

Politechnika Poznańska

Wydział Budowy Maszyn i Zarządzania

Instytut Mechaniki Stosowanej

Zakład Mechaniki Technicznej

Eligiusz Idczak

Optymalizacja topologiczna dwufazowych
metamateriałów auksetycznych

Rozprawa doktorska

Promotor pracy: dr hab. Tomasz Stręk, prof. nadzw.

Poznań, 2019

Spis treści

Streszczenie	4
Abstract	5
1 Wstęp.....	6
1.1 Wprowadzenie	6
1.2 Optymalizacja topologiczna	7
1.3 Motywacja, cel i teza pracy	10
1.3.1 Motywacja	10
1.3.2 Cel pracy	11
1.3.3 Teza pracy	11
1.4 Układ pracy.....	11
2 Przedmiot optymalizacji.....	14
2.1 Metamateriały auksetyczne	14
2.2 Zastosowania auksetyków	18
2.3 Podział struktur o ujemnym współczynniku Poissona.....	21
2.4 Zastosowanie optymalizacji topologicznej w celu projektowania metamateriałów i kompozytów	28
3 Zastosowane metody i algorytmy obliczeniowe.....	30
3.1 Związek konstytutywny	30
3.2 Równanie ruchu Naviera	30
3.3 Metoda Elementów Skończonych	31
3.4 Schematy interpolacyjne SIMP i RAMP	35
3.5 Zastosowanie SIMP przy minimalizacji odkształcenia	38
3.6 Definicja efektywnego współczynnika Poissona	41
3.7 Algorytm obliczeń MMA	42
4 Optymalizacja topologiczna warstwy wewnętrznej kompozytu	44
4.1 Model oraz warunki brzegowe	44
4.2 Wyniki numeryczne obliczeń.....	45
4.2.1 Minimalizacja efektywnego współczynnika Poissona warstwy wewnętrznej kompozytu	45
4.2.2 Maksymalizacja efektywnego współczynnika Poissona warstwy środkowej kompozytu	49
4.2.3 Wpływ siatki elementów skończonych na wyniki optymalizacji.....	51
5 Optymalizacja topologiczna dwufazowych struktur plastra miodu	55
5.1 Model oraz warunki brzegowe	55

5.2	Wyniki numeryczne obliczeń.....	57
5.2.1	Minimalizacja efektywnego współczynnika Poissona w konwencjonalnym plastrze miodu	57
5.2.2	Minimalizacja efektywnego współczynnika Poissona w plastrze miodu re-entrant.....	62
5.2.3	Maksymalizacja efektywnego współczynnika Poissona w strukturze heksagonalnej re-entrant.....	65
5.2.4	Optymalizacja topologiczna za pomocą metody RAMP.....	70
5.2.5	Optymalizacja z równymi współczynnikami Poissona materiałów wypełniających	72
5.2.6	Optymalizacja z wprowadzonym parametrem regularyzacji.....	73
6	Optymalizacja topologiczna dwufazowych struktur chiralnych.....	76
6.1	Model oraz warunki brzegowe	76
6.2	Wyniki numeryczne optymalizacji dwufazowej struktury anty-tetra-chiralnej	78
6.2.1	Minimalizacja efektywnego współczynnika Poissona przy grubości struktury $g = 0.025$ m	78
7	Wpływ parametru penalizacji na wyniki optymalizacji topologicznej.....	85
7.1	Cel optymalizacji ze zmiennym współczynnikiem p	85
7.2	Wyniki optymalizacji topologicznej (minimalizacja efektywnego współczynnika Poissona) dla różnych wartości parametru kary p dla różnych domen obliczeniowych	86
7.2.1	Wyniki minimalizacji przy różnym p dla kwadratu o boku 0.1 m	86
7.2.2	Wyniki minimalizacji przy różnym p dla struktury anty-tetra-chiralnej.....	91
7.2.3	Wyniki minimalizacji przy różnym p dla komórki heksagonalnego konwencjonalnego plastra miodu.....	95
8	Badania dynamiczne zoptymalizowanych struktur	100
8.1	Wyniki badań częstości własnych dla kwadratu	100
8.2	Wyniki badań częstości własnych dla heksagonalnego plastra miodu	102
8.3	Wyniki badań częstości własnych dla struktury anty-tetra-chiralnej	104
9	Wnioski	107
	Literatura	109

Streszczenie

Niniejsza praca poświęcona jest zastosowaniu metod optymalizacji do uzyskania struktur o minimalnym i maksymalnym współczynniku Poissona. W początkowej części pracy opisano definicję optymalizacji, rodzaje metamateriałów auksetycznych, przykłady ich zastosowania oraz występowania w naturze. Wykonano przegląd literatury dotyczący historii auksetyków oraz użycia metod optymalizacji topologicznej w dziedzinie projektowania struktur. Proces optymalizacyjny w niniejszej pracy następuje poprzez wypełnienie danego obszaru dwoma materiałami o realnych właściwościach (moduł Younga, współczynnik Poissona). Obszarami optymalizacyjnymi były: warstwa wewnętrzna kompozytu o kształcie kwadratu, struktury konwencjonalnego oraz odwrotnego (*re-entrant*) plastra miodu oraz struktura o kształcie anty-tetra-chiralnym. Optymalizację przeprowadzono z zadaniem minimalizacji oraz maksymalizacji współczynnika Poissona w celu uzyskania odpowiednich przemieszczeń w płaszczyźnie poprzecznej. Uzyskanie ujemnego współczynnika Poissona prowadzi do uzyskania właściwości charakterystycznych dla metamateriałów auksetycznych. W pracy do uzyskania końcowych wyników użyto: Metody Elementów Skończonych, schematu interpolacji SIMP oraz RAMP prowadzących do wyznaczenia końcowych efektywnych właściwości materiałów, a także algorytmu MMA do poszukiwania optymalnej wartości funkcji celu. Wszystkie symulacje zostały przeprowadzone za pomocą oprogramowania COMSOL Multiphysics. Optymalizacje w obszarach obliczeniowych przeprowadzono dla różnych wartości współczynnika Poissona oraz modułu Younga dwóch materiałów wypełniających, przy różnym procentowym udziale materiału o większym module Younga w całej geometrii oraz różnych parametrach geometrycznych optymalizowanego obszaru. Porównano również wyniki optymalizacji z różnymi rodzajami i gęstościami siatki elementów skończonych, na które podzielony zostaje obszar optymalizacji. W pracy następuje również przedstawienie wyników uzyskanych za pomocą schematów interpolacji SIMP i RAMP. W końcowych rozdziałach pracy dokonano porównania wyników dla różnych wartości wymienionych parametrów.

Abstract

This work is devoted to the use of optimization methods to obtain structures characterized by a minimal and maximal Poisson ratio. The initial part of the work describes the definition of optimization, types of auxetic metamaterials, examples of their applications and occurrence in nature. A literature review concerning the history of auxetics and the using of topology optimization methods in the field of structure design was made. The optimization process in this work is carried out by filling a domain with two materials with real materials' properties (Young's modulus, Poisson's ratio). The optimization areas were: the core layer of the square-shaped composite, the hexagonal and re-entrant structure of the honeycomb, and the anti-tetra-chiral structure. The optimization was made with the goal of minimizing and maximizing the Poisson ratio to obtain appropriate displacements in the transverse direction. Obtaining a Poisson's negative coefficient leads to characteristic properties of auxetic metamaterials. In the work, the final results were calculated based on: Finite Element Methods, SIMP and RAMP interpolation schemes leading to the computing of the final effective material properties, as well as the MMA algorithm to search for the optimal value of the objective function. All simulations were carried out using the COMSOL Multiphysics software. Optimizations in the domains were made for different values of Poisson's ratios and Young's modulus of two filling materials, with different percentages of material with a higher Young's modulus in the whole geometry and different geometrical parameters of the optimized domain. The optimization results were also compared with different types and densities of mesh in the Finite Element Methods. The work also presents the results of optimizations using the SIMP and RAMP interpolation schemes. In the final chapters of the work, the results were compared with different values of the above mentioned parameters.

1 Wstęp

1.1 Wprowadzenie

Optymalizacja wg definicji słownika języka polskiego to poszukiwanie najlepszego możliwego do osiągnięcia przebiegu pewnego procesu lub rozwiązania pewnego zadania czy zagadnienia. Zawsze odbywa się ono za pomocą określonych metod oraz posiada zdefiniowane kryteria bądź kryterium oceny. Optymalizacja najczęściej przebiega w określonych warunkach, stąd na rozwiązanie narzucane są pewne ograniczenia związane z warunkami zewnętrznymi.

Optymalizacja pełni ważną rolę w wielu dziedzinach życia: w każdym z jego aspektów powinno się dążyć do ciągłego doskonalenia procesów, osiąganych wyników i prawidłowości rozwiązań. W działalności gospodarczej i technicznej często przekłada się na osiągany zysk, a w technicznej na uzyskiwanie najlepszych właściwości projektowanych elementów budowlanych czy mechanicznych. Aby zaoszczędzić zasoby: nakłady pracy, materiału czy środki pieniężne optymalizacja konstrukcji odbywa się już na etapie projektowania konstrukcji.

W pracach [Kirsch1981, Brandt1978] dotyczących projektowania konstrukcji mechanicznych i budowlanych optymalizacja ma na celu wyznaczenie takich kształtów lub dobranie takiego materiału konstrukcji, aby spełniał wcześniej założone kryteria. Wyznaczenie rozwiązania następuje za pomocą metod matematycznych. Po ustaleniu kryteriów optymalizacji, celu optymalizacji oraz zewnętrznych warunków ograniczających optymalizacja staje się problemem matematycznym, gdzie poszukuje się ekstremum (minimum lub maksimum) funkcji lub funkcjonału. Konieczna jest tutaj również odpowiednia dyskretyzacja konstrukcji.

W zagadnieniach mechanicznych najczęściej używanymi kryteriami optymalizacji są: osiągnięcie największej sztywności konstrukcji – poprzez minimalizację potencjału sprężystego, wyrównanie wyężenia materiału oraz osiągnięcie minimalnej objętości elementów. Często jako metody optymalizacji opisuje się: programowanie liniowe, programowanie nieliniowe, algorytmy heurystyczne (np. metoda Monte Carlo lub algorytmy genetyczne), metody kryteriów optymalności, np. *fully stressed design* oraz optymalizacja topologiczna.

Podejście do procesu optymalizacji konstrukcji mechanicznych może być dwojakie: w pierwszym poszukiwany jest rozkład materiału w określonym wcześniej

obszarze – wtedy podejście takie nazywane jest materiałowym; w drugim natomiast takiego określonego obszaru nie ma – i wtedy takie podejście nazywa się geometrycznym [Bendsoe2003, Kutylowski2004].

Wymienione wyżej metody ze względu na trudność jednoczesnego sformułowania funkcji celu przy jednoczesnym spełnieniu przyjętych ograniczeń dzieli się na metody bezpośrednie oraz pośrednie. Metody bezpośrednie, które korzystają w trakcie obliczeń, jedynie z funkcji celu, to m.in. programowanie liniowe i nieliniowe, algorytmy genetyczne, algorytm symulowanego wyżarzania, przeszukiwanie tabu. Skupiają się one na bezpośrednim poszukiwaniu funkcji celu w przestrzeni zmiennych decyzyjnych. Metody pośrednie (nazywane gradientowymi), do których zalicza się metody kryteriów optymalności (ang. *optimality criteria method*), poszukują minimum funkcji celu, jednocześnie badając warunki, jakie ona spełnia osiągając swoje ekstremum.

Początkowo zastosowanie metod kryteriów optymalności w projektowaniu konstrukcji mechanicznych było ograniczone. Często stosowanym kryterium była minimalizacja masy i w tym podejściu często stosowana była optymalizacja wymiarów przekroju, gdzie poszukiwanie najlepszego rozwiązania ograniczało się jedynie do znalezienia minimalnych wymiarów zewnętrznych przekroju. Jeśli poszukiwane były inne optymalne wymiary poza zewnętrznymi wtedy optymalizację taką można nazwać optymalizacją kształtu. Cały czas jednak projektowany obszar ma narzucone spore ograniczenia w przestrzeni zmiennych decyzyjnych. Ogólny kształt jest narzucony, a optymalizacji podlega więcej wymiarów niż tylko zewnętrzne.

Optymalizacja topologiczna natomiast rozwiązuje problem najkorzystniejszego wymiaru zewnętrznego, jak i wewnętrznego ułożenia struktury, ilości otworów i ich wymiarów, jednocześnie bez narzucania jakichkolwiek parametrów geometrycznych czy początkowych kształtów. Ten właśnie rodzaj optymalizacji będzie zastosowany do rozwiązania problemu sformułowanego w niniejszej pracy.

1.2 Optymalizacja topologiczna

W poprzednim rozdziale opisano zagadnienie, jakim zajmuje się optymalizacja topologiczna. Optymalizacja taka musi posiadać funkcję celu oraz metodę jej poszukiwania. Wyróżnia się kilka rodzajów optymalizacji topologicznej różniących się przede wszystkim sposobem formułowania funkcji celu i metodami prowadzącymi do

uzyskania rozwiązania. Podział na grupy został opisany szczegółowo w pracach autorstwa Rozvany'ego [Rozvany1995, Rozvany2001a, Rozvany2001b].

Optymalizację topologiczną dzieli się przede wszystkim na dwie zasadnicze grupy: *Layout Optimization* (LO) oraz *Generalized Shape Optimization* (GSO).

W optymalizacjach typu LO [Lewiński1994a, Lewiński1994b] optymalizowane są struktury dyskretne – konstrukcje prętowe, gdzie optymalizacja polega na określeniu, które z początkowych elementów składowych powinny pozostać w optymalnym rozkładzie, a które z nich powinny zostać usunięte. Dodatkowo poszukuje się najlepszego położenia węzłów łączących pręty oraz przekroje poprzeczne prętów. Jednocześnie wraz z implementacją określonej metody definiowane jest kryterium usuwania elementów z bazowej struktury lub ich pozostawiania.

Generalized Shape Optimization (GSO) to optymalizacja struktury ciągłej tzw. kontinuum materialnego, które może składać się z jednego składnika (być jednorodne) lub składać się z kilku składników (jest kompozytem). Do ośrodków ciągłych zalicza się również ciała porowate. Rozwiązywanym problemem w ramach optymalizacji jest wypełnienie materiałem oraz pustymi obszarami pewnego zadanego obszaru. W procedurze poszukiwania najlepszego rozwiązania w sposób ciągły zmieniają się granice pomiędzy tymi obszarami. Metody GSO stosuje się zazwyczaj, jeśli istnieje duża ilość materiału wypełniającego (podczas, gdy metody LO, gdy jest go niewiele) oraz materiał jest ciągły (inna nazwa: optymalizacja kontinuum materialnego). Wewnętrznie GSO można podzielić na optymalizację topologiczną ciał izotropowych, (ang. *Isotropic-Solid/Empty* – ISE), ciał anizotropowych (ang. *Anisotropic-Solid/Empty* – ASE) oraz porowatych ciał izotropowych (ang. *Isotropic-Solid/Empty/Porous* – ISEP).

Jedną z metod optymalizacji topologicznej ciał izotropowych jest metoda SIMP (ang. *Solid Isotropic Microstructure with Penalization*). Podczas tego procesu powstaje pewien sztuczny, fikcyjny materiał, którego gęstość przyjmuje wartości z zakresu między zerem a wartością początkową. Metoda wymaga zdefiniowania sposobu interpolacji właściwości materiałowych w odpowiednich węzłach modelu oraz ustalenia progu wartości gęstości materiału fikcyjnego służącej decyzji o wypełnieniu lub niewypełnieniu obszaru materiałem. Rozwiązanie w metodzie zależy od wartości potęgi funkcji służącej do interpolacji wartości odpowiedniej właściwości materiału fikcyjnego. Wartość ta nazywana jest parametrem kary lub penalizacji. Metoda ta jest często stosowana w optymalizacji topologii. Po raz pierwszy metoda SIMP została zastosowana w 1989 r. przez Bendsøe [Bendsøe 1989]. W kolejnych latach doskonalono sposób sformułowania

wartości właściwości optymalizowanej struktury oraz wpływ wykładnika potęgi funkcji aktualizacji. Wg pracy [Jacobsen1997] rosnący wykładnik wpływa pozytywnie na zbieżność rozwiązania.

Jako jeden z rodzajów SIMP można określić ATO (ang. Adaptive Topology Optimization). Polega ona na adaptowaniu siatki podziału w trakcie procesu i jednoczesnym wygładzaniu kształtów struktury [Maute1995].

Inną metodą interpolacji właściwości materiału podczas optymalizacji jest metoda RAMP (ang. *Rational Approximation of Material Properties*) [Bendsøe2003]. Jest to aproksymacja właściwości materiału za pomocą funkcji wymiernych. Można ją podobnie jak metodę SIMP, zastosować do aproksymacji właściwości materiału.

Kolejnym rodzajem metod GSO jest OMP (ang. *Optimal Microstructure with Penalization*). W metodzie tej optymalizuje się mikrostrukturę i z tego powodu zwiększa się liczba niewiadomych niezależnych parametrów (np. w 2D istnieją trzy niezależne parametry: dwie grubości oraz kierunek zorientowania mikrostruktury [Olhoff1997]).

Metoda NOM (ang. *Near Optimal Microstructure*) jest rodzajem optymalizacji topologicznej, w której w większości nie stosuje się parametru penalizacji, ale z tego powodu rozwiązanie może nie być zbieżne. W tym przypadku, aby tego uniknąć stosowane jest postępowanie zastępujące zwykłą penalizację, tj. tzw. penalizację o ustalonym poziomie. Prowadzi to do zwiększenia zbieżności rozwiązania. Pozytywnym aspektem metody jest implementacja z mniejszą liczbą niezależnych parametrów dla każdego elementu niż w metodzie OMP [Bendsøe1988].

