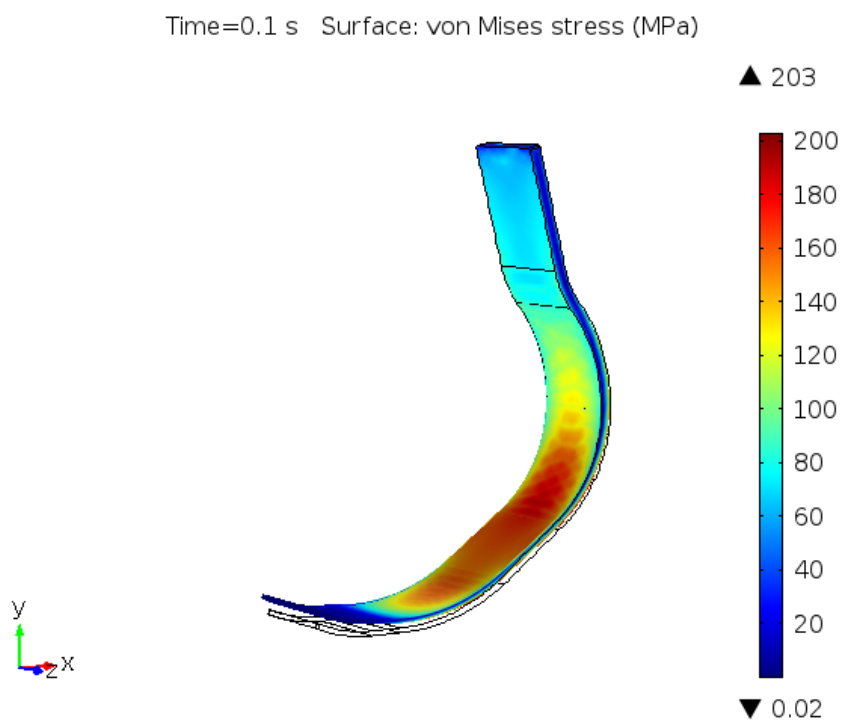


*Rys. 8.8. Zdefiniowane parametry czasowe symulacji.*

## 8.2. Symulacja naprężeniowa i odkształceniowa w trakcie chodu

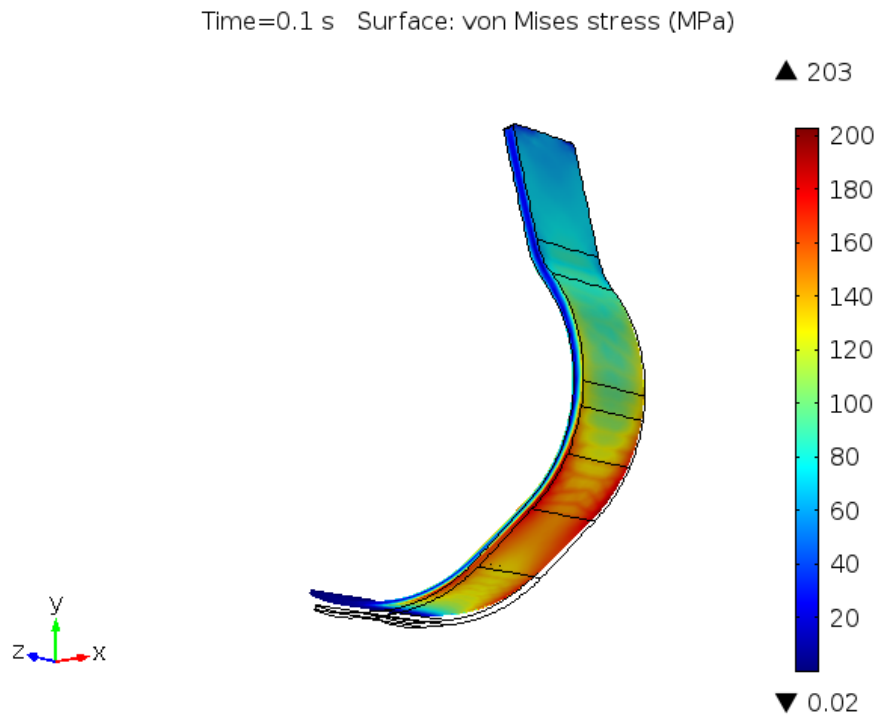
Największe zarejestrowane naprężenia w trakcie symulacji z siatką elementów skończonych o rozmiarze „Normal” wyniosły 203 MPa i zostały zarejestrowane w 0,1 s. Miejscem występowania maksimum jest odcinek między punktem podparcia protezy a największy wygięciem protezy w kierunku tylnym. Zarejestrowane naprężenie jest dalekie od granicy wytrzymałości włókna węglowego, która wynosi 2,5 GPa. Należy jednak zwrócić uwagę, że symulowano szybki chód, a nie bieg, w którym występują większe obciążenia.

Podczas drugiego peaku, który wystąpił w 0,425 s obciążenia maksymalne naprężenie wyniosło 202 MPa. Jest to wartość bardzo podobna do poprzedniej i nie zagraża konstrukcji. Miejsce występowania spiętrzenia naprężeń jest identyczne.

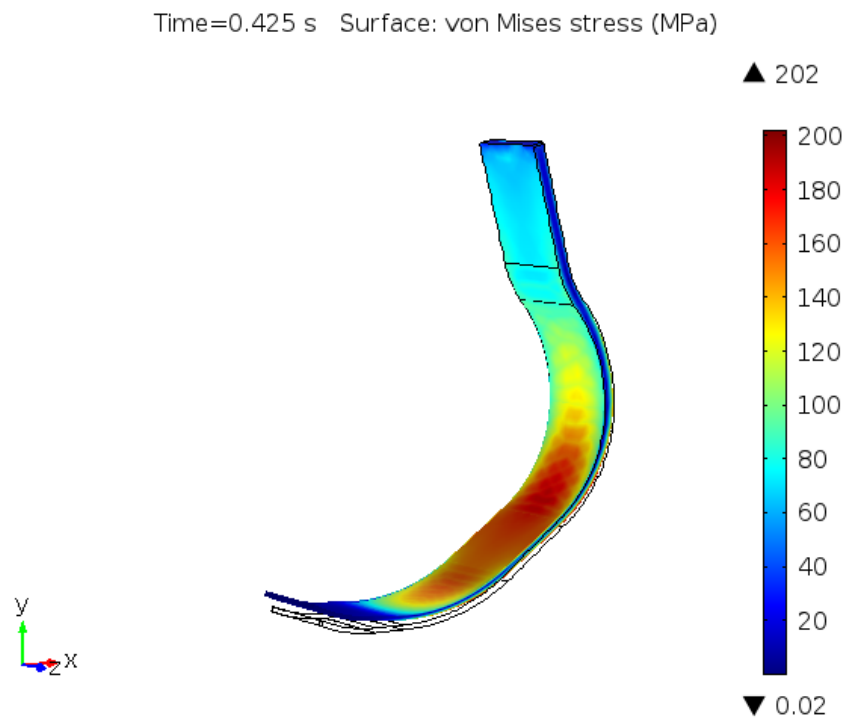


Rys. 8.9. Naprężenia w modelu w 0,1 s dla siatki „Normal” - widok z przodu.

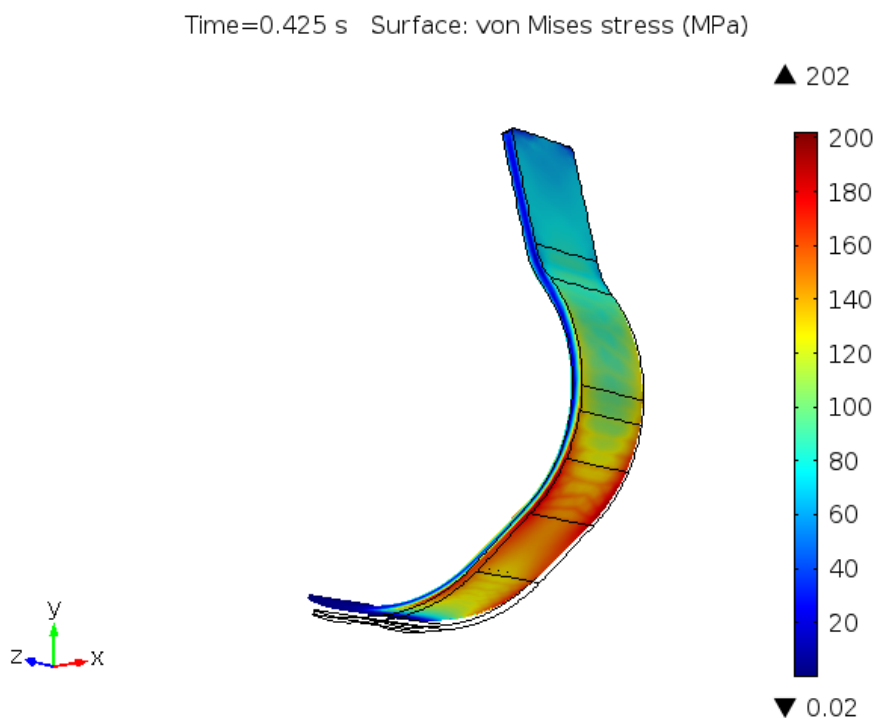




Rys. 8.10. Naprężenia w modelu w 0,1 s dla siatki „Normal” – widok z tyłu.