Kolejnym rodzajem metod używanych w optymalizacji topologicznej są algorytmy genetyczne. Sposób działania algorytmów genetycznych oparty jest biologicznym pojęciu replikacji łańcuchów DNA. Podstawowe cechy algorytmów to: prowadzenie poszukiwań rozwiązań w wielu punktach, parametry zadania optymalizacji posiadają postać zakodowaną, do wyboru i tworzenia nowych rozwiązań stosuje się reguły ewolucyjno-probabilistyczne, wykorzystanie do poszukiwań łatwo obliczalnej wartości funkcji celu, wolne są od ograniczeń nakładanych na przestrzeń poszukiwań (np. ciągłość, istnienie pochodnych oraz unimodalność funkcji celu), uniwersalność i prostota implementacyjna [Burczyński1999, Kita1999].

Metoda ESO (ang. *Evolutionary Structural Optimization*), która funkcjonuje również pod nazwą SERA (ang. *Sequential Element Rejections and Admissions*) jest kolejną metodą optymalizacji topologicznej. Jest to metoda oparta na prostej koncepcji stopniowego usuwania nieefektywnego materiału ze struktury w trakcie jej

projektowania. Jej szczegółowy opis można znaleźć w pracy [Xie1999]. Przykład zastosowania metody SERA można znaleźć w pracy Rozvany'ego i Querina [Rozvany2001c]. Wyniki wykazują, iż nie zawsze prowadzi ona do uzyskania rozwiązania optymalnego. Tak więc dotychczas SERA jest metodą raczej intuicyjną, dla której nie ma dowodów istnienia rozwiązania optymalnego.

Metoda bąbelkowa - BM (ang. *Bubble Method*) polega na iteracyjnym umieszczaniu otworów (bąbelków) w optymalizowanej geometrii. Funkcja celu polega na określeniu najlepszego wektora określającego położenie otworu. Jest to metoda będąca przykładem tzw. geometrycznego opisu problemu optymalizacji topologii [Eschenauer1993, Eschenauer1994, Eschenauer1995].

W kolejnych rozdziałach opisane będą wyniki implementacji metody SIMP oraz RAMP dla zastosowania izotropowego ze zmieniającym się współczynnikiem penalizacji. Celem optymalizacji topologii będzie uzyskania dwufazowej optymalnej struktury auksetycznej, tzn. posiadającej minimalny możliwy współczynnik Poissona.

1.3 Motywacja, cel i teza pracy

1.3.1 Motywacja

Jedną z możliwych dziedzin działalności inżynierskiej, która może być źródłem innowacji, jest tworzenie materiałów, względnie struktur materiałowych, których zachowanie wygląda inaczej niż tych powszechnie stosowanych. Jedną z grup materiałów o nieintuicyjnych właściwościach są metamateriały auksetyczne, wykazujące w pewnych lub wszystkich kierunkach ujemny współczynnik Poissona. Implementacja metod dwufazowej optymalizacji topologicznej pozwala na minimalizację wartości efektywnego PR (ang. *Poisson's ratio* – współczynnik Poissona) aż do zakresu wartości ujemnych. Prowadzi to do możliwości szerszego niż obecnie zastosowania auksetyków w różnych dziedzinach przemysłu. Może też prowadzić do poszerzenia i ulepszenia efektu w obecnych zastosowaniach, np. ochrony przed wybuchami, zderzeniami, ochronie budynków przed zewnętrznymi czynnikami (np. pokrywą śnieżną, trzęsieniami Ziemi), polepszeniem ergonomii stanowisk pracy, zabezpieczeniem części ciała człowieka podczas pracy lub jako elementy wspomagające ludzkie organy.

1.3.2 Cel pracy

1. Celem pracy jest uzyskanie w zadanych strukturach minimalnego możliwego współczynnika Poissona poprzez wypełnienie jej dwoma materiałami o konwencjonalnych właściwościach. Materiały użyte w symulacjach w niniejszej pracy są jedynie przykładowymi. Dla celów konkretnych zastosowań można użyć innych dostępnych materiałów spełniających dane wymagania.
2. Celem jest również pokazanie, iż pewne struktury niewykazujące efektu auksetycznego, będąc zbudowane z jednej fazy dowolnego materiału, jeśli zostaną zbudowane z optymalnie rozłożonych dwóch faz, będą ten efekt wykazywać.
3. W pracy zostanie również przedstawione porównanie wyników optymalizacji dla różnych wartości wybranych parametrów (moduły Younga dwóch faz, stosunek procentowy obu materiałów w całym obszarze obliczeniowym).
4. Porównanie wyników optymalizacji z użyciem różnych schematów interpolacji (RAMP, SIMP), analiza wpływu gęstości siatki oraz wprowadzenia parametru regularyzacji w procesie optymalizacji.

1.3.3 Teza pracy

Możliwe jest, w wyniku zastosowania metod optymalizacji topologicznej połączonej z metodą MES, uzyskanie dla modelu złożonego z dwóch materiałów bardzo niskiego współczynnika Poissona w jednym z kierunków, nawet jeśli model złożony z jednego materiału nie wykazuje zachowania auksetycznego. Dodatkowo, jeśli model jednofazowy wykazuje takie właściwości w pewnych kierunkach, to rozwiązanie zadania optymalizacyjnego takie zachowanie pogłębia (współczynnik Poissona jest jeszcze mniejszy). Możliwe jest również, iż w wyniku optymalizacji dwufazowej, model, który jednofazowo jest auksetyczny, przestaje nim być i zaczyna wykazywać dodatni efektywny współczynnik Poissona.

1.4 Układ pracy

Praca dotyczy zastosowania metod optymalizacji topologicznej do uzyskania odpowiednich wartości efektywnego współczynnika Poissona. Obliczenia

przeprowadzono dla różnych kształtów obszaru obliczeniowego różnych geometrii. Część z nich, będąc zbudowana z jednego materiału wykazywała już zachowanie auksetyczne, inne zaś nie. Wyniki obliczeń otrzymano dla różnych właściwości materiałów wypełniających, za pomocą różnych metod wyznaczania właściwości struktury wynikowej oraz dla różnych gęstości siatki elementów skończonych w geometrii. Wszystkie symulacje przeprowadzono w programie COMSOL Multiphysics.

W rozdziale drugim opisano przedmiot optymalizacji – metamateriały mechaniczne, a wśród nich grupę struktur nazywanych auksetykami. Podano ich charakterystyczne zachowania pod wpływem obciążenia oraz ich obecne zastosowania w przemyśle i innych dziedzinach życia. Opisane zostały najbardziej powszechne i charakterystyczne grupy materiałów o ujemnym współczynniku Poissona.

W rozdziale trzecim opisano metody i algorytmy obliczeniowe, które zostały użyte w symulacjach komputerowych. Pierwszą z nich jest metoda elementów skończonych (MES), za pomocą której można zamodelować zachowanie złożonych struktur pod wpływem obciążenia. Osiągane jest to przy pomocy dyskretyzacji, czyli podziału struktury na skończoną ilość elementów. Zaprezentowano schematy interpolacji SIMP oraz RAMP, które służą do opisu efektywnych właściwości struktury, takich jak moduł Younga i współczynnik Poissona. W rozdziale opisano również sposób definiowania efektywnego współczynnika Poissona, a także algorytm poszukiwania optymalnej wartości funkcji celu: metodę MMA – Metodę Ruchomych Asymptot.

W rozdziale czwartym pokazano pierwsze wyniki zoptymalizowanych struktur w obszarze warstwy środkowej kompozytu. Przeprowadzono optymalizację dla różnych wartości procentowego udziału materiału o większym module Younga, różnych stosunkach modułów Younga wypełniających materiałów oraz grubości warstw zewnętrznych kompozytu. Dokonano również opisu warunków brzegowych modelu, właściwości obu materiałów wypełniających obszar optymalizowany. Pokazano również możliwość maksymalizacji liczby Poissona w modelu. W obszarze o kształcie kwadratu zostały zaprezentowane różnice w wynikach optymalizacji dla różnych gęstości siatki. Przedstawiono również różnice w wynikach, jeśli materiały wypełniające mają takie same lub różne współczynniki Poissona.

Rozdział piąty opisuje optymalizację dwufazową współczynnika Poissona w obszarze o kształcie tzw. „plastra miodu” konwencjonalnego oraz tzw. re-entrant, powstałego przez utworzenie w sześciokątnym plastrze kątów wklęsłych. Dokonano optymalizacji dla różnych wartości procentowego udziału materiału o większym module

Younga i różnych ich stosunkach między materiałami wypełniającymi. Pokazano, że w modelu, który będąc jednofazowy wykazuje dodatni współczynnik Poissona (plaster miodu konwencjonalny), po optymalizacji wykazuje ujemny współczynnik Poissona. Również plaster miodu re-entrant, będąc zbudowany z jednego materiału wykazuje minimalną ujemną liczbę Poissona na poziomie -1.8 , natomiast po optymalizacji dwufazowej jest ona jeszcze mniejsza. Po rozwiązaniu odwrotnego zadania optymalizacji w plastrze miodu re-entrant, złożonym z dwóch faz, można uzyskać dodatni współczynnik Poissona. Dla obszaru optymalizowanego o kształcie konwencjonalnego plastra miodu porównano wyniki optymalizacji z użyciem schematu interpolacji SIMP oraz RAMP. Został również sprawdzony wpływ na wyniki wprowadzenia do optymalizacji parametru regularyzacji o różnych wartościach.

W rozdziale szóstym pokazano wyniki optymalizacji dwufazowej w obszarze struktury anty-tetra-chiralnej, dla różnych grubości łączników i węzłów w tym modelu oraz dla różnych stosunków modułów Younga i procentowego udziału struktury materiału o większym module Younga.

W rozdziale siódmym opisano obliczenia, dla różnych wartości parametru p w modelu interpolacyjnym SIMP. Badania przeprowadzono dla struktur: warstwy środkowej kompozytu, struktury o kształcie konwencjonalnego plastra miodu oraz struktury anty-tetra-chiralnej.

Rozdział ósmy opisuje badania dynamiczne już zoptymalizowanych struktur dwufazowych. Pokazano częstości własne dla wybranych kształtów już po wykonaniu procedury minimalizującej współczynnik Poissona.

Rozdział dziewiąty zawiera podsumowania i wnioski.

Na końcu znajduje się lista publikacji, z których korzystano podczas powstawania niniejszej rozprawy doktorskiej.

2 Przedmiot optymalizacji

2.1 Metamateriały auksetyczne

Metamateriał to rodzaj materiału, którego własności zależą od jego struktury w skali większej niż cząsteczkowa. Są to zwykle złożone materiały kompozytowe, które można zaprojektować tak, aby wykazywały odpowiednie właściwości elektromagnetyczne, akustyczne lub mechaniczne [Banerjee2011]. Wśród tych właściwości mogą występować tak niekonwencjonalne zachowania jak: ujemny współczynnik załamania światła, ujemne współczynniki przenikalności magnetycznej czy elektrycznej oraz ujemny moduł ściśliwości ujawniający się pod wpływem odpowiednich wzbudzeń. Mechanika metamateriałów i ich zachowanie, gdy zostaną poddane różnym rodzajom oddziaływań jest często sprzeczna z intuicją. Z tego powodu często są poddawane krytyce, ale jednocześnie są bardzo ciekawym źródłem dalszych badań i posiadają duże pole do użycia w różnych dziedzinach, oczywiście w wypadku wystąpienia dużej intensywności „ujemnych” właściwości.

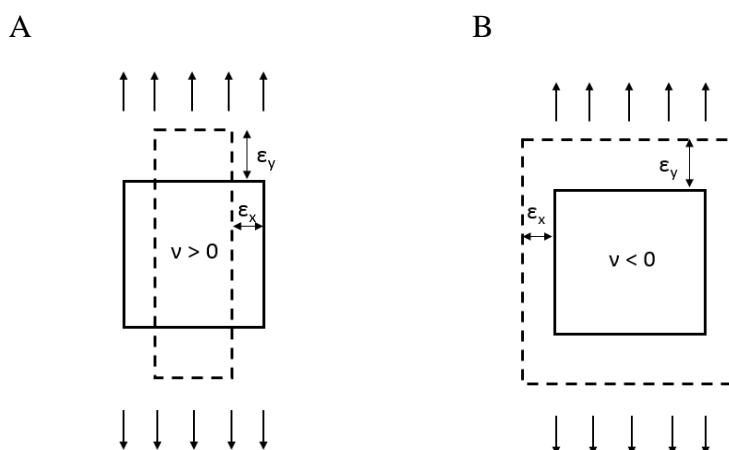
Jedną z grup należących do metamateriałów mechanicznych są materiały o ujemnym współczynniku Poissona, które nazywane są auksetykami. Nazwa pochodzi z języka greckiego („*auxetos*”) i oznacza „ten, który ma tendencję do wzrostu”. W wielu pozycjach naukowych po II wojnie światowej wzmiankowano o możliwościach struktur z ujemną liczbą Poissona. W pracy Gibson [Gibson1982] opisano możliwość jego wystąpienia w dwuwymiarowych strukturach komórkowych. W pracy Almgrena [Almgren 1985] opisano izotropową strukturę trójwymiarową ze współczynnikiem Poissona równym -1 . Pierwsza publikacja, gdzie zaprezentowano właściwości wyprodukowanych syntetycznych materiałów auksetycznych ukazała się w 1987 r. pod tytułem „Struktury piankowe z ujemnym współczynnikiem Poissona” autorstwa R. Lakesa [Lakes1987]. Często podawana jest ona jako rewolucyjna, po publikacji której zdecydowanie wzrosło zainteresowanie materiałami „ujemnymi”. W powyższej pracy nie padło jednak określenie auksetyk. Zostało ono użyte po raz pierwszy przez K. Evansa z Uniwersytetu Exeter w Wielkiej Brytanii, który wytworzył mikroporowaty polietylen z ujemnym współczynnikiem Poissona [Evans1991a, Evans1991b]. Używano początkowo również innych nazw: „anty-guma” (J. Gliick) oraz ang. „dilatational elastic metamaterials” [Milton1992]. Do dziś prowadzone są badania mające na celu opisanie

właściwości istniejących materiałów z ujemnym współczynnikiem Poissona oraz tworzenie całkiem nowych struktur. Kolejnym krokiem jest użycie ich w zastosowaniach przemysłowych.

Współczynnik Poissona definiowany jest jako ujemny stosunek odkształceń poprzecznych do odkształceń wzdłużnych:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} \quad (2.1.1)$$

Znak minus we wzorze jest konsekwencją przyjęcia znaku zakładającego, że wydłużenie jest dodatnim odkształceniem, a skrócenie ujemnym (Rys 2.2.1).



Rys. 2.1.1. A - przedstawienie odkształcenia materiału o dodatnim współczynniku Poissona pod wpływem rozciągania, B - przedstawienie odkształcenia materiału auksetycznego pod wpływem rozciągania

Współczynnik Poissona dla materiałów izotropowych osiąga wartość pomiędzy - 1 a 0.5 dla przestrzeni trójwymiarowej, natomiast dla dwuwymiarowej wartości między - 1 a 1. Materiały i struktury anizotropowe nie posiadają takich ograniczeń i współczynnik Poissona dla nich może przyjmować dowolne wartości w każdym kierunku. Dla najpowszechniej używanych materiałów konstrukcyjnych współczynnik Poissona osiąga wartości 0.27 – 0.3 (stal), 0.2 (beton). Skrajne wartości są osiągane dla niektórych tworzyw sztucznych, gdzie wartość wynosi niemal 0.5 (guma); dla niektórych gatunków drewna wartość wynosi ok. 0.

Ujemna wartość współczynnika Poissona zmienia zachowanie materiału pod wpływem odkształcenia. Zmieniają się wartości, jak również ich wzajemna relacja, modułów sprężystości objętościowej K (tzw. moduł Helmholtza) oraz odkształcalności postaciowej G (tzw. moduł Kirchhoffa). Związki powyższych modułów i współczynnika Poissona podane są we wzorach poniżej:

$$K = \frac{E}{2(1 - \nu)} \quad (2.1.2)$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (2.1.3)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.1.4)$$

$$\frac{K}{G} = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \quad (2.1.5)$$

$$\frac{3K}{2G} = \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \quad (2.1.6)$$

Wzór (2.1.2) obowiązuje dla modułu sprężystości objętościowej dla przypadku dwuwymiarowego, natomiast (2.1.3) dla trójwymiarowego. Wzór na moduł Kirchhoffa (2.1.4) obowiązuje dla obu przypadków. Z wymienionych wzorów wynikają odpowiednie zależności dla modelu 2D (2.1.5) oraz modelu 3D (2.1.6).

Radykalne zmniejszenie współczynnika Poissona powoduje zmniejszenie modułu sprężystości objętościowej K oraz zwiększenie modułu odkształcalności postaciowej G . Jednocześnie stosunek wielkości K/G również maleje, co można interpretować jako zmianę (zmniejszenie) podatności materiału na odkształcenie postaciowe – poprzez zwiększenie wartości modułu Kirchhoffa. Natomiast materiał auksetyczny jest bardziej podatny na odkształcenie objętościowe – staje się bardziej ściśliwy. Zjawisko takie jest opisane w literaturze dla auksetycznych pianek oraz struktur cząsteczkowych o właściwościach auksetycznych [Lakes1987, Friis1988, Haeri1992, Baughman1998, Hall2008].

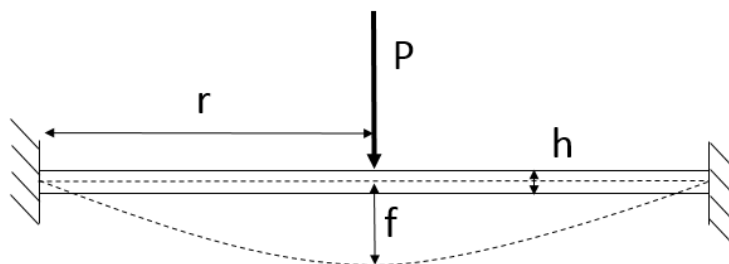
Materiały auksetyczne charakteryzują się również lepszą ochroną przed drganiami, powodują zwiększenie ochronnych właściwości struktur [Webber2008, Lakes1993, Chan1998] i zwiększenie możliwości absorpcji energii [Bezazi2007], niż materiały o dodatnim współczynniku Poissona. Struktura wewnętrzna jest ukształtowana w taki sposób, aby odkształcenie struktury następowało w kierunku wewnętrznym, powodując zagęszczenie materiału w odpowiednim obszarze. Skutkiem takiego zachowania jest wzmocnienie wytrzymałości często w miejscu naprężeń. Jest to związane z tym, iż w materiale o ujemnym współczynniku Poissona energia wewnętrzna związana z naprężeniem rozprowadzana jest po większym obszarze, co skutkuje zmniejszeniem koncentracji naprężeń – zmniejszana jest podatność na uszkodzenie, zwiększa się odporność na pękanie.