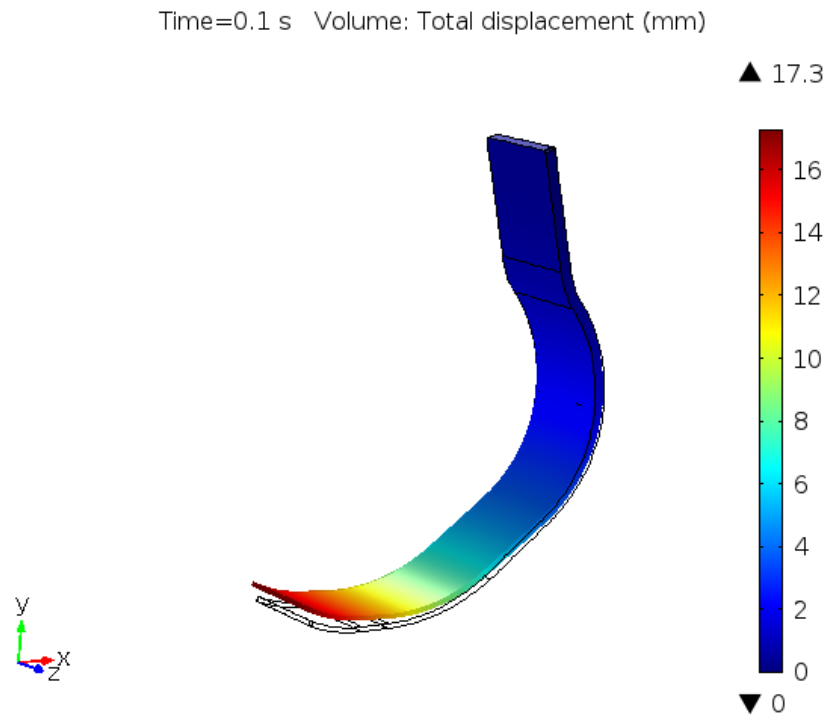
Rys. 8.11. Naprężenia w modelu w 0,425 s dla siatki „Normal” – widok z przodu.



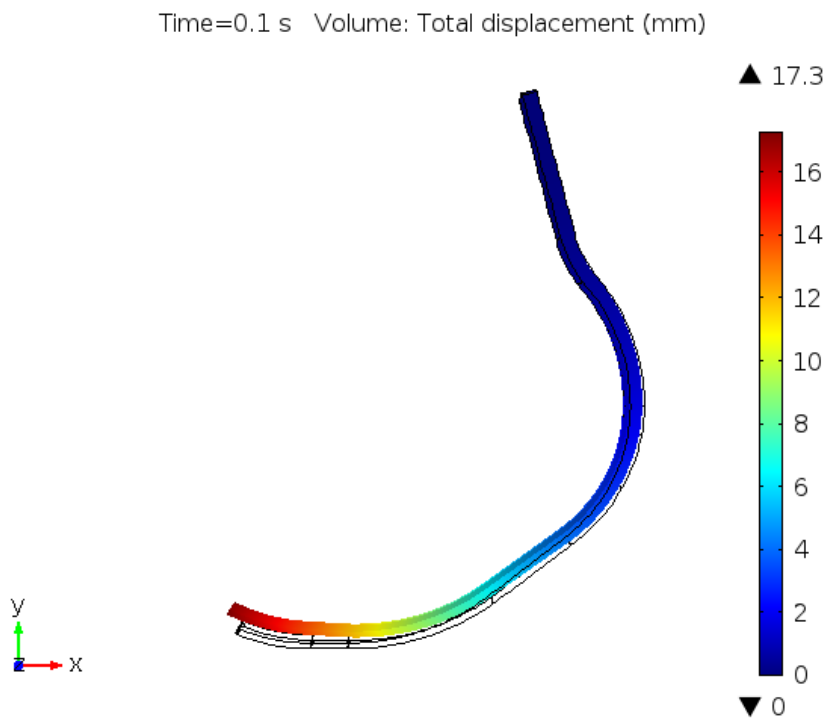
Rys. 8.12. Naprężenia w modelu w 0,425 s dla siatki „Normal” – widok z tyłu.

Można zauważyć, że naprężenia w okolicy łączenia z lejem są znikome, spiętrzają się one w części roboczej, która ma przenosić największe obciążenia.

Maksymalne przemieszczenie zarejestrowano w 0,1 s symulacji i wynosi ono 17,3 mm. Miejscem występowania przemieszczenia jest okolica kontaktu protezy z podłożem. Wraz z analizą w górę protezy widać szybki zanik przemieszczeń i zerową wartość przemieszczeń w miejscu łączenia protezy z lejem.



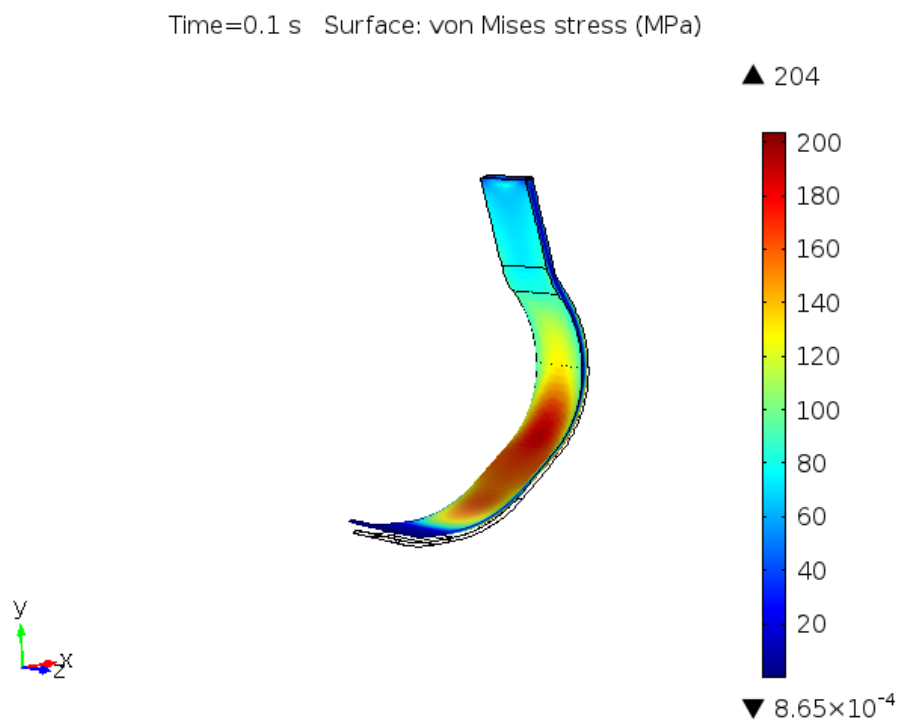
Rys. 8.13. Przemieszczenia w modelu w 0,1 s dla siatki „Normal” – widok z przodu.



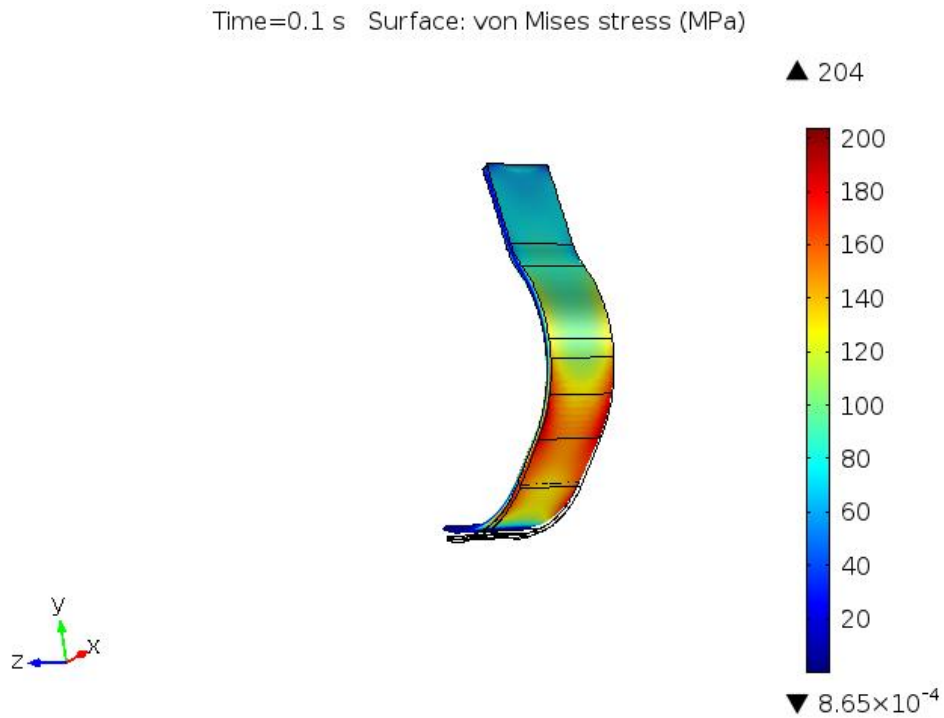
Rys. 8.14. Przemieszczenia w modelu w 0,1 s dla siatki „Normal” – widok z boku.

Kolejnym krokiem było przeprowadzenie identycznej symulacji dla siatki elementów skończonych o zagęszczeniu „*Extra Fine*”. Największe zaobserwowane naprężenia również przypadły na 0,1 s symulacji. Lokalizacja spiętrzenia naprężeń nie zmieniła się, wartość jest nieznacznie większa i wynosi 204 MPa.

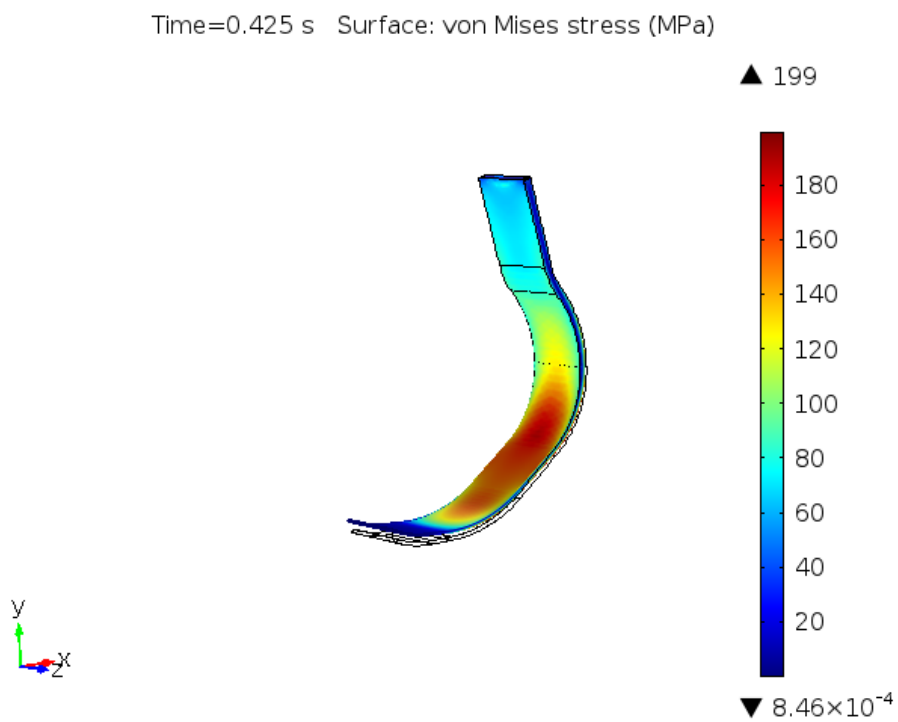
Drugie spiętrzenie następuje w 0,425 s symulacji. Umieszczenie znowu jest identyczne, jednakże wartość jest mniejsza niż dla poprzedniej symulacji i wynosi 199 MPa.



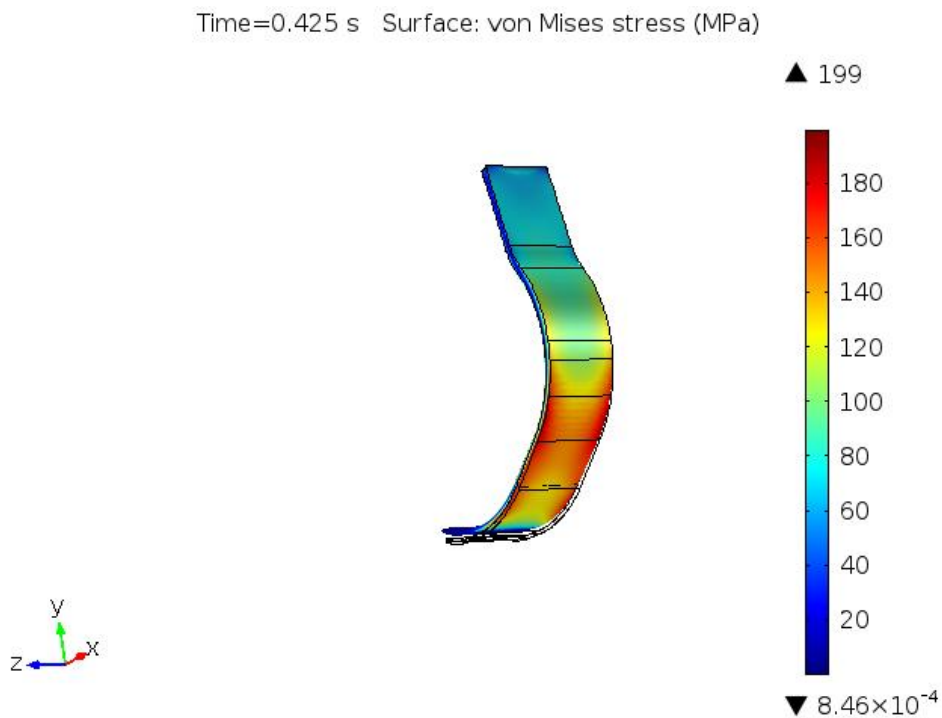
Rys. 8.15. Naprężenia w modelu w 0,1 s dla siatki „*Extra Fine*” - widok z przodu.



Rys. 8.16. Naprężenia w modelu w 0,1 s dla siatki „Extra Fine” - widok z tyłu.

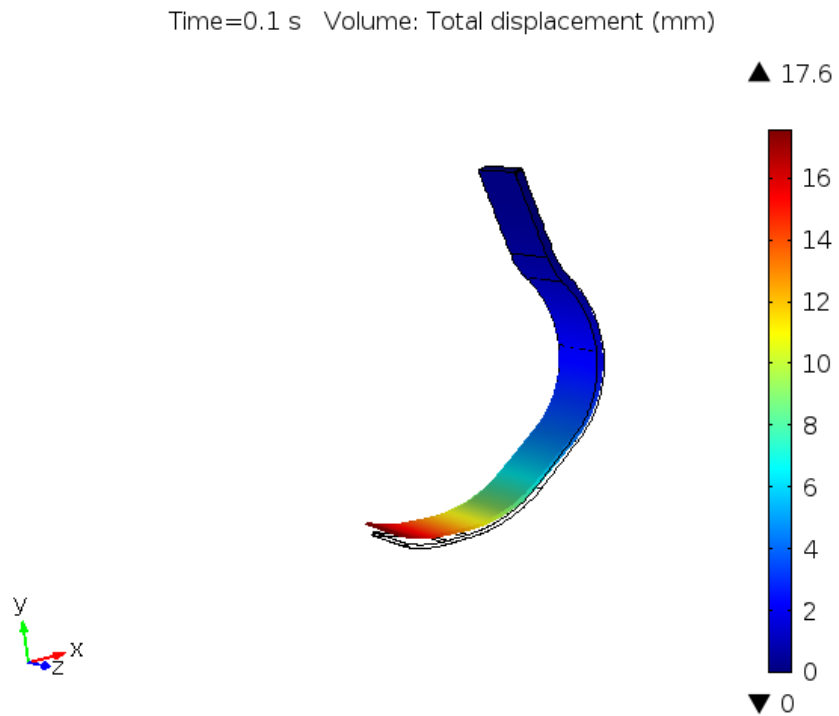


Rys. 8.17. Naprężenia w modelu w 0,425 s dla siatki „Extra Fine” – widok z przodu.