Praktycznymi przykładami korzyści związanych z małą wartością współczynnika Poissona są np. zdolność do formowania synklastycznej (kształt „kopuły”) krzywizny pod wpływem poza-płaszczyznowego zginania [Burke1997], podczas gdy w wypadku większej wartości liczby Poissona tworzy się krzywizna antyklastyczna. W przypadku prostego zginania okrągłej płyty siłą skupioną lub ciągłą (Rys 2.1.2 – 2.1.3), wartość jej ugięcia zależy od liczby Poissona i jeśli jej wartość jest mała – również strzałka ugięcia f dąży do 0. Przypadek ten ilustrują poniższe wzory (2.1.7, 2.1.8):

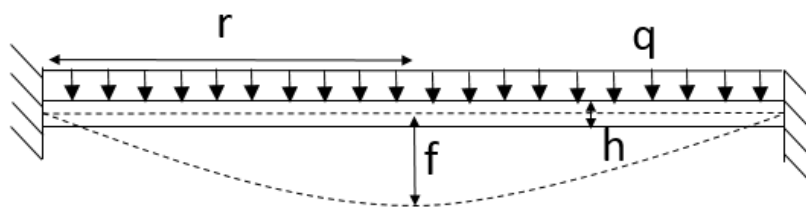
$$f = \frac{3(1 - \nu^2) Pr^2}{4\pi Eh^3}, \quad (2.1.7)$$

$$f = \frac{3(1 - \nu^2) qr^4}{16\pi Eh^3}, \quad (2.1.8)$$

gdzie pierwszy opisuje sytuację, w której na okrągłą płytę działa obciążenie skupione, a w drugim ciągłe.



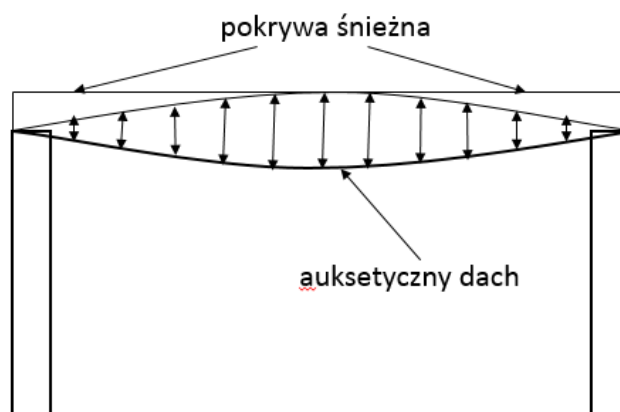
Rys. 2.1.2 Przekrój przez okrągłą płytę obciążoną siłą skupioną P , r – promień, h – grubość, f - ugięcie



Rys. 2.1.3 Przekrój przez okrągłą płytę obciążoną ciągle o intensywności q , r – promień, h – grubość, f - ugięcie

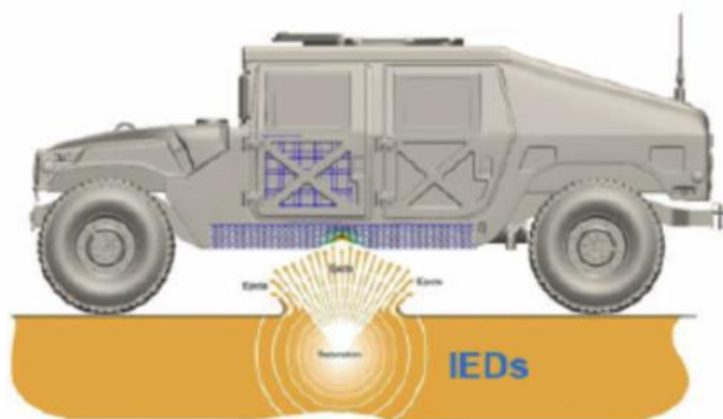
2.2 Zastosowania auksetyków

Auksetyki dzięki wyżej wymienionym korzystnym właściwościom mogą zostać użyte w wielu obszarach przemysłowych zastosowań, w których ich zachowanie jest szczególnie istotne ze względu na funkcjonalność i przydatność. W budownictwie przykładem zastosowania jest ochrona budynków przed nadmierną pokrywą śnieżną [Park2015] – nacisk pokrywy na dach z materiału auksetycznego powoduje jego odkształcenie w taki sposób, iż nadmiar śniegu spada z pokrywy dachowej (Rys. 2.2.1). Struktura o ujemnym współczynniku Poissona może zostać użyta również jako fundament budynków o charakterze ochronnym przed trzęsieniami Ziemi – gdzie ograniczony zostaje niszczący wpływ trzęsienia poprzez absorpcję energii przez materiał auksetyczny. Dzięki zdolności absorpcji drgań elementy z ujemnym współczynnikiem Poissona używane są do budowy membran filtrów o zmiennej przepuszczalności [Alderson2000, Rasburn2001], materiałów z pamięcią kształtu [Bianchi2010], tłumików akustycznych [Howell1994, Scarpa2004].



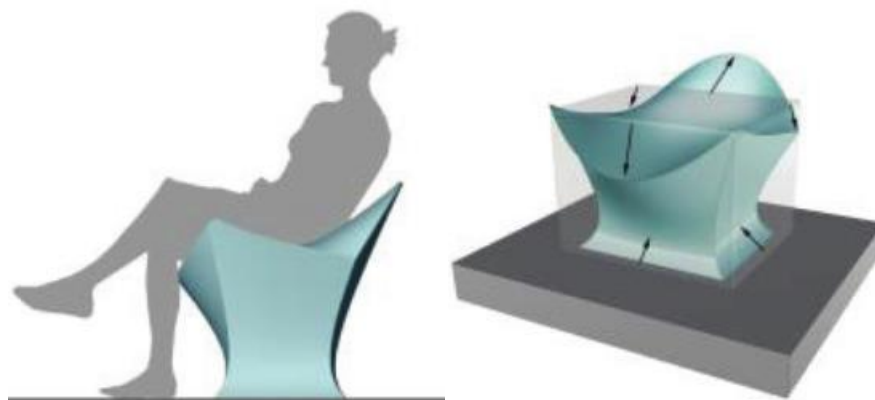
Rys. 2.2.1 Ilustracja efektu odkształcenia dachu powodującego zsuniecie się z niego niebezpiecznej pokrywy śnieżnej

W motoryzacji i inżynierii wojskowej również przydatny jest charakter odkształcenia struktur o ujemnym współczynniku Poissona. Elementy auksetyczne stosowane są jako tłumiki w budowie pojazdów o ekstremalnie wysokiej odporności na wybuchy oraz zderzenia. Odpowiednie odkształcenie elementów zderzaka lub karoserii auta może doprowadzić do zmniejszenia obrażeń uczestników zderzeń i kolizji i to zarówno osób podróżujących w pojeździe, jak i osób na zewnątrz (Rys. 2.2.2) [Imbalzano2017].



Rys. 2.2.2 Pojazd wzmocniony elementami auksetycznymi o zwiększonej odporności na wybuchy i eksplozje [Imbalzano2017]

Odpowiedni sposób odkształcenia pod wpływem naprężenia czyni z auksetyków materiał ochronny, który zastosowany może być w elementach chroniących ludzi przed kontuzjami czy skutkami uderzeń. Tworzone są z nich ochronne kaski, obuwie, kamizelki kuloodporne czy ochraniacze na kolana i golenie. Zastosowanie struktur o ujemnym współczynniku Poissona może mieć wymiar nie tylko zwiększenia bezpieczeństwa, ale i zwykłej poprawy ergonomii. Siedzenia (Rys. 2.2.3), odzież czy buty wykonane z auksetyków bardzo łatwo dopasowują się do kształtu ciała człowieka (Rys. 2.2.4) poprawiając ergonomię i komfort osoby siedzącej na siedzeniu lub noszącej odzież czy buty. Tworzą również elementy zabezpieczające transport wrażliwych materiałów odpowiednio rozkładając naprężenia spowodowane wstrząsami czy innymi niedogodnościami związanymi z przewożeniem tych materiałów.



Rys. 2.2.3 Siedzenie wykonane z materiału auksetycznego o zwiększonej ergonomii [Park2015]

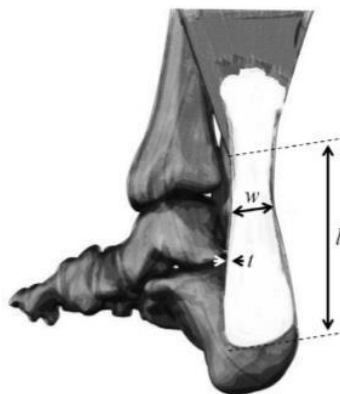


Rys. 2.2.4 Odzież samo-dopasowująca się do kształtu ręki pozwala na zwiększenie komfortu noszącego [www1]

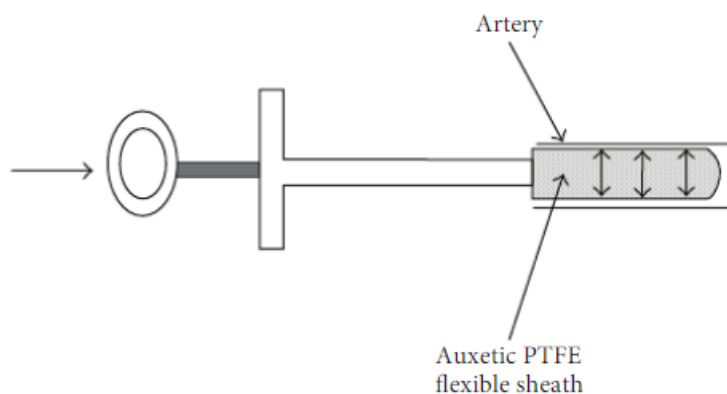
Materiały o ujemnym współczynniku Poissona stosowane są również w naukach biomedycznych. Zbudowane z nich są bandaże, które skutecznie uciskają ranę doprowadzając do szybszego wyleczenia (Rys. 2.2.5), a także tzw. stenty, które prowadzą do zwiększenia przekroju, przez który przepływa krew tworząc pewien rodzaj sztucznych naczyń krwionośnych odpornych na niebezpieczne przewężenie przekroju naczynia (Rys. 2.2.6).

Właściwości auksetyczne posiadają niektóre struktury, które istnieją w przyrodzie i ich auksetyczność jest naturalna. Są to niektóre ścięgna i tkanki w ciałach ludzi i zwierząt, jak skóra niektórych zwierząt, kości gąbczaste [Williams 1982], skóra krów [Lees1991], ścięgna Achillesa [Gatt2015], jak również naturalnie występujące minerały o nazwie augit, krystobalit [Yeganeh-Haeri1992, Burke1997]. Także niektóre związki chemiczne jak siarczek żelaza [Love1944]; pierwiastki: arsen, bizmut [Gunton1972] oraz

kadm [Li1976]. W specyficznym krystalograficznym kierunku właściwości auksetyczne wykazują otrzymane w sposób laboratoryjny pierwiastki gazów szlachetnych w stanie stałym. Tworzą one sieć regularną płasko centrowaną [Baughman1998]. Współczynnik Poissona w okolicy zera lub minimalnie ujemną posiadają także niektóre rodzaje drewna (dąb korkowy) [Stavroulakis2005].



Rys. 2.2.5 Ściągno Achillesa w niektórych kierunkach wykazuje ujemny współczynnik Poissona [Gatt2015]



Rys. 2.2.6 Auksetyczny PTFE (poli-tetra-fluoro-etylen) wprowadzony do naczynia krwionośnego [www2]

2.3 Podział struktur o ujemnym współczynniku Poissona

Od czasu zaproponowania pierwszej struktury auksetycznej zostało zaprojektowanych wiele modeli struktur, aby uzyskać efekt występowania ujemnego współczynnika Poissona. Są to modele struktur, które występowały zarówno w skali makro, skali mikro, jak i w skali cząsteczkowej. W skali makro efekt auksetyczności

pojawia się w wyniku działania prostych mechanizmów w strukturach złożonych z powtarzających się identycznych komórek (struktury periodyczne).

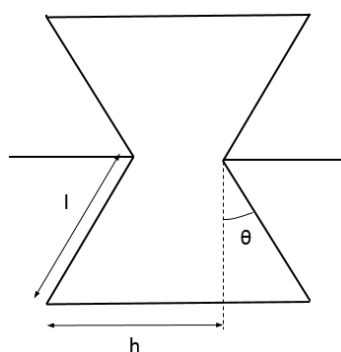
Materiały auksetyczne w makroskali można podzielić na struktury następujących typów: plastrów miodu re-entrant, chiralne i antychiralne, obracających się figur, gwiazdowe, „missing rib”, „double arrowhead” lub plastrów kagome. W skalach mikro- i cząsteczkowej można wyróżnić auksetyczne pianki, mikroporowate polimery oraz polimery ciekłych kryształów.

Jednym z najwcześniej opracowanych modeli struktur z ujemnym współczynnikiem Poissona są struktury plastrów miodu „re-entrant”. Przymiotnik „re-entrant” oznacza, iż kształt posiada w swojej budowie kąt większy niż 180° skierowany do wewnątrz. Po raz pierwszy kształt re-entrant w formie powtarzających się komórek został opublikowany w pracy [Gibson1982]. Poniżej został przedstawiony najbardziej podstawowy model heksagonalnej komórki re-entrant (Rys. 2.3.1). Liczba Poissona takiej pojedynczej komórki [Gibson1982] jest określana zgodnie z wzorem (2.3.1):

$$v = \frac{\sin \theta \left(\frac{h}{l} + \sin \theta \right)}{\cos^2 \theta} \quad (2.3.1)$$

gdzie: h , l , θ są parametrami geometrycznymi komórki re-entrant.

W trakcie wielu lat badań zostało opracowanych wiele bardziej skomplikowanych modeli o ujemnym współczynniku Poissona m.in. [Gibson1997, Evans1994, Choi1995a, Choi1995b, Master1996, Chan1997, Blumenfeld2005].



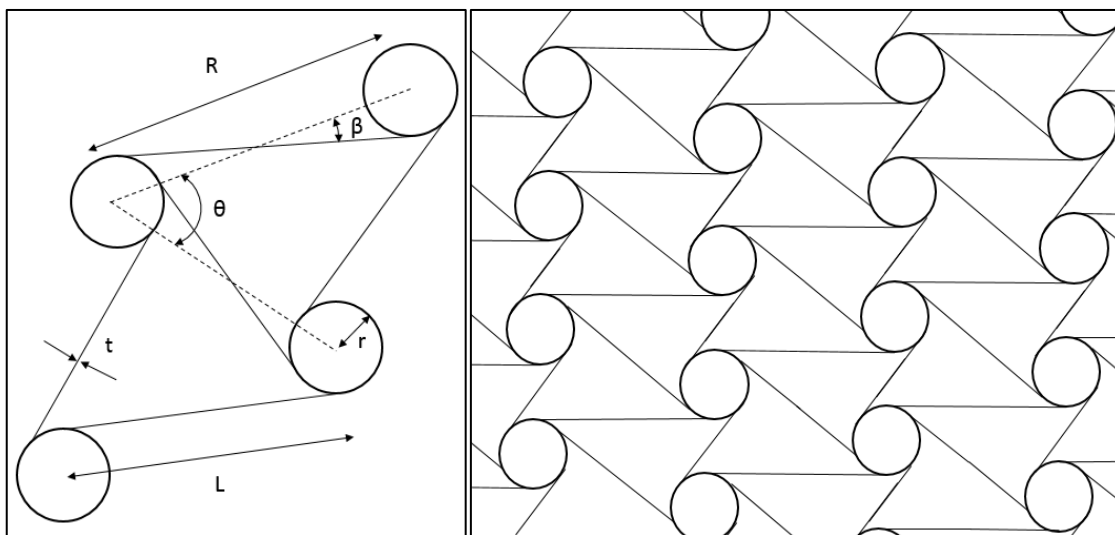
Rys. 2.3.1 Podstawowa heksagonalna komórka struktury plastrów miodu re-entrant

Kolejnym modelem struktury auksetycznej w skali makro są tzw. struktury chiralne, po raz pierwszy zaprezentowane w kontekście ujemnego współczynnika

Poissona przez Pralla i Lakesa w pracy [Prall1996]. Słowo chiralne oznacza fizyczną właściwość zdolności do obrotu. Pojedyncza auksetyczna struktura składa się z centralnych węzłów, którymi są okręgi, prostokąty lub inna geometria oraz łączników (ang. *ligaments*). Struktura chiralna powstaje poprzez połączenie wielu pojedynczych komórek. Efekt auksetyczny uzyskiwany jest poprzez zawijanie i odwijanie łączników wokół węzłów w reakcji na zadaną siłę. W przeprowadzonych w pracy Pralla i Lakesa [Prall1996] teoretycznych i eksperymentalnych badaniach wartość liczby Poissona dla podstawowej struktury chiralnej określono na ok. -1. Przykład pojedynczej komórki oraz struktury został przedstawiony na Rys. 2.3.2. Liczbę Poissona dla struktury opisuje się wzorem [Prall1996]:

$$v = \frac{4(t/L)^2}{(t/L)^4 \cos^2 \beta + 1 - \cos^2 \beta + 3(t/L)^2} + 1 \quad (2.3.2)$$

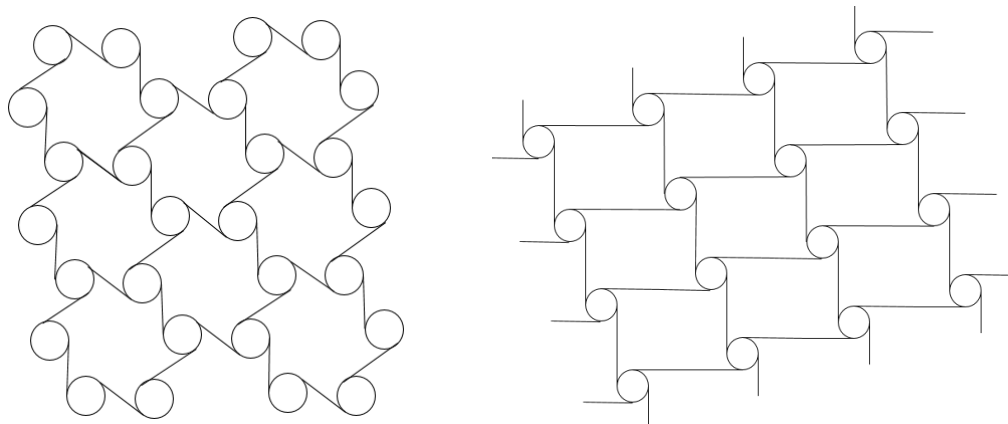
gdzie: t – grubość łączników, L, β – wielkości geometryczne opisane na Rys. 2.3.2.