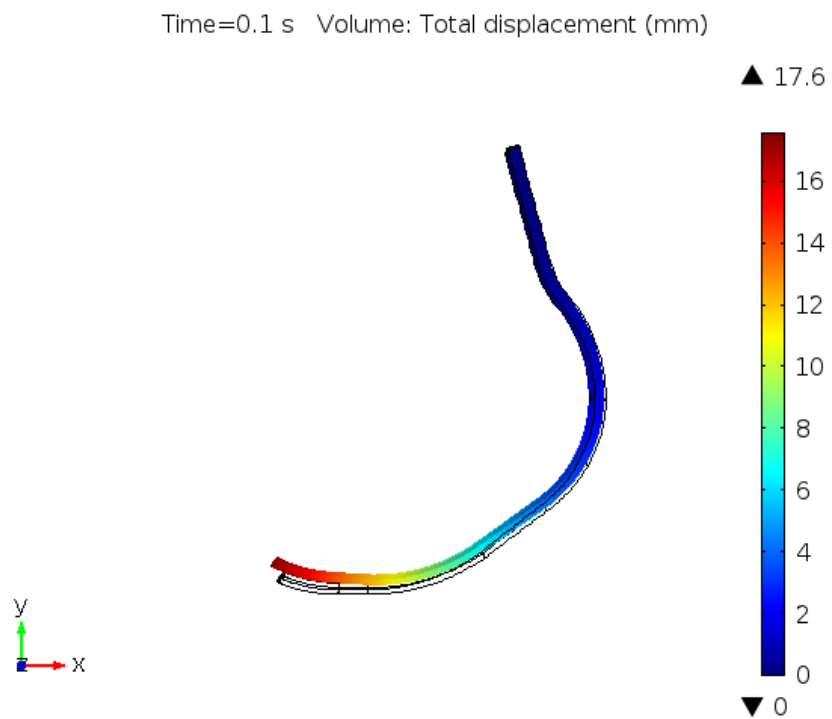


Rys. 8.18. Naprężenia w modelu w 0,425 s dla siatki „Extra Fine” – widok z tyłu.

Największe przemieszczenie również zostało zarejestrowane w 0,1 s symulacji. Tym razem jest odrobinę większe i wynosi 17,6 mm. Maksymalne przemieszczenie znów jest zlokalizowane w miejscu kontaktu protezy z podłożem, a okolica łączenia protezy z lejem nie jest objęta deformacją.



Rys. 8.19. Przemieszczenia w modelu w 0,1 s dla siatki „Extra Fine” – widok z przodu



Rys. 8.20. Przemieszczenia w modelu w 0,1 s dla siatki „Extra Fine” – widok z boku.

Następnym etapem analizy było uwzględnienie tłumienia materiałowego w materiale z którego wykonana jest proteza. W tym celu zastosowano odpowiedni model tłumienia izotropowego w materiale. Tłumienie („*Damping*”) dodaje się w zakładce „*Solid Mechanics*” – „*Linear Elastic Materials*”. Wybrano „*Isotropic loss factor*”, któremu wartość przypisano  $\eta_s = 0,0024$ . Ze względu na małe różnice wartości naprężeń dla siatki „*Normal*” i „*Extra Fine*”, wybrano ponownie siatkę „*Normal*” – pozwala to skrócić czas symulacji.

W wyniku symulacji otrzymano wyniki podobne do poprzednich. Maksymalne naprężenia oraz przemieszczenia występują w tym samym miejscu, a ich wartości bardzo nieznacznie się różnią, co prezentuje tabela 8.1.

Lp.	Czas [s]	Siatka „Normal” bez tłumienia		Siatka „Extra Fine” bez tłumienia		Siatka „Normal” z tłumieniem $\eta_s = 0,0024$	
		Max $\sigma$ [MPa]	Max $ \mathbf{u} $ [mm]	Max $\sigma$ [MPa]	Max $ \mathbf{u} $ [mm]	Max $\sigma$ [MPa]	Max $ \mathbf{u} $ [mm]
1	0	1,05	0,0012	1,05	0,0012	8,49	0,73
2	0,025	110	9,28	110	9,27	111	9,56
3	0,05	166	14,0	166	13,9	170	14,7
4	0,075	196	16,7	199	17,1	198	17,1
5	0,1	204	17,3	205	17,5	204	17,6
6	0,125	195	16,7	195	16,7	194	16,8
7	0,15	178	15,2	178	15,2	177	15,3
8	0,175	157	13,5	157	13,5	156	13,5
9	0,2	138	11,8	138	11,8	137	11,8
10	0,225	123	10,6	123	10,6	123	10,6
11	0,25	115	9,86	115	9,86	115	9,88
12	0,275	115	9,83	115	9,83	114	9,84
13	0,3	122	10,5	122	10,4	121	10,5
14	0,325	136	11,6	136	11,6	135	11,7
15	0,35	155	13,2	155	13,2	154	13,3
16	0,375	174	14,9	174	14,9	174	15,0
17	0,4	191	16,4	191	16,4	190	16,4
18	0,425	202	17,2	200	17,1	199	17,2
19	0,45	195	16,7	194	16,6	193	16,7
20	0,475	167	14,3	166	14,2	165	14,3
21	0,5	108	9,22	109	9,37	107	9,23
22	0,525	14,8	0,47	8,7	0,75	8,47	0,73

Tab. 8.1. Tabela porównująca przebieg maksymalnych naprężeń i przemieszczeń w czasie symulacji dla różnych siatek oraz z zastosowanym modelem tłumienia.



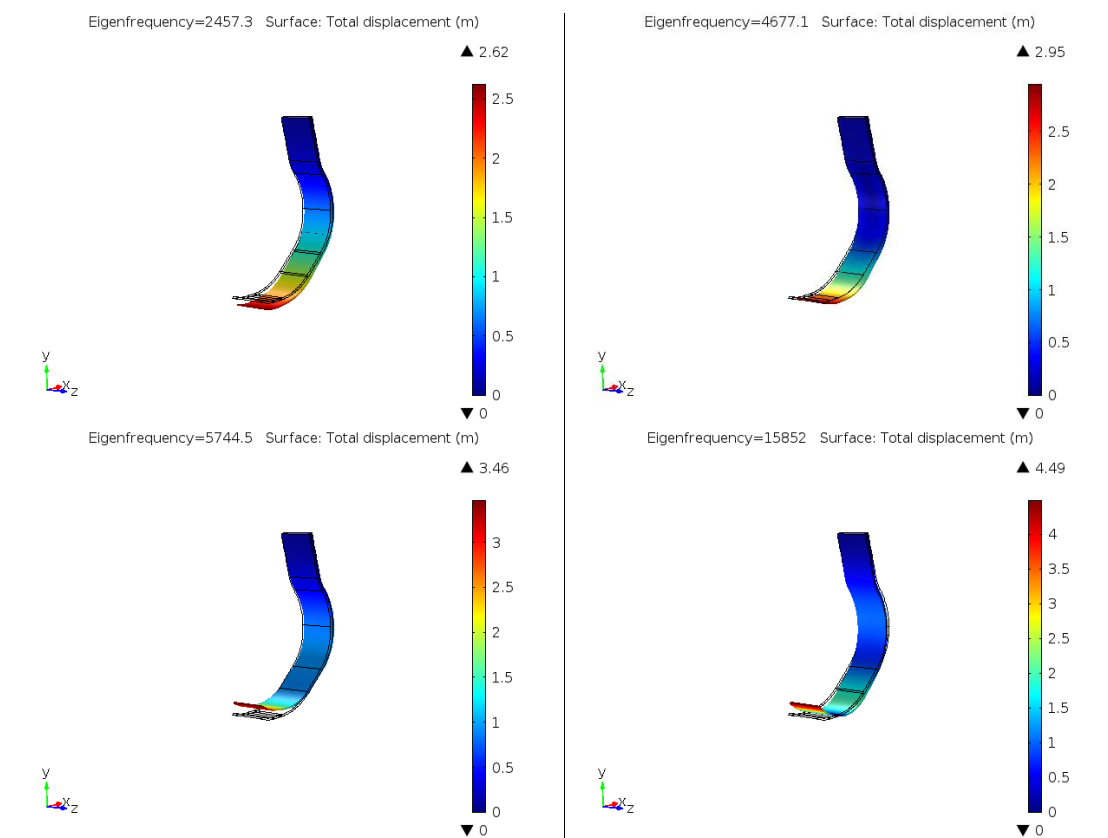
### 8.3. Symulacja częstotliwościowa

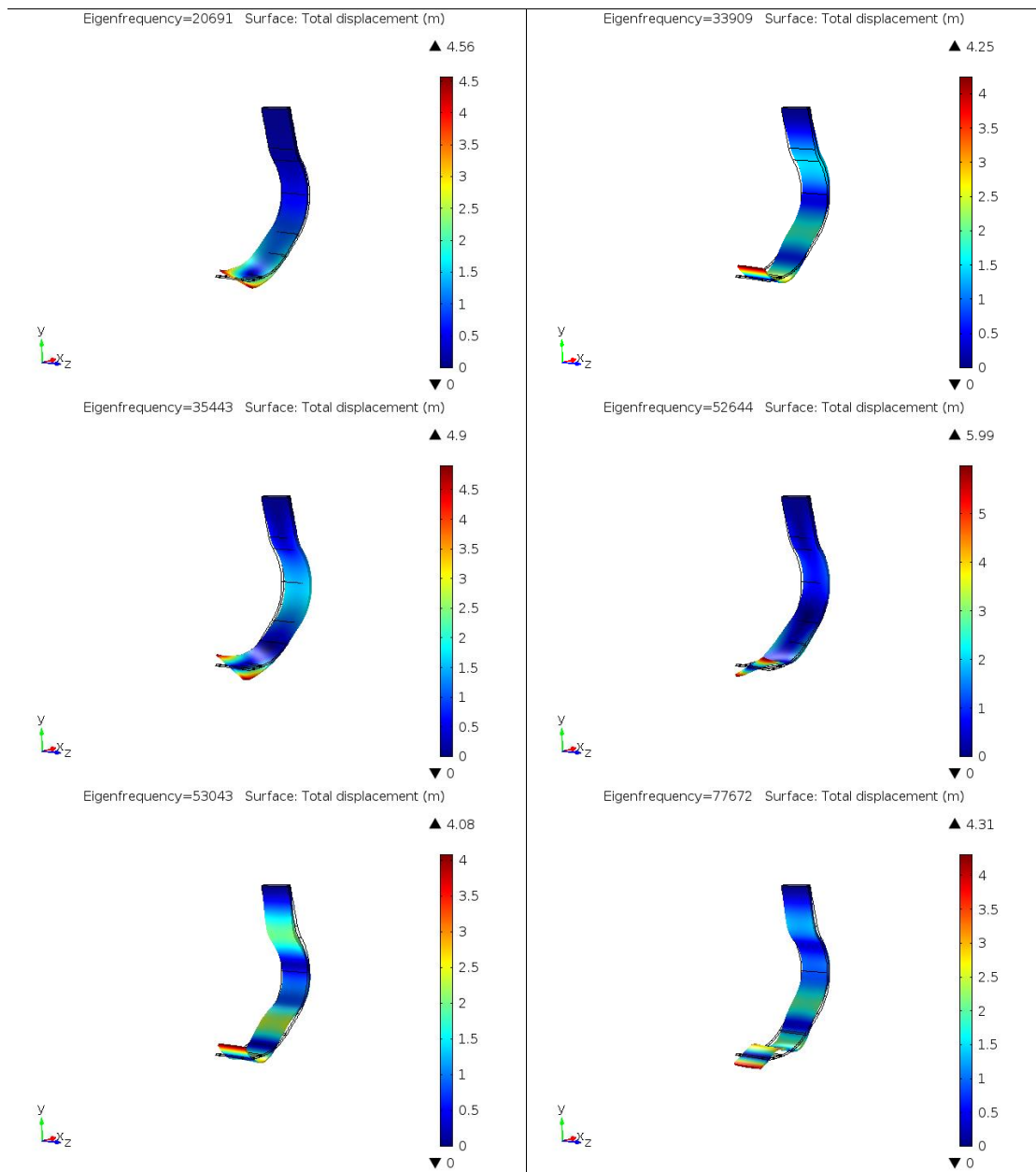
Analiza częstotliwościowa w programie Comsol Multiphysics. wykonuje się za pomocą analizy Eigenfrequency. Przeanalizowano pierwsze 10 częstotliwości drgań własnych modelu. Utwierdzenie ustalone zostało w tym samym miejscu co przy analizie naprężeniowej, siatkę ustalono na „Normal”. Otrzymane częstotliwości zestawiono w tabeli 8.2.

Lp.	Częstotliwość [Hz]
1	2 457,3
2	4 677,1
3	5 744,5
4	15 852
5	20 691
6	33 909
7	35 443
8	52 644
9	53 043
10	76 672

Tab. 8.2. Częstotliwości drgań własnych.

Na rysunku 8.25 pokazano postaci drgań własnych protezy dla kolejnych 10 częstości własnych przedstawionych w tabeli 8.2.

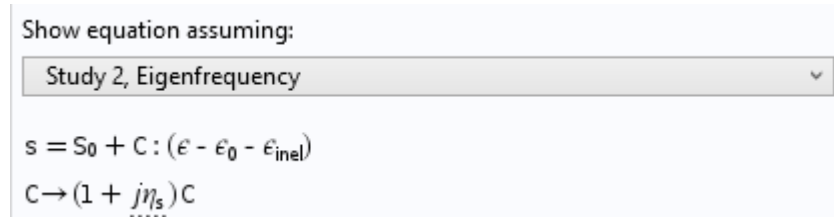




Rys. 8.22. Miejsca występowania drgań własnych w modelu.

Oddziaływanie pierwszej, trzeciej, czwartej, szóstej, siódmej, dziewiątej i dziesiątej częstotliwości rezonansowej następuje w całej protezie. Natomiast pozostałe charakteryzują się działaniem głównie w okolicy kontaktu protezy z podłożem.

Kolejnym etapem była symulacja częstotliwościowa z uwzględnieniem modelu tłumienia. Po wybraniu modelu „*Isotropic loss factor*” i zdefiniowaniu współczynnika  $\eta_s = 0,0024$  program wyświetlił wzór wprowadzający jednostkę urojoną  $j$ .



Rys. 8.23. Równania wygenerowane przez program po dodaniu „*Isotropic Loss Factor*”.

Dla wskazanego współczynnika wartości częstotliwości własnych zyskały część urojoną. Wartości części rzeczywistej pozostały bez zmian (tab. 8.3.).

Lp.	Częstotliwość drgań własnych bez tłumienia [Hz]	Częstotliwość drgań własnych z $\eta_s = 0,0024$ [Hz]
1	2 457,3	2 457,3+2,9488i
2	4 677,1	4 677,1+5,6125i
3	5 744,5	5 744,5+6,8934i
4	15 852	15 852+19,023i
5	20 691	20 691+24,830i
6	33 909	33 909+40,691i
7	35 443	35 443+42,532i
8	52 644	52 644+63,173i
9	53 043	53 043+63,651i
10	76 672	76 672+93,206i

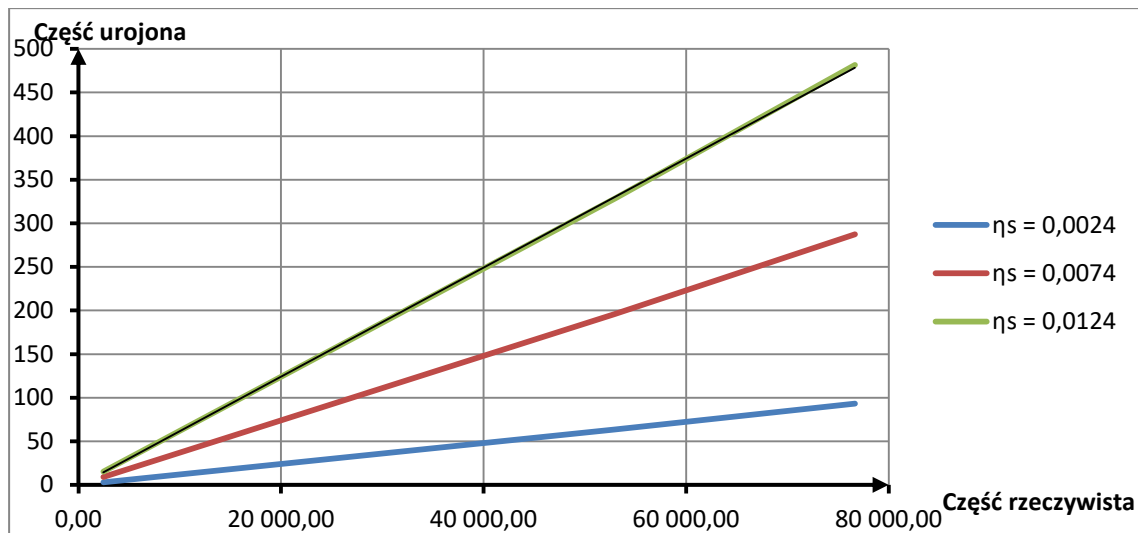
Tab. 8.3. Porównanie częstotliwości drgań własnych z tłumieniem i bez tłumienia.