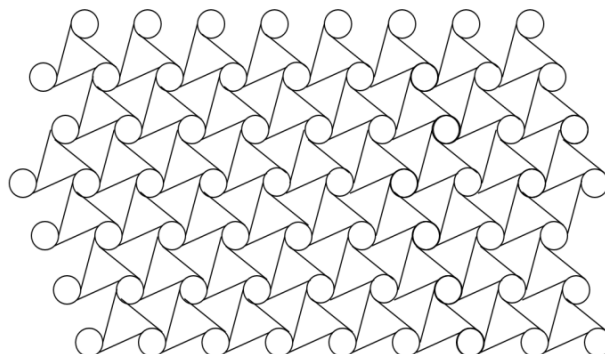
Rys. 2.3.2 Przykład struktury hekza-chiralnej: pojedyncza komórka oraz struktura chiralna powstała ze złożenia pojedynczych komórek

Struktury chiralne można podzielić ze względu na dwa kryteria: ilość łączników, które łączą się w jednym węźle oraz sposób połączenia pomiędzy pojedynczymi komórkami. Liczba łączników wychodzącego z jednego węzła struktury chiralnej to najczęściej trzy, cztery lub sześć i wtedy odpowiednio nazywa je się tri-, tetra- lub hekza-chiralnymi. Pojedyncze komórki mogą być łączone między sobą poprzez ich zwykłą multiplikację lub poprzez łączenie ze sobą komórki i jej lustrzanego odbicia, a następnie multiplikację tej pary. W pierwszym przypadku struktury nazywa się po prostu

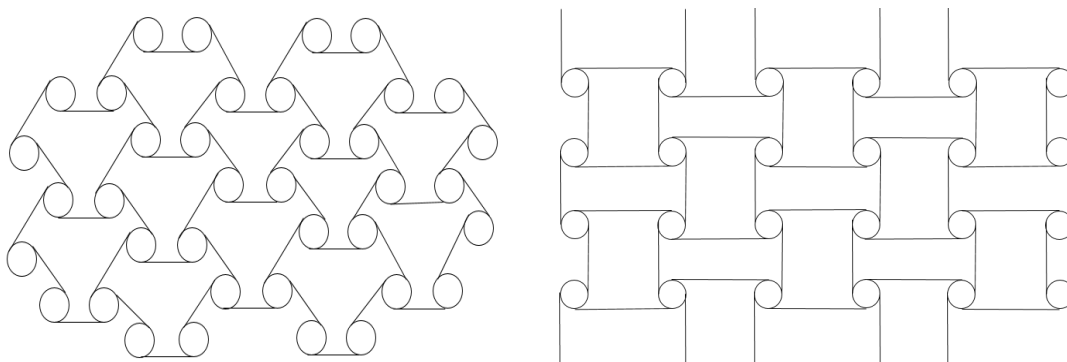
chiralnymi, natomiast w drugim dodaje się przyrostek *anty-*. W pracy [Ruzzene2011] zostały zbadane kolejne modele struktur chiralnych m.in. poprzez wprowadzenie elastyczności węzłów. Statyczne i dynamiczne zachowanie takiej struktury było badane w pracach [Liu2012, Bacigalupo2014]. Rysunki 2.3.3 – 2.3.6 przedstawiają struktury chiralne i *anty-chiralne* przy różnej ilości łączników dochodzących do węzła. Najmniejszy współczynnik Poissona uzyskano dla struktury *anty-tetra-chiralnej* – wynoszący -1.839 [Prall1996].



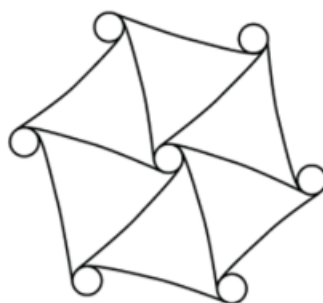
Rys. 2.3.3 Struktura tri-chiralna oraz tetra-chiralna



Rys. 2.3.4 Struktura heksa-chiralna

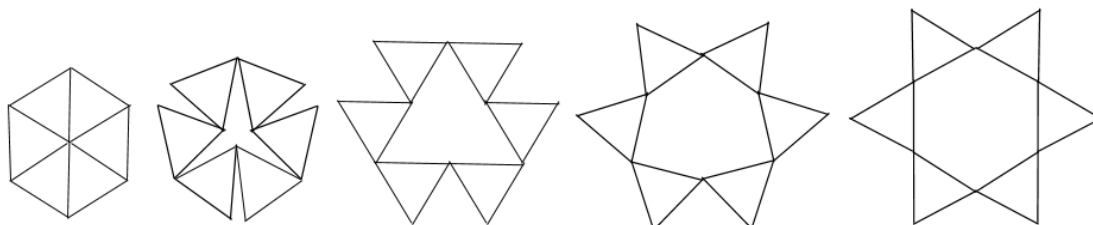


Rys. 2.3.5 Struktura anti-tri-chiralna oraz anti-tetra-chiralna

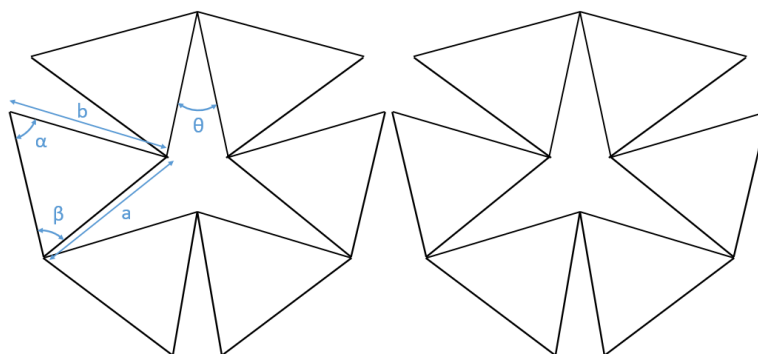


Rys. 2.3.6 Struktura anti-heksa-chiralna

Innym modelem struktur, które mogą posiadać właściwości auksetyczne są struktury składające się z tzw. sztywnych lub półsztywnych obracających się jednostek (np. Rys. 2.3.7 – 2.3.8). Tymi jednostkami są trójkąty, prostokąty lub kwadraty, które tworząc połączoną strukturę obracają się pod wpływem obciążenia, prowadząc do efektu auksetycznego. Początkowo struktura ta była używana tylko do uzyskania ujemnego współczynnika Poissona w skali mikro, ale zostały opracowane modele, które są używane w skali makro w zakresie liniowej i nieliniowej teorii sprężystości. Modele struktur z obracającymi się jednostkami były rozwijane przez Grima [Grima2005a, Grima2005b, Grima2008a, Grima2008b]. Struktury połączonych ze sobą trójkątów, które są auksetyczne nazywa się również plastrami Kagome (ang. *Kagome lattice*) [Gaspar2005].



Rys. 2.3.7 Struktura obracających się trójkątów równobocznych: 5 etapów następujących po sobie w wyniku działania siły



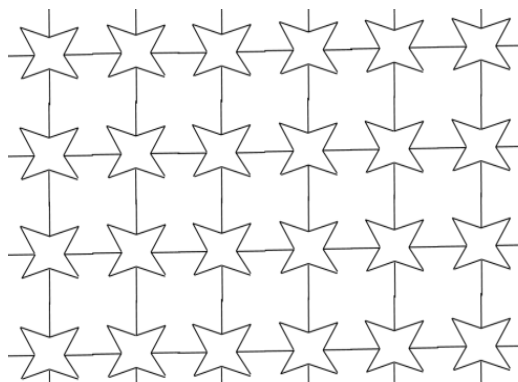
Rys. 2.3.8 Struktura obracających się trójkątów: przedstawienie wymiarów i kątów w trójkącie

Liczba Poissona dla struktury obracających się trójkątów obliczana jest zgodnie ze wzorem (2.3.3) [Grima2005a]:

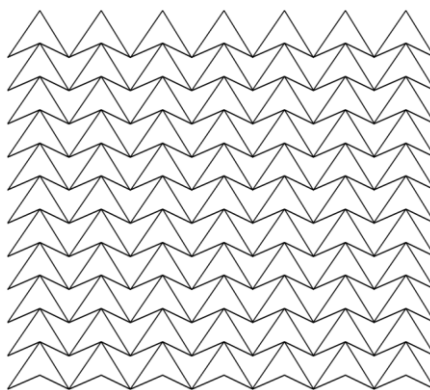
$$v = \frac{b \cos(\alpha + \frac{\theta}{2}) + a \cos(\frac{\theta}{2})}{\tan(2\alpha + \frac{\theta}{2})b \sin(\alpha + \frac{\theta}{2}) + a \sin(\frac{\theta}{2})} \quad (2.3.3)$$

gdzie: a , b , α , β – wielkości geometryczne struktury, jak na Rys. 2.3.8.

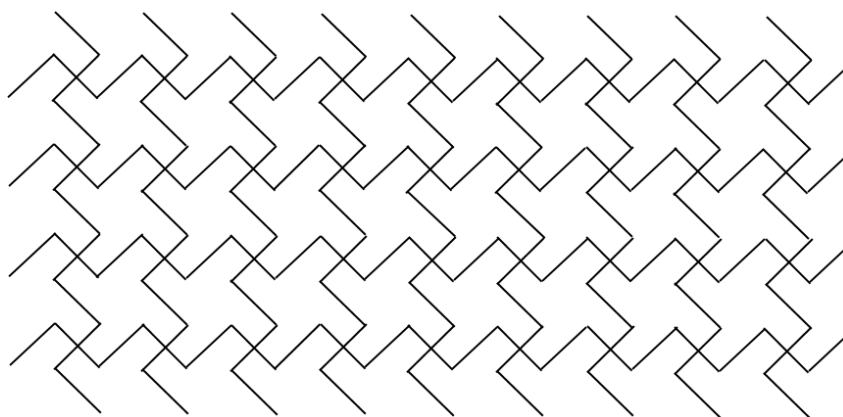
Kolejnymi strukturami składającymi się z pojedynczych komórek, które mogą wykazywać właściwości auksetyczne są struktury gwiazdowe (ang. star-like) [Theocaris 1997] (Rys. 2.3.9), struktury double-arrowhead (Rys. 2.3.10) i struktury „missing rib” [Ali2014] (Rys. 2.3.11).



Rys. 2.3.9 Przykład połączonych ze sobą komórek struktury gwiazdowej



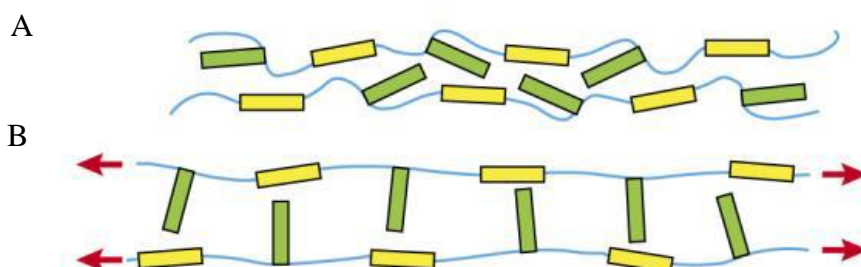
Rys. 2.3.10 Przykład połączonych ze sobą komórek struktury „double arrowhead”



Rys. 2.3.11 Przykład połączonych ze sobą komórek struktury „missing rib”

Właściwości auksetyczne generowane w mikroskali występują w mikroporowatych polimerowych i anizotropowych włóknowych kompozytach. Pierwszy mikroporowaty materiał polimerowy został przedstawiony w pracy [Caddock1989]. Był nim zmodyfikowany PTFE (poli-tetra-fluoro-etylen) o właściwościach skrajnie anizotropowych, który w jednym z kierunków charakteryzował się liczbą Poissona ok. -12 . Efekt ujemnej wartości współczynnika Poissona jest uzyskiwany dzięki wewnętrznej budowie składającej się ze zgrubień połączonych włóknami. Pod wpływem obciążenia następuje obrót zgrubień dookoła włókien prowadzący do wystąpienia właściwości auksetycznych. Model dwuwymiarowy takiej struktury przedstawia Rys. 2.3.12.

Właściwości auksetyczne wykazują również anizotropowe włókniste kompozyty. Mogą one w niektórych kierunkach osiągać ujemne wartości współczynnika Poissona, poprzez odpowiednie ułożenie warstw w kompozycie. Materiał taki ma wysoki stopień anizotropii, a auksetyczność ujawnia się tylko w wąskim przedziale kąta pomiędzy kierunkiem ułożenia włókien a kierunkiem siły obciążającej.



Rys. 2.3.12 Ilustracja efektu występowania ujemnego współczynnika Poissona w strukturze mikroporowatego polimeru: A - struktura początkowa, B - widok struktury po działaniu siły rozciągającej [Chan1997]

Duże zainteresowanie naukowców w ostatnim czasie wzbudzają struktury, których wielkość odkształcenia, a przez to także i współczynnik Poissona zależą od warunków panujących w zmieniającym środowisku zewnętrznym oraz od obciążeń, działających na materiał; np. temperatura, pole magnetyczne, działająca siła lub przemieszczenie. W wielu pracach [Shadrivov2015, Lakes2007, Lakes2017, Grima2013, Li2016a, Li2016b, Ha2016] pokazano, że za pomocą powyższych czynników można sterować wartością liczby Poissona tak, aby struktura w pewnych znanych i ustawialnych warunkach wykazywała zachowanie auksetyczne, a w innych warunkach nie.

2.4 Zastosowanie optymalizacji topologicznej w celu projektowania metamateriałów i kompozytów

W ostatnich latach nastąpiło znaczne zwiększenie liczby publikacji dotyczących zastosowania metod optymalizacji topologicznej w celu projektowania struktur o korzystnych właściwościach mechanicznych. W większości były to prace dotyczące prób powiększenia korzyści płynących ze strukturalnej budowy metamateriałów i kompozytów. Metody oraz przykłady zastosowań metod optymalizacji topologicznej z różnymi funkcjami celu do rozkładu jednego lub kilku materiałów zostały opisane w fundamentalnych monograficznych pracach Bendsøe [Bendsøe 1999, Bendsøe2003]. Wcześniej Thomsen [Thomsen1992] opisał użycie optymalizacji topologicznej do projektowania struktur warstwowych złożonych z jednego lub dwóch materiałów. W pracy Larsen i inni [Larsen1997] opisano sposób projektowania mikromechanizmów i struktur mechanicznych z ujemnym współczynnikiem Poissona. Sigmund [Sigmund2000] – zaprezentował klasę izotropowych kompozytów charakteryzujących się ekstremalnie dużym współczynnikiem rozszerzalności objętościowej. W opisanej klasie mechanicznych metamateriałów dwuwymiarowych przy niewielkich objętościach są prętowymi strukturami przypominającymi auksetyczne komórki nazywane plastrami miodu. Gibiansky [Gibiansky2000] opisał analitycznie i numerycznie izotropowe kompozyty składające się z trzech lub więcej faz, projektowane przy pomocy optymalizacji topologicznej. Schwerdtfeger [Schwerdtfeger2011] zaprezentował proces projektowania auksetycznych struktur zbudowanych z metalu, pracujących jako elementy mechanizmów o rozmiarach rzędu milimetrów. Kaminakis i inni w pracach [Kaminakis2012, Kaminakis2015] użyli metody optymalizacji topologicznej do

zaprojektowania auksetycznej mikrostruktury. Sposób optymalizacji polegał na połączeniu Metody Elementów Skończonych z ewolucyjno-hybrydowym algorytmem. Łukasiak [Łukasiak2014] przedstawił nowy numeryczny algorytm odwróconej homogenizacji dla kompozytów z użyciem komórek heksagonalnych. W pracach Czarneckiego i współautorów [Czarnecki2015a, Czarnecki2015b, Czarnecki2017] został przyłożony nacisk na problem możliwości wytworzenia elementów wykonanych z dwóch rodzajów niehomogenicznych materiałów: izotropowego i posiadającego sieć krystaliczną o układzie regularnym o minimalnej odkształcalności. W procesie izotropowego projektowania materiałów (IMD – Isotropic Material Design) pojawiają się podobszary, w których współczynnik Poissona jest ujemny i jest możliwość jego uzyskania w całym izotropowym zakresie od 0 do -1. Andreassen [Andreassen2014] zaprezentował metodę projektowania możliwych do wytworzenia ekstremalnie elastycznych materiałów, wykazujących nieintuicyjne właściwości, jak ujemny współczynnik Poissona.