W celach porównawczych zmieniono współczynnik  $\eta_s$  kolejno na 0,0074 oraz 0,0124. Wyniki zestawiono w tabeli 8.4.

Lp.	Część rzeczywista [Hz]	Część urojona [Hz]		
		$\eta_s = 0,0024$ [Hz]	$\eta_s = 0,0074$ [Hz]	$\eta_s = 0,0124$ [Hz]
1	2 457,3	2,9488i	9,0919i	15,235i
2	4 677,1	5,6125i	17,305i	28,997i
3	5 744,5	6,8934i	21,255i	35,615i
4	15 852	19,023i	58,654i	98,283i
5	20 691	24,830i	76,557i	128,28i
6	33 909	40,691i	125,46i	210,23i
7	35 443	42,532i	131,14i	219,74i
8	52 644	63,173i	194,78i	326,39i
9	53 043	63,651i	196,26i	328,86i
10	76 672	93,206i	287,38i	481,56i

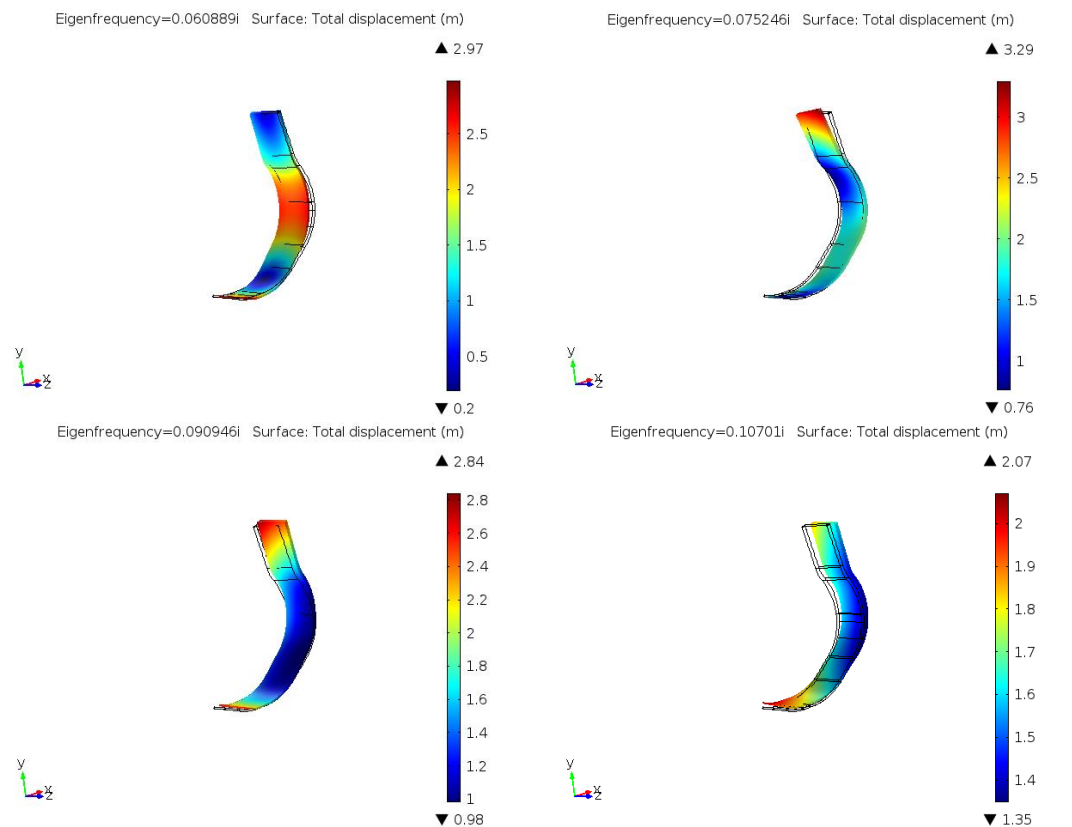
Tab. 8.4. Porównanie części urojonych częstotliwości drgań własnych dla różnych współczynników

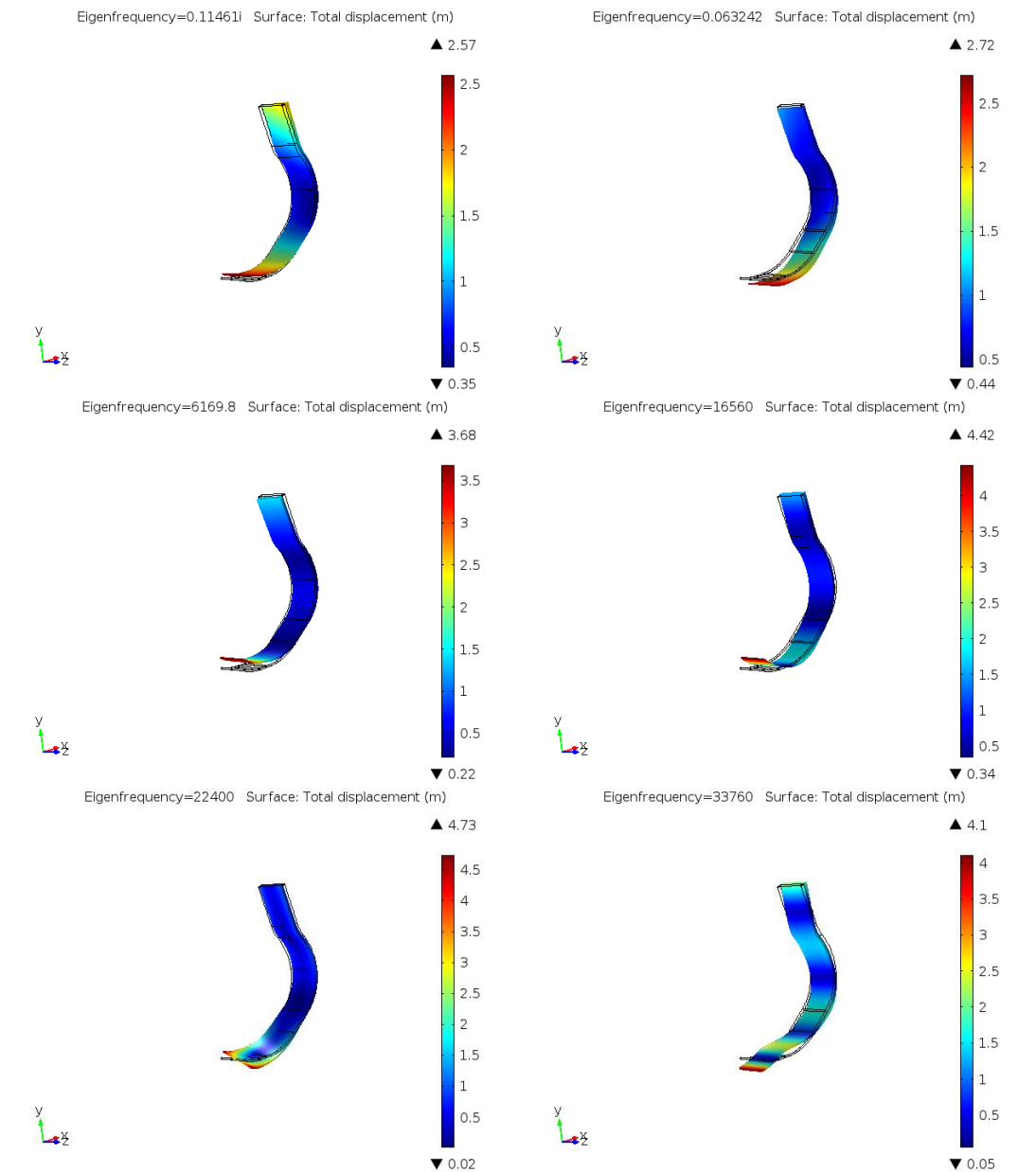
$\eta_s$ .