Tematyka podobna do prezentowanej w niniejszej pracy poruszana była w pracy [Strek2016], gdzie za pomocą schematu interpolacji efektywnych właściwości SIMP oraz algorytmu obliczeniowego optymalizacji MMA (ang. Method of Moving Asymptotes – Metoda Ruchomych Asymptot) minimalizowano efektywny współczynnik Poissona rdzenia kompozytu w kierunku poprzecznym poprzez wypełnienie go dwoma materiałami izotropowymi o dodatniej liczbie Poissona.

W pracy [Strek2017] minimalizowano współczynnik Poissona w obszarze o kształcie anty-tetra-chiralnym. Materiał miękki wzmocniono materiałem o większej twardości wpływając na właściwości mechaniczne struktury. Zastosowana metoda interpolacji wynikowych właściwości to również SIMP oraz algorytm optymalizacji MMA. W wyniku optymalizacji otrzymano strukturę o efektywnym współczynniku Poissona kilkukrotnie mniejszym aniżeli struktura homogeniczna o identycznym kształcie.

Podobnie w pracy [Strek2017a], gdzie optymalizowanym obszarem były struktury o kształcie heksagonalnego plastra miodu w formie konwencjonalnej oraz re-entrant.

3 Zastosowane metody i algorytmy obliczeniowe

3.1 Związek konstytutywny

Związek konstytutywny to związek opisujący zależność pomiędzy naprężeniami i odkształceniami. Rozważane materiały znajdują się w zakresie liniowej sprężystości. Uogólnione prawo Hooke'a dla takiego materiału ma postać [Ameen2005]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.1.1)$$

gdzie: $\boldsymbol{\sigma}$ to tensor odkształceń, \mathbf{D} – jest to macierz sprężystości lub inaczej tensor konstytutywny, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – to tensor małych odkształceń:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T), \quad (3.1.2)$$

a \mathbf{u} to wektor przemieszczenia.

Macierz sprężystości (konstytutywna) dla izotropowego materiału zapisuje się za pomocą stałych Lamego (λ oraz μ).

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (3.1.3)$$

a stałe Lamego opisywane są następującymi wzorami:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (3.1.4)$$

gdzie: E to moduł Younga, ν to współczynnik Poissona, G to moduł Kirchhoffa.

3.2 Równanie ruchu Naviera

Równanie ruchu (równanie Naviera) dla materiału liniowo sprężystego zgodnie z II-gą zasadą mechaniki Newtona ma postać [Lautrup2005]:

$$\rho \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F} \quad (3.2.1)$$

gdzie: ρ to gęstość, t – czas, \mathbf{F} – siła masowa, której wartość zwykle się pomija: $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Uwzględniając liniowy związek konstytutywny (równania z rozdziału 3.1) otrzymujemy równanie (3.2.2) w postaci:

$$\rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3.2.2)$$

Dla zagadnienia harmonicznego przemieszczenie jest definiowane poprzez równanie, jak niżej:

$$\frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = -\omega^2 \mathbf{u} \quad (3.2.3)$$

gdzie: ω to częstość. Wektor przemieszczenia ma formę zespoloną i jest definiowany jako:

$$\mathbf{u}(x) = u_1(x) + iu_2(x) \quad (3.2.4)$$

gdzie harmoniczne przemieszczenie jest częścią rzeczywistą liczby zespolonej:

$$\mathbf{u}(x, t) = \text{Re}[\mathbf{u}(x)]e^{-i\omega t} \quad (3.2.5)$$

Korzystając z wyżej wymienionych równań równanie harmoniczne ruchu można zapisać jako:

$$-\rho\omega^2 \mathbf{u} - (\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{0}. \quad (3.2.6)$$

W zagadnieniach stacjonarnych ($\frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = 0$), w większości rozważanych w niniejszej pracy, równanie (3.2.1) ma postać:

$$-\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (3.2.7)$$

3.3 Metoda Elementów Skończonych

Metoda elementów skończonych (MES) w metodach optymalizacji topologicznej jest używana do określenia sposobu odkształcenia geometrii w kolejnych krokach procedury optymalizacji. Podczas procesu znajdowania optymalnego współczynnika Poissona następuje zmiana macierzy sztywności struktury w każdym kroku optymalizacji.

MES należy do metod rozwiązywania zagadnień brzegowo-początkowych i jest metodą najpowszechniej stosowaną w analizie numerycznej. Szczegółowy opis metody, jak i zastosowania został podany w pracach zagranicznych i polskich naukowców [Zienkiewicz1991, Rusiński2000, Kleiber1985]. Podstawowymi pojęciami metody są element skończony – czyli wydzielony fragment struktury oraz węzeł – miejsce łączenia elementów skończonych. Głównym celem metody jest umożliwienie analizy złożonych konstrukcji poprzez dyskretyzację obiektu – sprawienie, że będzie składał się on z wielu elementów skończonych. Dalsza analiza wielkości fizycznych następuje wewnątrz konkretnego elementu skończonego. Dla każdego węzła zostają zapisane równania przemieszczeniowe tworząc tym samym dyskretny model całej struktury. Znalezienie odkształceń w strukturze złożonej pod określonym obciążeniem i w konkretnych warunkach podparcia opiera się na rozwiązaniu równania:

$$\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\delta} = \mathbf{F} \quad (3.3.1)$$

gdzie: \mathbf{K} to macierz sztywności, $\boldsymbol{\delta}$ – wektor przemieszczeń, \mathbf{F} - wektor sił.

Macierz sztywności dla modeli dwuwymiarowych w płaskim stanie naprężenia jest definiowana poprzez poniższy wzór:

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} c A \quad (3.3.2)$$

gdzie: \mathbf{D} to macierz sprężystości, c – grubość elementu (jeśli jest stała), A – pole elementu skończonego, \mathbf{B} jest to macierz występująca w poniższym wzorze, zależności pomiędzy przemieszczeniami w dowolnym punkcie elementu skończonego a odkształceniami węzłów w postaci macierzowej:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \boldsymbol{\delta}_i \quad (3.3.3)$$

gdzie: $\boldsymbol{\delta}_i$ to wektor przemieszczeń węzłów elementu skończonego, który gdy element jest trójkątny (w niniejszej pracy struktury będą dzielone w większości na trójkątne elementy skończone), a węzły oznaczone literami d, e, f zapisuje się jako:

$$\boldsymbol{\delta}_i = \begin{bmatrix} \delta_d \\ \delta_e \\ \delta_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_d \\ v_d \\ u_e \\ v_e \\ u_f \\ v_f \end{bmatrix}. \quad (3.3.4)$$

Za pomocą powyższego wektora definiuje się wektor przemieszczeń w dowolnym punkcie elementu skończonego:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}_i \quad (3.3.5)$$

gdzie: \mathbf{N} to wektor funkcji kształtu zależny od rodzaju elementu skończonego. Dla elementu o kształcie trójkąta o węzłach oznaczonych d, e, f mamy:

$$\mathbf{N} = [N_d \quad N_e \quad N_f]. \quad (3.3.6)$$

Ponieważ wektor odkształceń definiuje się dla przypadku płaskiego stanu naprężenia (ε_x – odkształcenie w osi x , ε_y – odkształcenie w osi y , γ_{xy} – odkształcenie postaciowe w płaszczyźnie x - y) jako:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.3.7)$$

Po wstawieniu równania (3.3.5) do powyższego równania otrzymujemy zależność:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_d}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_f}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_d}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_f}{\partial y} \\ \frac{\partial N_d}{\partial y} & \frac{\partial N_d}{\partial x} & \frac{\partial N_e}{\partial y} & \frac{\partial N_e}{\partial x} & \frac{\partial N_f}{\partial y} & \frac{\partial N_f}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_d \\ v_d \\ u_e \\ v_e \\ u_f \\ v_f \end{bmatrix} \quad (3.3.8)$$

Powyższa macierz w pełni definiuje macierz \mathbf{B} z wzoru (3.3.2).

Do zdefiniowania macierzy \mathbf{K} potrzebna jest również macierz sprężystości \mathbf{D} , która w przypadku płaskiego stanu naprężenia ma postać:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}. \quad (3.3.9)$$

Za pomocą równania (3.3.1) znajdowane są przemieszczenia konstrukcji, następnie zgodnie z równaniem (3.3.8) wyliczane są odkształcenia, a ostatecznie poprzez równanie uogólnionego prawa Hooke'a (3.1.1) naprężeń z równania Naviera dla zagadnienia stacjonarnego (3.2.7).

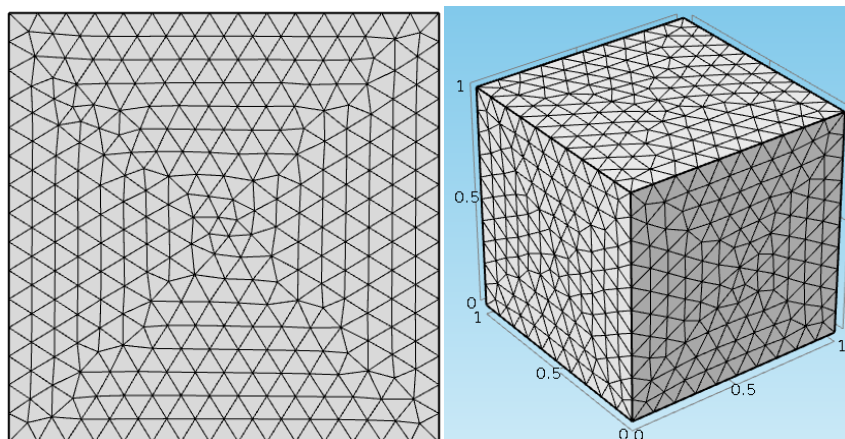
Metoda Elementów Skończonych jest zwykle zaimplementowana w systemie CAD (ang. Computer Aided Design) i pozwala na bardzo szybką analizę przemieszczeń konstrukcji złożonych już na etapie projektowania. Jak wspomniano jest także używana w optymalizacji topologii, jeśli optymalizacja ta dotyczy przemieszczeń.

Metoda MES podczas dyskretyzacji zakłada pewne uproszczenie modelu, usuwając z niego elementy nieistotne, natomiast w obszarach, gdzie potrzebna jest wyjątkowo duża dokładność siatka elementów skończonych powinna zostać zagęszczona.

Często element skończony upraszcza model konstrukcji ponieważ mogą nim być obiekty jednowymiarowe (np. belka), dwuwymiarowe (np. tarcza i membrana) oraz trójwymiarowe (np. bryły). Dla celów dyskretyzacji modelu użyte mogą być różne rodzaje elementów skończonych, których kryteriami podziału są: liczba wymiarów, jakimi można opisać element, kształt geometryczny, typ i stopień wielomianu założonej funkcji kształtu elementu skończonego, liczbę węzłów w elemencie, rodzaje więzów ogólnych, nałożonych na element skończony.

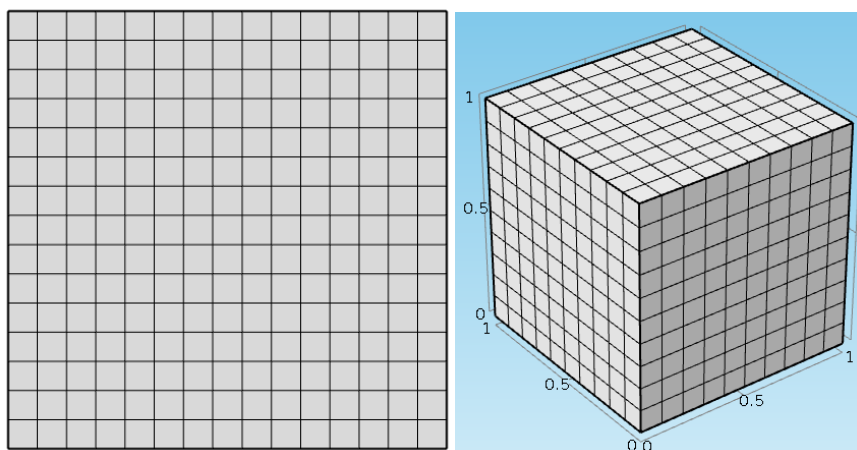
W przypadku modeli użytych w niniejszej pracy zostają one podzielone na elementy należące do grupy powierzchniowych. W celu podziału struktury na elementy skończone stosuje się algorytmy generacji siatki, których rodzajów jest bardzo dużo . Najpowszechniej stosowanymi algorytmami generacji siatki są:

a) automatyczny czyli algorytm Delaunay'a – jest to najbardziej ogólny algorytm. Tworzy elementy trójkątne na zdefiniowanych powierzchniach i elementy czworokątne w zdefiniowanych objętościach (Rys. 3.3.1),



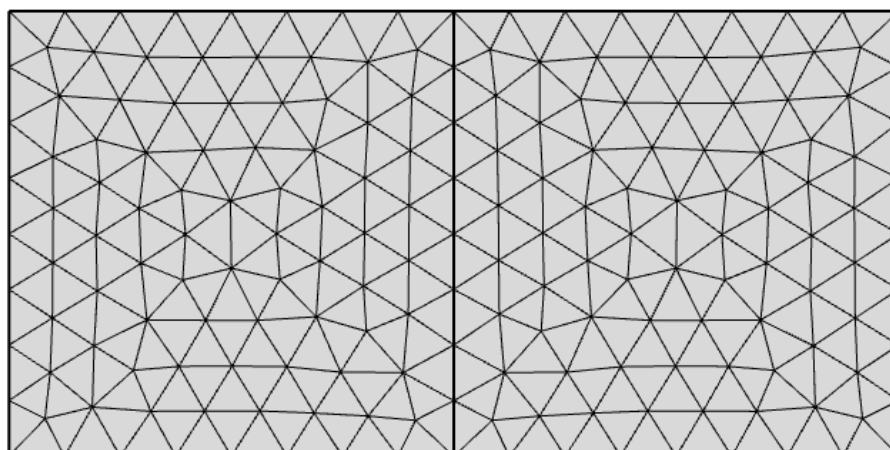
Rys 3.3.1 Ilustracja siatki tworzonyj algorytmem automatycznym

b) siatka topologiczna – mapowana - pozwala na wykonanie siatki na powierzchniach prostokątnych elementami prostokątnymi (lub czworokątnymi) oraz w objętościach równoległościennych elementami sześciocziennymi („cegłami”) (Rys. 3.3.2),



Rys 3.3.2 Ilustracja siatki topologicznej (mapowanej)

c) siatka “kopiowana” czyli dołączona (*linked*) - generator pozwala nałożyć tę samą siatkę na powierzchnie dołączone przez geometryczną transformację. Może być użyty tylko do powierzchni (Rys. 3.3.3),



Rys 3.3.3 Ilustracja siatki kopiowanej (dołączanej)

d) siatki mieszane - jest to kombinacja poprzednich generatorów stosowaną w obiektach, które mogą być podzielone na subdomeny o prostych kształtach.

3.4 Schematy interpolacyjne SIMP i RAMP

Wymieniona w poprzednich rozdziałach, jedna z metod interpolacji rozkładu materiału lub materiałów – SIMP z racji szerokiego zastosowania w niniejszej pracy zostanie szerzej omówiona. Metoda ta jest stosowana w optymalizacjach przeprowadzanych numerycznie, na przykład z użyciem metody elementów

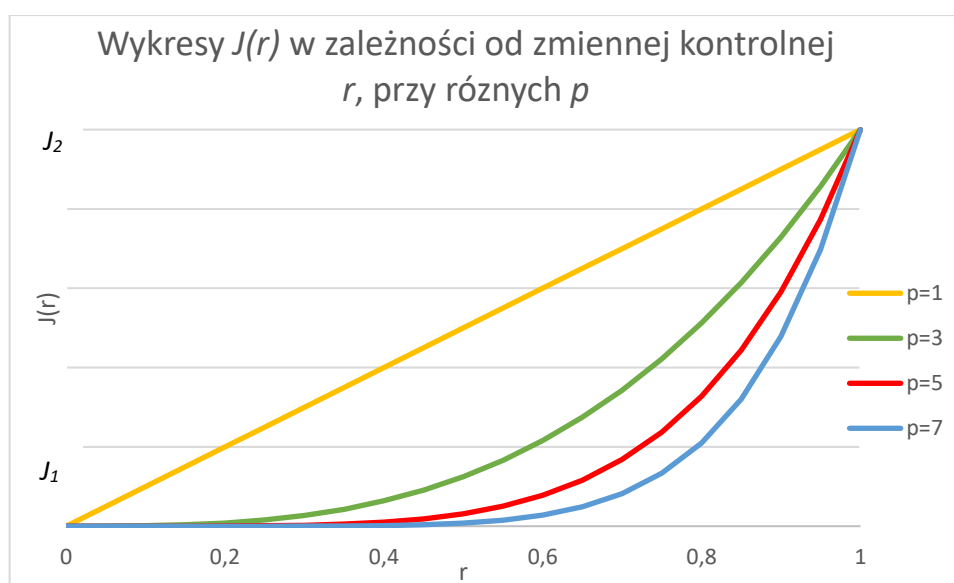
skończonych. Na początku procedury definiuje się obszar obliczeniowy, który obejmuje wszystkie miejsca, w których może zostać umieszczony materiał. Obszar ten z powodu konieczności analizy numerycznej zostaje w kolejnym etapie zdyskretyzowany. Następnie wyznaczana jest zmienna projektowa, którą jest gęstość materiału fikcyjnego.

Analiza efektywnych właściwości dwufazowej domeny za pomocą metody SIMP opiera się na obliczeniu wartości ogólnych właściwości, tj. moduł Younga, współczynnik Poissona i gęstość. Podstawa schematu SIMP opiera się na funkcji interpolacyjnej, która reprezentuje różne wielkości fizyczne jako funkcja ciągłej zmiennej r . Dowolna wielkość fizyczna J w schemacie SIMP dla dwufazowej optymalizacji spełnia równanie:

$$J(r) = J_1 + (J_2 - J_1) \cdot r^p \quad (3.4.1)$$

gdzie: $r = r(x)$ to zmienna kontrolna spełniająca warunek $0 < r < 1$; p jest to parametr kary, J_1 i J_2 to właściwość materiałów obu faz ze spełnieniem warunku: $J_1 \leq J_2$.

Na Rys. 3.4.1 narysowano przykładowy rozkład wartości dowolnej wielkości $J(r)$ w zależności od r przy różnym parametrze penalizacji p .



Rys. 3.4.1. Rozkład wartości dowolnej wielkości $J(r)$ w zależności od r przy różnym parametrze penalizacji p dla $J(r) = J_1 + (J_2 - J_1) \cdot r^p$, przy $J_2 \geq J_1$

W niniejszej pracy uzyskany za pomocą procedury SIMP moduł Younga jest użyty do obliczenia efektywnego współczynnika Poissona.

Dla większości rodzajów optymalizacji konieczne jest przyjęcie kryterium zatrzymania optymalizacji i uznania jej wyniku za satysfakcjonujące. Możliwym kryterium zakończenia poszukiwania najlepszego rozwiązania jest wykonanie założonej

wcześniej liczby iteracji, po których wykonaniu rozwiązanie uznawane jest za zbieżne. Innym kryterium zatrzymania optymalizacji topologicznej jest spadek zmiany wartości funkcji celu poniżej założonej wcześniej wartości, w kolejnych przybliżeniach. Oznacza, to iż jeśli po pewnym czasie optymalizowana wartość osiąga już konkretną wartość i nie zmienia się znacząco, uzyskane rozwiązanie uznaje się za ostateczne. W przypadku metody SIMP kryterium może być wypełnienie całej domeny elementami skończonymi wypełnionych materiałem, których gęstość jest bliska 0 lub 1 [Nowak2017].

Optymalizacja topologiczna z obliczaniem efektywnych właściwości materiału wg metody SIMP ma wiele zalet, ale posiada również wady. Wadami są: możliwość nieosiągnięcia jednoznacznie interpretowalnego rozkładu gęstości fikcyjnego materiału, jeśli nie osiąga ona wartości 0 lub 1 w niektórych elementach, powstają bardzo małe obszary o gęstości 0 lub 1, które ułożone są naprzemiennie. Kolejnym problemem może być zależność rozwiązania od siatki elementów skończonych. Wadą jest również konieczność założenia stałej objętości fikcyjnego materiału w całej domenie obliczeniowej [Nowak2017].

Oprócz metody interpolacji SIMP użyty w obliczeniach w dalszej części rozprawy został schemat interpolacji RAMP (ang. *Rational Approximation of Material Properties*). Jest to metoda aproksymacji właściwości materiału z użyciem funkcji wymiernych. Może być ona użyta w celu obliczenia wartości różnych właściwości materiałów [Bendsøe2003].

Dowolna wielkość fizyczna charakteryzująca materiał J w tej metodzie, jest wyrażany zgodnie z wzorem:

$$\frac{1}{J(r)} = \frac{1}{J_1} + r \cdot \left(\frac{1}{J_2} - \frac{1}{J_1} \right). \quad (3.4.2)$$

Przekształcając powyższe równanie, tak aby uzyskać bezpośredni wzór opisujący $E(r)$ otrzymujemy:

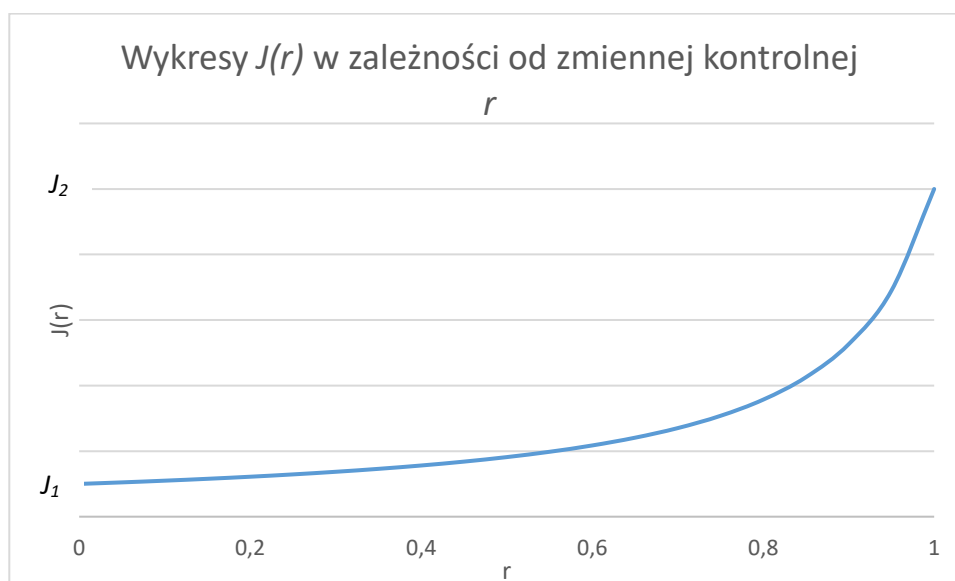
$$J(r) = J_1 + \frac{r}{1+q(1-r)} (J_2 - J_1) \quad (3.4.3)$$

gdzie: q – jest to wartość, której maksymalna wartość jest zgodna z poniższym wzorem:

$$q = \frac{J_2 - J_1}{J_1}. \quad (3.4.4)$$

Postępowanie optymalizacyjne rozpoczyna się natomiast od zdefiniowania, iż wartość $q=0$, a następnie wzrasta ona do wartości zdefiniowanej wzorem (3.4.4). Metoda ta zakłada więc istnienie optymalnego rozwiązania, dla q definiowanego wzorem (3.4.4) [Bendsøe2003].

Na Rys. 3.4.3 zaprezentowano przykładowy rozkład wartości dowolnej wielkości $J(r)$ w zależności od zmiennej kontrolnej r .



Rys. 3.4.2. rozkład wartości dowolnej wielkości $J(r)$ w zależności od r dla $J(r) = J_1 + \frac{r}{1+q(1-r)}(J_2 - J_1)$, przy $J_2 \geq J_1$

Dalsza definicja współczynnika Poissona w zależności od zmiennej kontrolnej $r = r(x)$ następuje w taki sam sposób, jak omówiono ją dla schematu interpolacji SIMP.

W niniejszej pracy uzyskany za pomocą procedury RAMP moduł Younga jest użyty do obliczenia efektywnego współczynnika Poissona.

3.5 Zastosowanie SIMP przy minimalizacji odkształcenia

Najczęściej stosowanym celem, dla którego używa się schematu interpolacyjnego SIMP jest maksymalizacja sztywności poprzez osiągnięcie najmniejszej możliwej energii odkształcenia. W ten sposób zostanie tu przedstawione jej działanie, a następnie implementacja do zadania poszukiwania najmniejszego współczynnika Poissona struktury dwufazowej.

Dla uzyskania maksymalnej sztywności konstrukcji z zastosowaniem metody SIMP minimalizuje się energię odkształcenia $C(x)$ [Nowak2017]:

$$\min C(x) = \delta^T K \delta \quad (3.5.1)$$

gdzie: \mathbf{x} jest wektorem zmiennych decyzyjnych, $\boldsymbol{\delta}$ to wektor przemieszczeń, \mathbf{K} to globalna macierz sztywności.

Działanie optymalizacyjne przebiega przy stałym stosunku faktycznej objętości struktury w konkretnym kroku obliczeniowym $V(x)$ do objętości całego optymalizowanego obszaru V_0 :

$$\frac{V(x)}{V_0} = \text{const} . \quad (3.5.2)$$

Zastosowanie metody elementów skończonych powoduje, iż wektor \mathbf{x} zdyskretyzowanych elementów struktury staje się wektorem rozkładu gęstości fikcyjnego materiału, przypisanych do każdego elementu.

Gęstość fikcyjnego materiału używa się do opisu moduł Younga według zależności:

$$E(x_e) = E_r + (x_e)^p \cdot (E_r - E_0) \quad (3.5.3)$$

gdzie: $E(x_e)$ – moduł Younga wyznaczany dla elementu skończonego, E_0 – rzeczywista wartość modułu Younga dla materiału używanego do optymalizacji, E_r – niewielka wartość, która zapobiega pojawieniu się osobliwej macierzy sztywności, która spowodowałaby przerwanie obliczeń, p – parametr kary (penalizacji).

W końcowym etapie optymalizacji musi zapaść decyzja, które obszary konstrukcji będą miały gęstość równą 1, czyli będą utożsamiane z obecnością materiału, a których gęstość będzie równa 0, czyli będzie oznaczać to brak materiału. W celu usprawnienia podjęcia tej decyzji w metodzie SIMP stosuje się tzw. współczynnik penalizacji (inaczej współczynnik kary).

Zadanie minimalizacji energii odkształcenia $C(x)$ poprzez implementację metody elementów skończonych oraz dyskretyzację obszaru obliczeniowego można zapisać w postaci [Nowak2017]:

$$\min C(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^n E(x_e) \boldsymbol{\delta}_e^T \mathbf{k}_e \boldsymbol{\delta}_e \quad (3.5.4)$$

gdzie: $\boldsymbol{\delta}_e$ to wektor przemieszczenia oraz \mathbf{k}_e to macierz sztywności elementu skończonego.

Dla powyższej zależności ważny jest warunek stałej objętości materiału dla każdego kroku obliczeniowego. Obliczenie minimalnej energii odkształcenia następuje poprzez zminimalizowanie funkcji Lagrange'a $L(\mathbf{x})$:

$$L(\mathbf{x}) = C(\mathbf{x}) + \lambda_1 V(\mathbf{x}) \quad (3.5.5)$$

gdzie: $V(\mathbf{x})$ – rzeczywista objętość struktury w danym kroku obliczeniowym, λ_1 – wektor mnożników Lagrange'a.

Funkcja Lagrange'a jest minimalizowana poprzez gradient funkcji $L(\mathbf{x})$:

$$\nabla L(\mathbf{x}) = \nabla C(\mathbf{x}) + \lambda_1 \nabla V(\mathbf{x}) \quad (3.5.6)$$

Poprzez podstawienie równania na gradient do dyskretnego równania minimalizacji energii odkształcenia i przyrównanie do zera, wynika poniższa zależność dla każdego elementu skończonego:

$$\frac{\partial C}{\partial x_e} + \lambda_1 \frac{\partial V}{\partial x_e} = 0 \quad (3.5.7)$$

Przekształcając powyższe równanie do postaci [Nowak2017]:

$$B_e = -\frac{\partial C}{\partial x_e} \left(\lambda_1 \frac{\partial V}{\partial x_e} \right)^{-1}. \quad (3.5.8)$$

Wartość λ_1 jest obliczana metodą bisekcji, w taki sposób, aby został zachowany warunek stałej objętości. Wyrażenie B_e jest używane do zmiany wartości zmiennych decyzyjnych w trakcie procedury optymalizacyjnej. Wrażliwość funkcji minimalizacji na zmianę wartości danych poprzez przekształcenia powyższych wzorów można zapisać jako:

$$\frac{\partial C}{\partial x_e} = p(\mathbf{x}_e)^{p-1} \cdot (E_0 - E_r) \boldsymbol{\delta}_e^T \mathbf{k}_e \boldsymbol{\delta}_e. \quad (3.5.9)$$

Dla elementów skończonych w domenie zmiana wartości zmiennych decyzyjnych \mathbf{x}_e prowadzi do zmiany gęstości materiału fikcyjnego w całym optymalizowanym obszarze.

W wyniku tej zmiany, dla przypadku minimalizacji energii odkształcenia, w obszarach o względnie wysokiej energii odkształcenia następuje wzrost gęstości materiału i odpowiednio w obszarach o niższej energii następuje zmniejszenie gęstości.

3.6 Definicja efektywnego współczynnika Poissona

Współczynnik Poissona jest definiowany jako ujemny stosunek pomiędzy średnimi odkształceniami poprzecznymi a wzdłużnymi, jak niżej:

$$\nu_{eff} = -\frac{\bar{\varepsilon}_t}{\bar{\varepsilon}_l} \quad (3.6.1)$$

gdzie: $\bar{\varepsilon}_t$ jest to średnie odkształcenie w kierunku poprzecznym; a $\bar{\varepsilon}_l$ jest to średnie odkształcenie w kierunku wzdłużnym.

Współczynnik Poissona materiału wyznacza się w zależności od kierunku działania siły obciążającej. W przypadku analizowanych modeli siła obciążająca działa wzdłuż osi y . Średnie odkształcenie poprzeczne w takim przypadku jest równe:

$$\bar{\varepsilon}_t = \frac{\int_{G_1} u_1 dG}{L_x \cdot \int_{G_1} dG} \quad (3.6.2)$$

gdzie: G_1 jest to krawędź prostopadła ($x = L_x$) do krawędzi z zadaniem przemieszczeniem, a u_1 jest to przemieszczenie w osi x .

Średnie odkształcenie wzdłużne jest definiowane jako:

$$\bar{\varepsilon}_l = \frac{\int_{G_2} u_2 dG}{L_y \cdot \int_{G_2} dG} \quad (3.6.3)$$

gdzie: G_2 jest to krawędź ($y = L_y$) z zadaniem przemieszczeniem, a u_2 to przemieszczenie w osi y .

Z powodu użycia schematu interpolacyjnego SIMP efektywny współczynnik Poissona jest zależny od zmiennej kontrolnej r . W tym przypadku równanie (3.3.2) jako funkcja celu optymalizacji i można zapisać w postaci:

$$\nu_{eff}(r) = -\frac{\overline{\varepsilon}_t(r)}{\overline{\varepsilon}_l(r)}. \quad (3.6.4)$$

Funkcja zmiennej kontrolnej w schemacie SIMP jest ograniczona poprzez dwa warunki: punktowej nierówności oraz całkowitej nierówności, które są sformułowane następująco:

$$0 \leq r(\mathbf{x}) \leq 1 \quad \text{dla } \mathbf{x} \in S \quad (3.6.5)$$

$$0 \leq \int_S r(\mathbf{x}) dS \leq S \cdot A_f \quad (3.6.6)$$

gdzie: \mathbf{x} to zdefiniowana współrzędna oraz A_f — jest to procentowy udział drugiego materiału w całej domenie obliczeniowej S . Proces optymalizacji przebiega w następującej kolejności: najpierw wykonujemy dyskretyzację modelu zgodnie z Metodą Elementów Skończonych, następnie redefiniujemy funkcję optymalizacji z założonymi obciążeniami jako standardowy skończono-wymiarowy programowalny problem nieliniowy. Wartość zmiennej kontrolnej w każdym węźle siatki oblicza się zgodnie z wzorem:

$$r(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N r_i \cdot \phi_i(\mathbf{x}) \quad (3.5.8)$$

gdzie: $\phi_i(\mathbf{x})$ to funkcje kształtu, N to liczba węzłów w elemencie skończonym. Po dyskretyzacji warunek punktowej nierówności jest wyrażony, jak niżej:

$$0 \leq r_i \leq 1 \quad \text{dla } x = 1, \dots, M \quad (3.5.9)$$

gdzie: M jest to ilość wszystkich węzłów wszystkich elementów siatki, w których obliczana jest wartość zmiennej kontrolnej.

3.7 Algorytm obliczeń MMA

Podczas poszukiwania optymalnego rozwiązania funkcji celu w czasie optymalizacji współczynnika Poissona stosowany jest algorytm przybliżania MMA (ang. *Method of Moving Asymptotes*). Ogólny opis algorytmu poszukiwania najlepszego rozwiązania podczas optymalizacji strukturalnej w tej metodzie przedstawiony został w pracy Svanberga [Svanberg1987]:

Zadanie zdefiniowane jest jako minimalizacja funkcji, zwykle ciężaru elementu:

$$f_0(\mathbf{x}), \text{ gdy } \mathbf{x} \in R^n. \quad (3.7.1)$$

Każda wartość poniższej funkcji podlega ograniczeniom związanej z naprężeniem lub odkształceniami w konstrukcji (f_{igr} jest matematyczną interpretacją tych ograniczeń):

$$f_i(x) \leq f_{i\ gr}, \quad \text{dla } i = 1, \dots, m \quad (3.7.2)$$

gdzie: \mathbf{x} – jest to wektor zmiennych projektowych:

$$\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \quad (3.7.3)$$

Zmienne projektowe podlegają tzw. technicznym ograniczeniom związanym z założeniami wstępnymi ograniczonego obszaru obliczeń.

$$x_{j\ min} \leq x_j \leq x_{j\ max} \quad \text{dla } j = 1, \dots, n \quad (3.7.4)$$

Metoda MMA opiera się ogólnie na następującym algorytmie postępowania:

- a) krok 0 – Wybór punktu startowego x_0 oraz nadanie indeksu iteracji $k = 0$.
- b) krok 1 – nadanie punktu iteracji x_k , następnie obliczenie wartości funkcji $f_i(x_k)$ oraz gradientu: $\nabla f_i(x_k)$, dla $i = 1, \dots, m$,
- c) krok 2 - Wygenerowanie podproblemu obliczeniowego P_k poprzez wymianę w P ogólnej funkcji f_i , poprzez aproksymację, konkretnej funkcji f_{ik} , bazującej na obliczeniach z kroku 1-ego,
- d) krok 3 – rozwiązanie podproblemu P_k i przyjęcie jego optymalnego rozwiązania jako kolejny punkt iteracji x_{k+1} , a następnie przejście na powrót do kroku 1-ego.

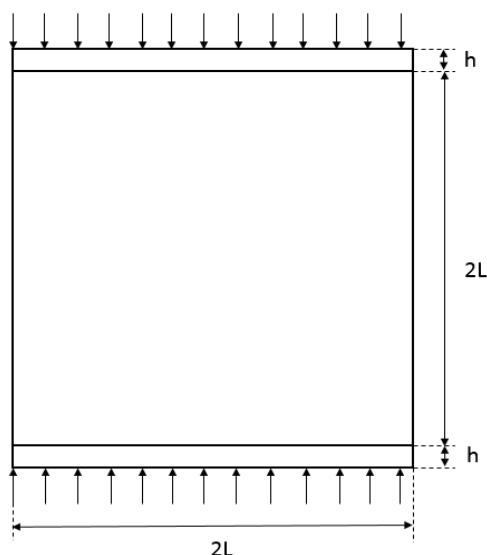
Po wypełnieniu kryteriów zbieżności lub wypełnienie zadanych założeń rozwiązania proces optymalizacji zostaje zatrzymany.