Rys. 8.24. Wykres zależności między współczynnikiem  $\eta_s$  a wartością części urojonej częstotliwości drgań własnych.

Ostatnim etapem pracy była analiza drgań swobodnych. W celu poprawnego wykonania analizy, usunięto wszelkie obciążenia oraz utwierdzenia i zasymulowano analizę „Eigenfrequency” kolejno dla siatki „Normal” bez tłumienia oraz dla siatki „Normal” z tłumieniem  $\eta_s$  równym 0,0024, 0,0074 i 0,0124. Wyniki przedstawiono poniżej. Porównanie częstotliwości drgań swobodnych z częstotliwościami drgań wymuszonych przedstawiono w tabelach 8.5 – 8.9.





Rys. 8.25. Miejsca występowania drgań swobodnych w modelu.

Lp.	Częstotliwość drgań wymuszonych [Hz]	Częstotliwość drgań swobodnych [Hz]
1	2 457,3	0,060889i
2	4 677,1	0,075246i
3	5 744,5	0,090956i
4	15 852	0,10701i
5	20 691	0,11461i
6	33 909	0,063242
7	35 443	6 169,8
8	52 644	16 560
9	53 043	22 400
10	76 672	33 760

Tab. 8.5. Porównanie częstotliwości drgań wymuszonych i swobodnych bez tłumienia.

Lp.	Częstotliwości drgań swobodnych z tłumieniem [Hz]		
	$\eta_s = 0,0024$ [Hz]	$\eta_s = 0,0074$ [Hz]	$\eta_s = 0,0124$ [Hz]
1	$6,6956 \cdot 10^{-6} + 0,0441671i$	$8,6066 \cdot 10^{-5} - 0,058075i$	$6,3275 \cdot 10^{-5} + 0,019801i$
2	$1,4858 \cdot 10^{-6} + 0,065004i$	$1,6775 \cdot 10^{-4} - 0,077909i$	$4,6362 \cdot 10^{-4} + 0,058555i$
3	$5,1850 \cdot 10^{-5} - 9,2843 \cdot 10^{-3}i$	$1,9409 \cdot 10^{-4} - 0,10932i$	$8,2860 \cdot 10^{-4} - 0,091653i$
4	$7,7471 \cdot 10^{-5} - 8,1286 \cdot 10^{-3}i$	$2,8604 \cdot 10^{-4} - 0,092812i$	$0,01248 - 4,7983 \cdot 10^{-4}i$
5	$0,023222 + 1,2785 \cdot 10^{-4}i$	$0,047563 + 2,8092 \cdot 10^{-5}i$	$0,077995 + 1,5119 \cdot 10^{-5}i$
6	$0,11839 + 9,2829 \cdot 10^{-5}i$	$0,084948 + 1,7396 \cdot 10^{-4}i$	$0,11415 + 7,0977 \cdot 10^{-4}i$
7	6 170,4 + 7,2297i	6 169,9 + 29,911i	6 170,1 + 38,645i
8	16 560 + 21,007i	16 560 + 61,184i	16 560 + 102,22i
9	22 400 + 29,906i	22 400 + 82,477i	22 408 + 130,85i
10	33 761 + 39,272i	33 760 + 124,8i	33 762 + 215,92i

Tab. 8.6. Porównanie częstotliwości drgań swobodnych dla różnych współczynników  $\eta_s$ .

Lp.	Częstotliwość drgań wymuszonych z tłumieniem $\eta_s = 0,0024$ [Hz]	Częstotliwość drgań swobodnych z tłumieniem $\eta_s = 0,0024$ [Hz]
1	2 457,3 + 2,9488i	$6,6956 \cdot 10^{-6} + 0,0441671i$
2	4 677,1 + 5,6125i	$1,4858 \cdot 10^{-6} + 0,065004i$
3	5 744,5 + 6,8934i	$5,1850 \cdot 10^{-5} - 9,2843 \cdot 10^{-3}i$
4	15 852 + 19,023i	$7,7471 \cdot 10^{-5} - 8,1286 \cdot 10^{-3}i$
5	20 691 + 24,830i	$0,023222 + 1,2785 \cdot 10^{-4}i$
6	33 909 + 40,691i	$0,11839 + 9,2829 \cdot 10^{-5}i$
7	35 443 + 42,532i	6 170,4 + 7,2297i
8	52 644 + 63,173i	16 560 + 21,007i
9	53 043 + 63,651i	22 400 + 29,906i
10	76 672 + 93,206i	33 761 + 39,272i

Tab. 8.7. Porównanie częstotliwości drgań wymuszonych i swobodnych ze współczynnikiem tłumienia  $\eta_s = 0,0024$ .

Lp.	Częstotliwość drgań wymuszonych z tłumieniem $\eta_s = 0,0074$ [Hz]	Częstotliwość drgań swobodnych z tłumieniem $\eta_s = 0,0074$ [Hz]
1	2 457,3 + 9,0919i	$8,6066 \cdot 10^{-5} - 0,058075i$
2	4 677,1 + 17,305i	$1,6775 \cdot 10^{-4} - 0,077909i$
3	5 744,5 + 21,255i	$1,9409 \cdot 10^{-4} - 0,10932i$
4	15 852 + 58,654i	$2,8604 \cdot 10^{-4} - 0,092812i$
5	20 691 + 76,557i	$0,047563 + 2,8092 \cdot 10^{-5}i$
6	33 909 + 125,46i	$0,084948 + 1,7396 \cdot 10^{-4}i$
7	35 443 + 131,14i	6 169,9 + 29,911i
8	52 644 + 194,78i	16 560 + 61,184i
9	53 043 + 196,26i	22 400 + 82,477i
10	76 672 + 287,38i	33 760 + 124,8i

Tab. 8.8. Porównanie częstotliwości drgań wymuszonych i swobodnych ze współczynnikiem tłumienia  $\eta_s = 0,0074$ .

Lp.	Częstotliwość drgań wymuszonych z tłumieniem $\eta_s = 0,0074$ [Hz]	Częstotliwość drgań swobodnych z tłumieniem $\eta_s = 0,0074$ [Hz]
1	2 457,3+15,235i	$6,3275 \cdot 10^{-5} + 0,019801i$
2	4 677,1+28,997i	$4,6362 \cdot 10^{-4} + 0,058555i$
3	5 744,5+35,615i	$8,2860 \cdot 10^{-4} - 0,091653i$
4	15 852+98,283i	$0,01248 - 4,7983 \cdot 10^{-4}i$
5	20 691+128,28i	$0,077995 + 1,5119 \cdot 10^{-5}i$
6	33 909+210,23i	$0,11415 + 7,0977 \cdot 10^{-4}i$
7	35 443+219,74i	6 170,1+38,645i
8	52 644+326,39i	16 560+102,22i
9	53 043+328,86i	22 408+130,85i
10	76 672+481,56i	33 762+215,92i

Tab. 8.9. Porównanie częstotliwości drgań wymuszonych i swobodnych ze współczynnikiem tłumienia  $\eta_s = 0,0124$ .

---

## 9. Podsumowanie i wnioski

Celem pracy było wykorzystanie programów inżynierskich do stworzenia modelu, zasymulowaniu działających nań obciążeń oraz analizy uzyskanych danych. Wykorzystano wiedzę z wielu dziedzin, w tym biomechaniki, metody elementów skończonych czy wiedzy o materiałach. Geometrię stworzonego modelu zaczerpnięto z patentu firmy Ossur profesjonalnie zajmującej się zaopatrywaniem niepełnosprawnych sportowców w sprzęt umożliwiający im aktywny tryb życia. Charakterystyczny kształt protezy ma za zadanie magazynowanie i oddawanie energii podczas zmian obciążeń występujących w czasie biegu. Wykorzystano program Autodesk Inventor do jak najwierniejszego odwzorowania protezy oraz oprogramowanie Comsol Multiphysics. do przeprowadzenia symulacji. Dane do symulacji przebiegu chodu zostały uzyskane w czasie zajęć laboratoryjnych z przedmiotu Biomechanika Inżynierska.