Ze szczegółowego punktu widzenia, metoda ściśle definiuje również, w jaki sposób powinno się definiować funkcję $f_i(x_k)$ oraz jak powinno się rozwiązać „podproblem” P_k przy wybranej funkcji $f_i(x_k)$. Szczegółowy opis metody został dokonany w publikacji twórcy metody Kristera Svanberga [Svanberg1987, Svanberg2013].

4 Optymalizacja topologiczna warstwy wewnętrznej kompozytu

4.1 Model oraz warunki brzegowe

Opisany wyżej schemat obliczeń – połączenie Metody Elementów Skończonych z metodą interpolacji SIMP oraz algorytmem poszukiwania optymalnego rozwiązania MMA został zastosowany do minimalizacji współczynnika Poissona warstwy wewnętrznej trójwarstwowego kompozytu. Wygląd modelu przedstawiony jest na Rys. 4.1.1. Parametr geometryczny L modelu wynosi 1 m, a wielkość h to grubość warstw zewnętrznych kompozytu. Obliczenia przeprowadzono dla różnych wartości h .



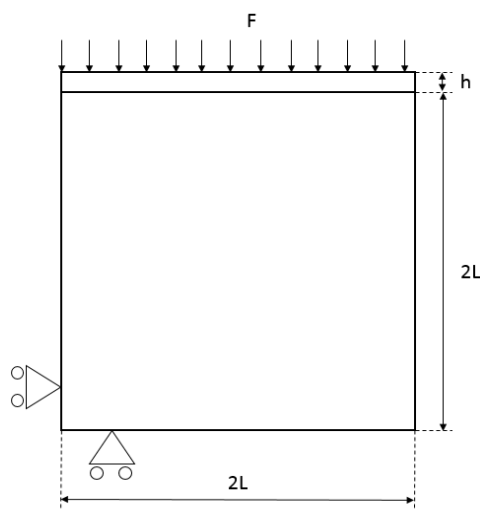
Rys. 4.1.1 Kompozyt o wymiarach $2L \times (2L+2h)$ oraz grubości warstwy zewnętrznej h

Optymalizacja polega na znalezieniu rozkładu w warstwie środkowej dwóch materiałów o różnych modułach Younga i liczbach Poissona, w taki sposób, aby uzyskać, jak najmniejszy współczynnik Poissona. Materiały ze względu na różnice w module Younga nazwano „materiałem twardym” i „materiałem miękkim”. Warstwy zewnętrzne trójwarstwowego kompozytu wykonane są również z „materiału twardego”. Właściwości obu materiałów są następujące:

- „materiał miękki”: moduł Younga wynosi: $E_1 = 10^7$ Pa, a współczynnik Poissona wynosi $\nu_1 = 0.1$;
- „materiał twardy”: moduł Younga wynosi: $E_2 = 2 \cdot 10^{11}$ Pa, a współczynnik Poissona wynosi $\nu_2 = 0.33$.

Z powodu symetrii problemu optymalizacji poddano jedynie ćwiartkę całego kompozytu (Rys. 4.1.2), a warunki brzegowe nadane modelowi są następujące:

- krawędź górna: $y = L + h$ i $x \in \langle 0; L \rangle$ - obciążenie siłą ściskającą: $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}$, gdzie $\mathbf{F} = (0; -F)$, siła F wynosi 10 kN/m,
- krawędź prawa: $x = L$ i $y \in \langle 0; L+h \rangle$; brak warunku brzegowego, krawędź wolna;
- krawędź lewa: $x = 0$ i $y \in \langle 0; L+h \rangle$; podpora przesuwna w osi y ; warunek brzegowy symetrii,
- krawędź dolna: $y = 0$ i $x \in \langle 0; L \rangle$; podpora przesuwna w osi x ; warunek brzegowy symetrii.



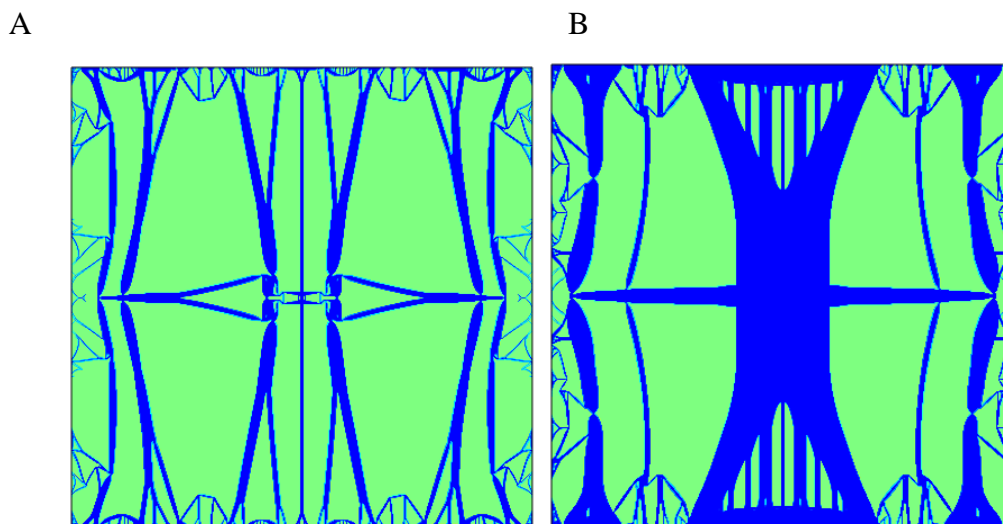
Rys. 4.1.2 Model obliczeniowy optymalizowanego kompozytu wraz z warunkami brzegowymi

4.2 Wyniki numeryczne obliczeń

4.2.1 Minimalizacja efektywnego współczynnika Poissona warstwy wewnętrznej kompozytu

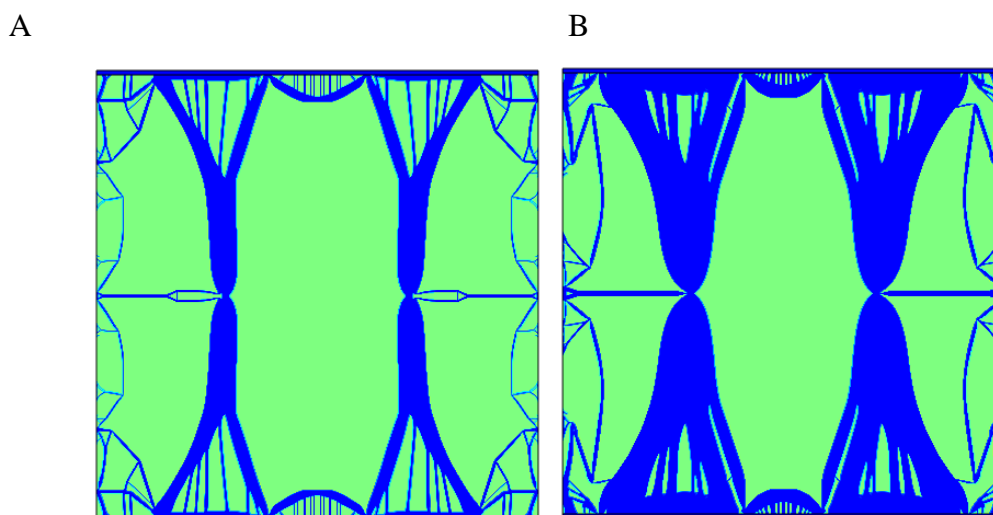
Obliczenia przeprowadzono dla różnych grubości warstw górnej i dolnej kompozytu ($h=0$, $h=0.02$, $h=0.05$, $h=0.07$, $h=0.1$) oraz dla dwóch założonych procentowych udziałów materiału o większym module Younga czyli 20% oraz 40%. Na Rys.4.2.1.1A, B przedstawiono wyniki optymalizacji dla $A_f = 20\%$ oraz $A_f = 40\%$ przy zerowej grubości warstwy górnej i dolnej $h = 0$. We wszystkich obliczeniach parametr penalizacji w metodzie SIMP wynosi $p = 3$. „Materiał twardy” we wszystkich rysunkach z wynikami minimalizacji współczynnika Poissona dla warstwy środkowej kompozytu

jest zaznaczony kolorem czarnym, a „materiał miękki” kolorem białym. Przy braku warstwy zewnętrznej i wewnętrznej zoptymalizowane efektywne współczynniki Poissona wynoszą -2.69 oraz -3.18. Liczba elementów skończonych, na jakie został podzielony model wynosi 40000. Użyte elementy skończone są powierzchniowe, a algorytm wypełnienia siatki to siatka mapowana.



Rys.4.2.1.1 Wynik optymalizacji warstwy środkowej kompozytu dla $h=0$ oraz (A): $A_f = 20\%$; uzyskany efektywny współczynnik Poissona: $\nu_{eff} = - 2.69$, (B): $A_f = 40\%$; uzyskany efektywny współczynnik Poissona: $\nu_{eff} = - 3.18$ [Strek2016]

Na Rys.4.2.1.2A, B przedstawiono wyniki optymalizacji efektywnego współczynnika Poissona przy grubości warstw zewnętrznych h równej $h = 0.02$ m. Uzyskane wartości wynosiły: przy $A_f = 20\%$, $\nu_{eff} = -2.87$ oraz przy $A_f = 40\%$, $\nu_{eff} = -3.72$.

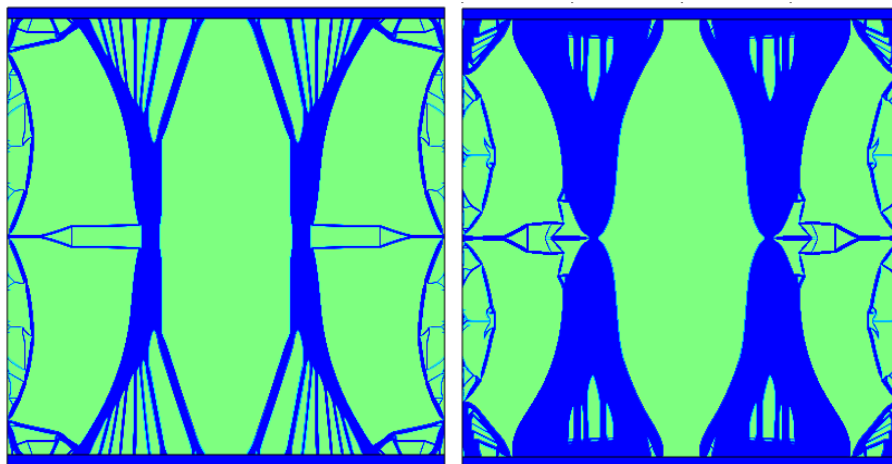


Rys. 4.2.1.2 Wynik optymalizacji warstwy środkowej kompozytu dla $h=0,02$ oraz (A): $A_f = 20\%$; uzyskany efektywny współczynnik Poissona: $\nu_{eff} = - 2.87$; (B): $A_f = 40\%$; uzyskany efektywny współczynnik Poissona: $\nu_{eff} = - 3.72$ [Strek2016]

Na Rys. 4.2.1.3 przedstawiono kolejne wyniki przy grubości warstw zewnętrznych $h=0.05$ m. Przy $A_f = 20\%$ efektywny współczynnik Poissona wyniósł: $\nu_{eff} = -3.17$ oraz przy $A_f = 40\%$ wyniósł on: $\nu_{eff} = -3.82$.

A

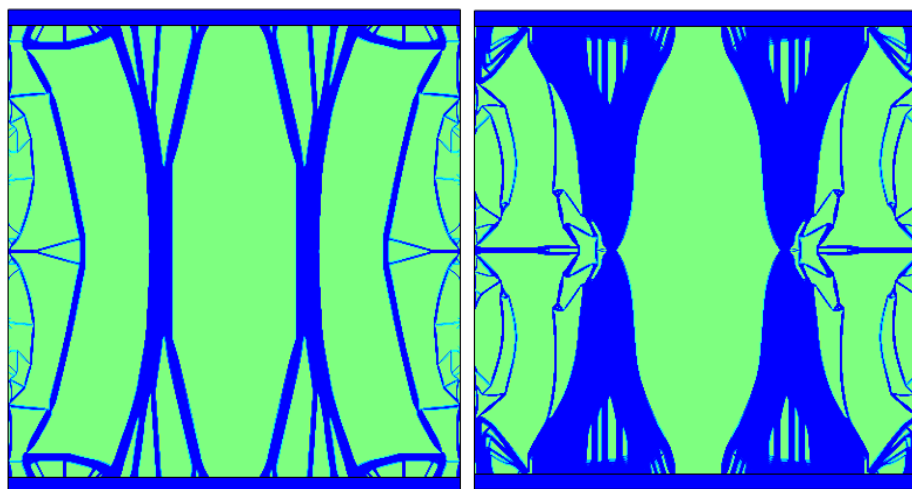
B



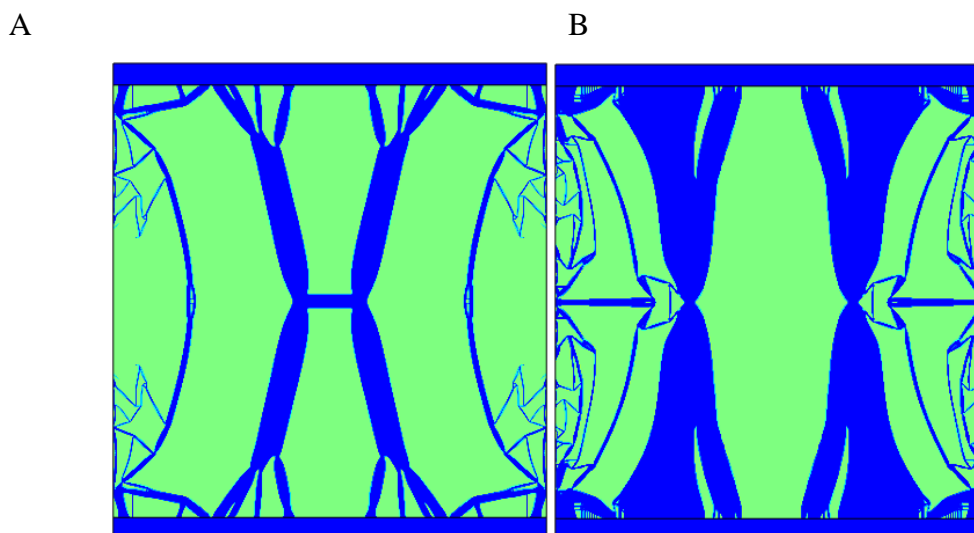
Rys. 4.2.1.3 Wynik optymalizacji warstwy środkowej kompozytu dla $h = 0.05$ oraz (A): $A_f = 20\%$; uzyskany efektywny współczynnik Poissona: $\nu_{eff} = -3.17$; (B): $A_f = 40\%$; uzyskany efektywny współczynnik Poissona: $\nu_{eff} = -3.82$ [Strek2016]

A

B



Rys. 4.2.1.4 Wynik optymalizacji warstwy środkowej kompozytu dla $h = 0.07$ oraz (A): $A_f = 20\%$; uzyskany efektywny współczynnik Poissona: $\nu_{eff} = -3.48$; (B): $A_f = 40\%$; uzyskany efektywny współczynnik Poissona: $\nu_{eff} = -3.73$ [Strek2016]



Rys. 4.2.1.5 Wynik optymalizacji modelu środkowej kompozytu dla $h=0.1$ oraz (A): $A_f = 20\%$; uzyskany efektywny współczynnik Poissona: $\nu_{eff} = - 2.75$; (B): $A_f = 40\%$; uzyskany efektywny współczynnik Poissona: $\nu_{eff} = - 3.83$ [Strek2016]

Na Rys.4.2.1.4 oraz Rys.4.2.1.5 przedstawiono wyniki optymalizacji dla grubości warstwy $h = 0.07$ m oraz $h = 0.1$ m dla obu założonych A_f (20% i 40%). W tabeli Tab. 4.2.1.1 zebrano wyniki optymalizacji dla założonych warunków z uzyskanymi efektywnymi współczynnikami Poissona.