Badania podzielono na kilka etapów. Pierwszym była analiza naprężeń i odkształceń dla protezy zbudowanej z włókna węglowego bez współczynnika tłumienia. W kolejnej części wykorzystano bardziej gęstą siatkę elementów skończonych w celu uzyskania dokładniejszych wyników. Następnie dodano współczynnik tłumienia „*Isotropic loss factor*” właściwy dla badanego materiału i przeprowadzono symulację na podstawowej siatce elementów skończonych. Dalszą fazą symulacji była analiza częstotliwości drgań własnych w konstrukcji. Kolejnym etapem pracy było porównanie wpływu różnych wartości współczynnika tłumienia na częstotliwości drgań własnych. Ostatnią częścią było wyznaczenie częstotliwości drgań swobodnych konstrukcji i porównanie ich z wartościami występującymi przy obciążeniu.

W toku przeprowadzonych symulacji największe naprężenia wyniosły 204 MPa, a przemieszczenia osiągnęły wartość 17,5 mm. Dzięki specyficznemu kształtowi protezy naprężenia nie docierają do miejsca łączenia z lejem. Zgodnie z założeniami, w miejscu utwierdzenia nie zarejestrowano żadnych przemieszczeń. Zarejestrowane naprężenia są dalekie od wartości niebezpiecznych dla włókna węglowego. Porównanie wyników dla siatki o gęstości „*Normal*” i „*Extra Fine*”, gdzie widać brak większych różnic, prowadzi do wniosku, że konstrukcja o tak mało skomplikowanej budowie może być analizowana bez bardzo gęstej siatki elementów skończonych.

Dodanie współczynnika tłumienia „*Isotropic loss factor*” odpowiedniego dla zastosowanego materiału wpłynęło delikatnie na uzyskane wyniki. Największe różnice



w występujących naprężeniach to 3 MPa dla znaczących obciążeń i 0,4 mm w przypadku przemieszczeń. Są to różnice pomijalnie małe.

Podczas analizy częstotliwościowej wyznaczono częstotliwości drgań własnych konstrukcji. Najmniejsza uzyskana wartość to 2 457,3 Hz, co jest dużą wielkością i prawdopodobieństwo działania takiej częstotliwości na protezę jest niskie. Oznacza to, że konstrukcja jest bezpieczna w codziennym użytkowaniu.

Wyznaczanie częstotliwości drgań własnych z uwzględnieniem modelu tłumienia typu „*Isotropic loss factor*” prowadzi do uzyskania wartości zespolonych. Część urojona wyznaczonych wielkości jest rzędu od kilku do kilkudziesięciu herców. Wraz ze zwiększaniem współczynnika tłumienia zauważono proporcjonalne zwiększanie się wartości części urojonej częstotliwości drgań własnych.

Analizując wyznaczone częstotliwości drgań swobodnych modelu bez tłumienia można zauważyć, że wyniki rozłożone są pomiędzy wartości małe rzędu setnych części herca do wartości dużych rzędu tysięcy herców. Najniższe częstotliwości dla konstrukcja nieobciążonej są o wiele mniejsze niż dla konstrukcji obciążonej. Częstotliwości drgań swobodnych mają inny zakres niż częstotliwości drgań wymuszonych i nie pokrywają się.

Częstotliwości drgań swobodnych konstrukcji z uwzględnionym modelem tłumienia porównane do częstotliwości drgań wymuszonych charakteryzują się niższymi wartościami. Zwiększanie izotropowego współczynnika tłumienia prowadzi do większych zmian w częstotliwości drgań wymuszonych niż swobodnych.

Przeprowadzona symulacja wykazuje, że proteza sportowa podudzia jest bezpieczna w codziennym użytkowaniu. Występujące naprężenia są dalekie od wartości krytycznych materiału, z którego jest wykonana, co daje duży współczynnik bezpieczeństwa. Znaczne odkształcenia konstrukcji potwierdza jej charakter sportowy pozwalający na magazynowanie i oddawanie energii podczas ruchu. Uzyskane częstotliwości drgań własnych są duże i nie zagrażają wystąpieniu rezonansu. Zastosowany współczynnik tłumienia nie wpływa znacząco na odkształcenia i naprężenia występujące w protezie, natomiast powoduje istotne zmiany w wyznaczonych częstotliwościach własnych konstrukcji.

Podczas symulacji zastosowano obciążenia występujące w chodzie. Proteza przeznaczona do zaopatrzenia sportowców musi wytrzymywać obciążenia występujące podczas biegu, które są większe oraz o innym przebiegu. Taka symulacja oraz analiza powinna być kierunkiem dalszych badań.

---

## **Streszczenie**

Praca obejmuje analizę naprężeniową, odkształceniową oraz częstotliwościową protezy sportowej podudzia z wykorzystaniem Metody Elementów Skończonych. Model został zaprojektowany na wzór produktu firmy Ossur z wykorzystaniem programu Autodesk Inventor. Symulacja przeprowadzona w programie Comsol Multiphysics. obejmowała obciążenie zmienne w czasie symulujące chód. Wyznaczono wartości częstotliwości drgań własnych konstrukcji. Wykonano symulacje dla materiału tłumionego i nietłumionego oraz porównano wyniki.

## **Abstract**

The project is strain, deformation and eigenfrequency analysis of the lower limb prosthesis using Finite Element Method. The model was created in Autodesk Inventor program and was based on the Ossur product. Simulation imitating variable loads during walk was performed in Comsol Multiphysics. program. The values of natural frequency of the structure were determined. Results for damped and undamped material were compared.

## Literatura

- [1] J. Sobotta, F. Paulsen, J. Waschke „Atlas Anatomii Człowieka”, wyd. Elsevier Urban & Partner, 2010
- [2] W. Woźniak „Anatomia człowieka”, wyd. Elsevier Urban & Partner, 2010
- [3] Praca zbiorowa pod red. D. Tejszerskiej, E. Świtońskiego, M. Gzika „Biomechanika narządu ruchu człowieka”, wyd. Katedra Mechaniki Stosowanej, Wydział Mechaniczno-Technologiczny, Politechnika Śląska, Gliwice 2011
- [4] R. Będziński „Biomechanika inżynierska”, wyd. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 1997
- [5] B. Przeździak „Zaopatrzenie rehabilitacyjne”, wyd. Wydawnictwo Medyczne Via Medica, 2003
- [6] M. Ostwald „Podstawy wytrzymałości materiałów”, wyd. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, 2003
- [7] Z. Gabryszewski „Teoria sprężystości i plastyczności”, wyd. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2001
- [8] J. Szulej „Wyznaczenie ekwiwalentnego wiskotycznego tłumienia drgań w konstrukcjach wielomateriałowych” wyd. Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej, 2010
- [9] O. Zienkiewicz „Metoda Elementów Skończonych”, wyd. Arkady Warszawa, 1972
- [10] O. Zienkiewicz, R. Taylor „The Finite Element Method, vol. 1-3.”, wyd. Butterworth-Heinemann, 2000
- Źródła internetowe – stan na 25.01.2019
- [11] <https://ortopes.pl/abc-protez-konczyn/>
- [12] [http://www.niepelnosprawni.pl/ledge/x/11716?print\\_doc\\_id=27449](http://www.niepelnosprawni.pl/ledge/x/11716?print_doc_id=27449)
- [13] [http://www.ele.uri.edu/courses/bme281/F11/BrookeM\\_2.pdf](http://www.ele.uri.edu/courses/bme281/F11/BrookeM_2.pdf)
- [14] <http://www.knse.pl/publikacje/65.pdf>
- [15] D. Bonacini, patent nr EP 2 065 018 B1, „Method for positioning a bracket-fixable running foot for lower limb prosthesis”, 2003
- <https://data.epo.org/publication-server/rest/v1.0/publication-dates/20180606/patents/EP2755987NWB1/document.pdf>
- [16] <https://www.edukator.pl/pix/users/Image/6plus/rys12903.jpg>
- [17] <http://www.ortopedyka.pl/oferta/protezy-uda-o-budowie-skorupowej/>
- [18] <http://www.ortopedyka.pl/oferta/modularne-protezy-ud/>

---

[19] [http://www.niepelnosprawni.pl/ledge/x/11716?print\\_doc\\_id=27449](http://www.niepelnosprawni.pl/ledge/x/11716?print_doc_id=27449)

[20] <http://www.freedom-innovations.com/catapult/>

[21] <https://www.ottobock.com.au/prosthetics/products-from-a-to-z/sprinter-1e90/>

[22] <https://www.ossur.com/prosthetic-solutions/products/sport-solutions/cheetah>