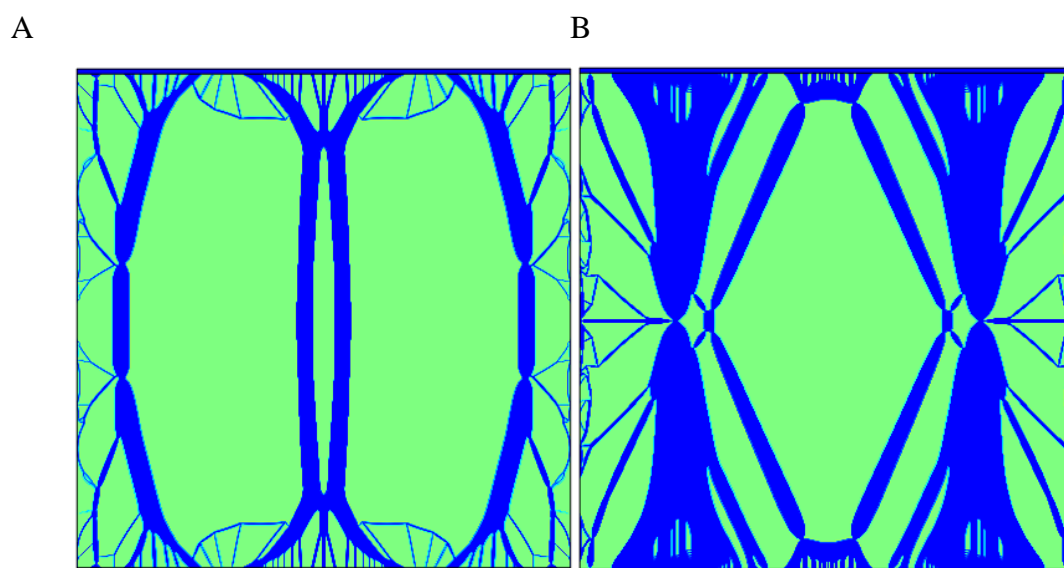
Tab.4.2.1.1 Wyniki optymalizacji warstwy środkowej kompozytu dla różnych zadanych grubości h oraz dwóch różnych wartości zadanej udziału materiału o większym module Younga – w tabeli podano efektywne współczynniki Poissona

Udział materiału twardego	$h = 0$ m	$h = 0.02$ m	$h = 0.05$ m	$h = 0.07$ m	$h = 0.1$ m
$A_f = 20\%$	-2.69	-2.87	-3.17	-3.48	-2.75
$A_f = 40\%$	-3.18	-3.72	-3.82	-3.73	-3.83

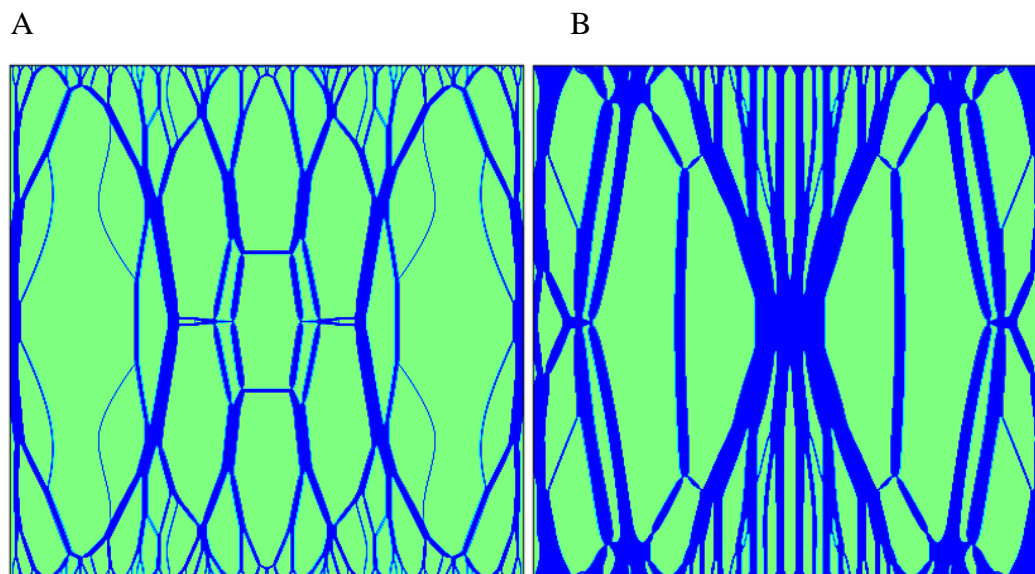
Jak widać z powyższej tabeli mniejsze współczynniki Poissona można zaobserwować przy istnieniu warstw zewnętrznych o jakiegokolwiek grubości. Korzystniejsze z punktu widzenia auksetyczności jest tutaj również większa zadana zawartość procentowa materiału o większym module Younga.

4.2.2 Maksymalizacja efektywnego współczynnika Poissona warstwy środkowej kompozytu

W zastosowaniach, w których konieczne jest dopasowanie struktury do wymaganego odkształcenia, możliwe jest zastosowanie materiałów, w których współczynnik Poissona dla konkretnych kierunków będzie duży (materiał anizotropowy). W ten sposób optymalizacja topologiczna może służyć nie tylko w celu uzyskania jak najmniejszej liczby Poissona, a przez to uzyskania w pewnych kierunkach największego możliwego efektu auksetyczności, ale również i maksymalizacji liczby Poissona. Na Rys. 4.2.2.1 oraz Rys. 4.2.2.2 przedstawiono wyniki optymalizacji dwufazowej z funkcją celu maksymalizacji współczynnika Poissona. Materiały obu faz mają takie same właściwości, jak w przypadku minimalizacji. Uzyskane efektywne współczynniki Poissona zebrano w tabeli Tab.4.2.2.1.



Rys.4.2.2.1 Wynik maksymalizacji dwufazowej warstwy środkowej kompozytu dla $h=0.02$ oraz (A): $A_f = 20\%$; uzyskany efektywny współczynnik Poissona: $\nu_{\text{eff}} = 3.43$; (B): $A_f = 40\%$; uzyskany efektywny współczynnik Poissona: $\nu_{\text{eff}} = 4.15$ [Strek2016]



Rys.4.2.2.2 Wynik maksymalizacji dwufazowej modelu warstwy środkowej kompozytu dla $h=0$ m oraz (A): $A_f = 20\%$; uzyskany efektywny współczynnik Poissona: $\nu_{eff} = 4.41$; (B): $A_f = 40\%$; uzyskany efektywny współczynnik Poissona: $\nu_{eff} = 5.88$ [Strek2016]

Tab. 4.2.2.1 Wyniki uzyskanych efektywnych współczynników podczas jego dwufazowej maksymalizacji w domenie warstwy środkowej trójwarstwowego kompozytu

Udział materiału twardego	$h = 0$ m	$h = 0.02$ m
$A_f = 20\%$	4.41	3.43
$A_f = 40\%$	5.88	4.15

Uzyskane wartości efektywnego współczynnika Poissona są większe dla 40-procentowej zawartości materiału o większym module Younga. Taki sam wniosek można było wysnuć również na podstawie wyników podczas minimalizacji. Oznacza to, że w symulacjach z większym 40-procentowym udziałem tego materiału istnieje większy potencjał optymalizacyjny.

Kształty struktur utworzonych w wyniku maksymalizacji oraz minimalizacji różnią się od siebie. Przy minimalnym współczynniku można zauważyć tendencję do układania się materiału twardego w wklęsłe elementy, natomiast przy maksymalizacji w większości w wypukłe. W ten sposób właśnie uzyskiwane jest odkształcenie w kierunku poprzecznym podczas ściskania: jest to odkształcenie w kierunku wewnętrznym w

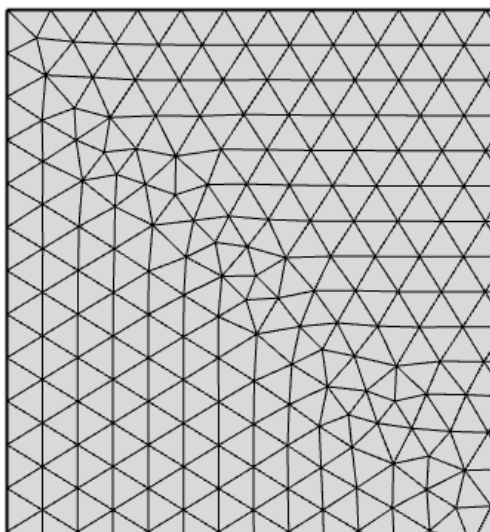
przypadku minimalnego współczynnika Poissona oraz w kierunku wewnętrznym w przypadku maksymalnego współczynnika Poissona.

4.2.3 Wpływ siatki elementów skończonych na wyniki optymalizacji

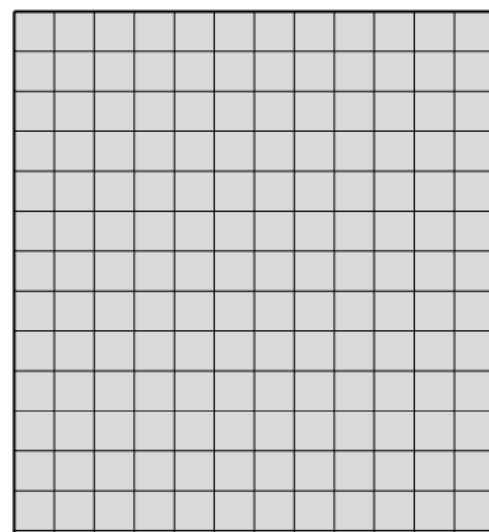
Liczba elementów siatki elementów skończonych na jakie dzielony jest model oraz algorytm generacji siatki w modelu znacząco wpływa na osiągnięty wynik. Przedstawiono wyniki optymalizacji warstwy środkowej kompozytu – o kształcie kwadratu o boku 0,1 z różną liczbą elementów skończonych.

Badanie przeprowadzono dla trzech różnych liczb elementów skończonych w całym modelu: 15625, 12544, 10000 oraz 4489 elementów przy zastosowaniu mapowanej siatki elementów skończonych (podział modelu na elementy powierzchniowe o kształcie kwadratu) oraz przy zastosowaniu automatycznego algorytmu generacji siatki.

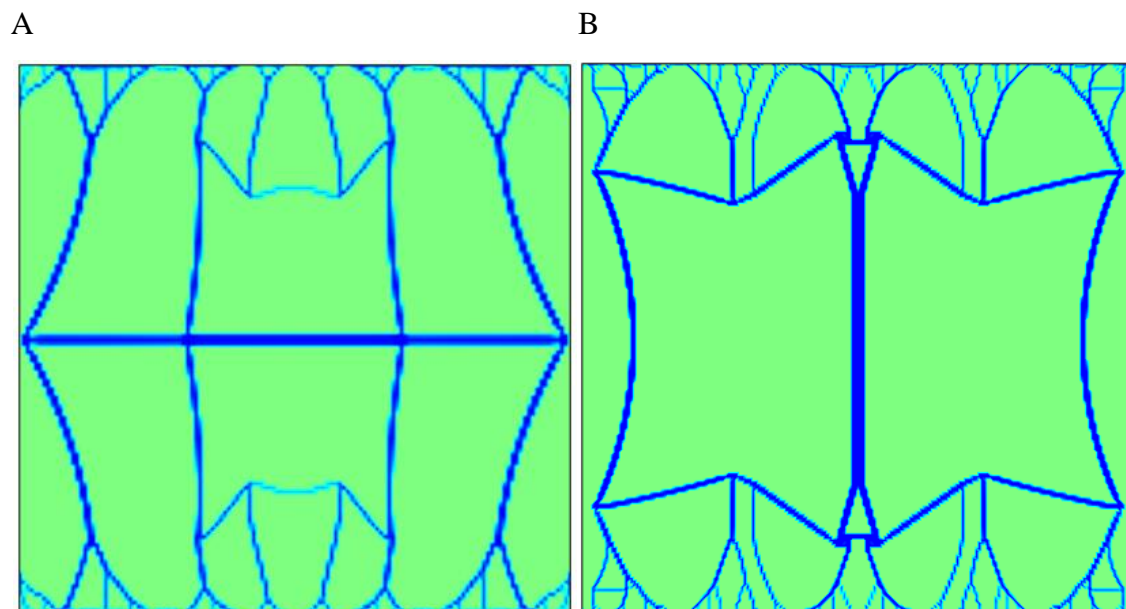
A



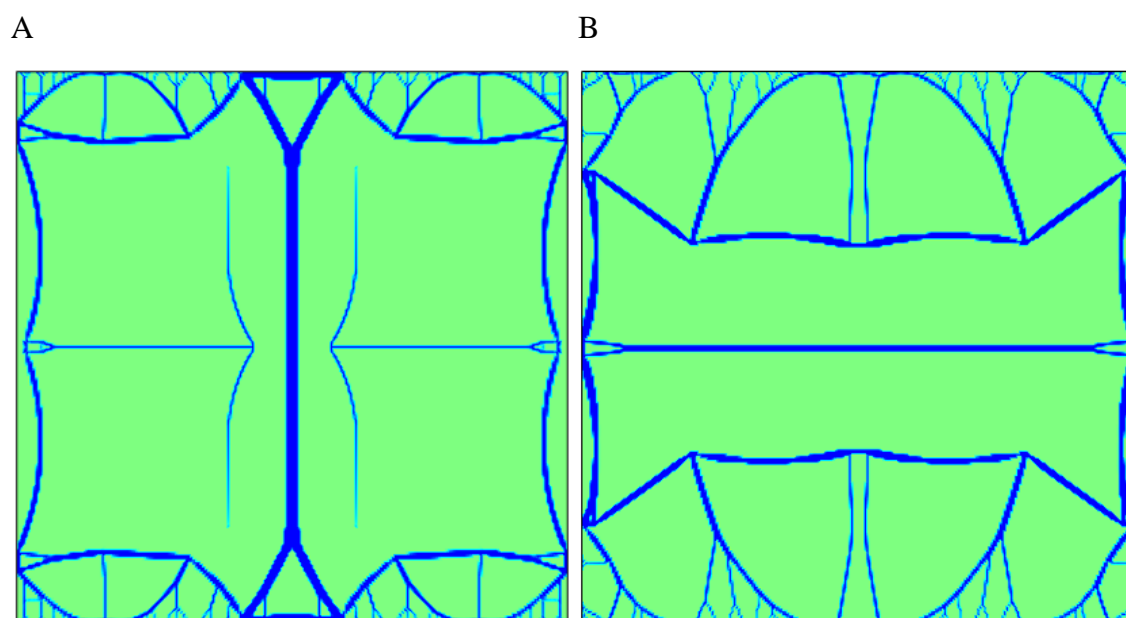
B



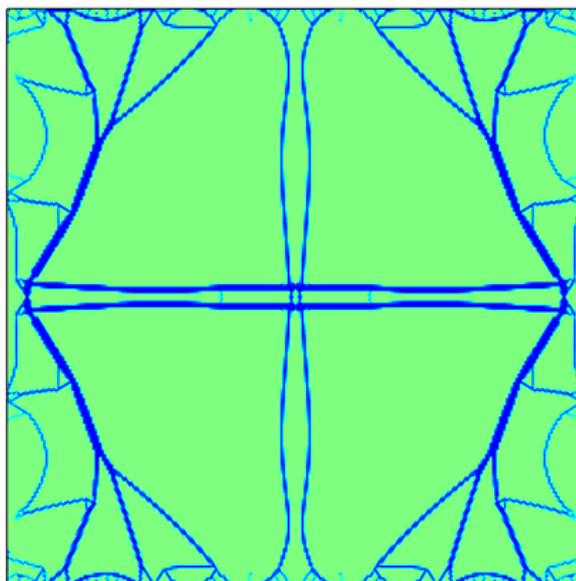
Rys. 4.2.3.1 Fragmenty modelu: A – wypełniony za pomocą algorytmu automatycznego, B – wypełniony przy pomocy siatki topologicznej (mapowanej)



Rys. 4.2.3.2 Uzyskane optymalne struktury z minimalnym współczynnikiem Poissona: A – dla 4489 elementów skończonych, B – dla 10000 elementów skończonych



Rys. 4.2.3.2 Uzyskane optymalne struktury z minimalnym współczynnikiem Poissona: A – dla 12544 elementów skończonych, B – dla 15625 elementów skończonych



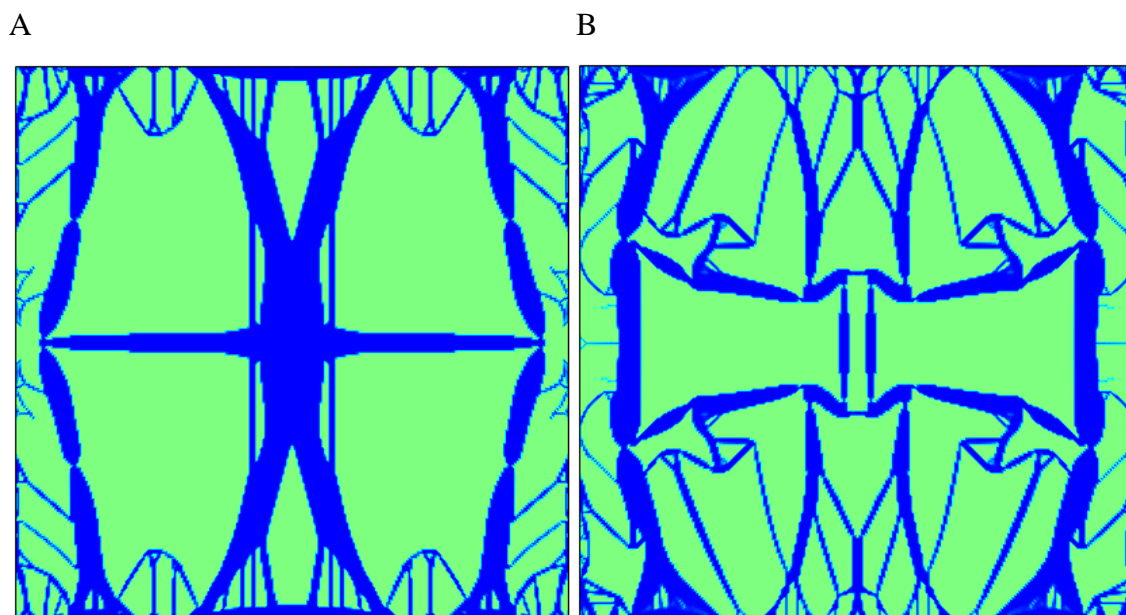
Rys. 4.2.3.3 Uzyskane optymalne struktury z minimalnym współczynnikiem Poissona, przy automatycznym algorytmie wypełnienia siatki, model składa się z 24912 elementów skończonych

Tab. 4.2.3.1 Wyniki efektywnego współczynnika Poissona dla różnego algorytmu generacji siatki i różnej liczby elementów

Rodzaj siatki, ilość elementów w modelu	Efektywny minimalny współczynnik Poissona
Siatka mapowana, 4489	-0.87
Siatka mapowana, 10000	-1.21
Siatka mapowana, 12544	-1.06
Siatka mapowana, 15625	-0.56
Siatka automatyczna, 24912	-0.88

4.2.4 Optymalizacja z równymi współczynnikami Poissona materiałów wypełniających

W wszystkich dotychczasowych optymalizacjach współczynniki Poissona tzw. „materiału twardego” wynosił 0.33; a „materiału miękkiego” 0.1. W bieżącym rozdziale sprawdzono różnicę w osiągniętych efektywnych współczynnikach Poissona dla całej struktury, gdy oba współczynniki Poissona są takie same i równe $\nu=0.33$.



Rys. 4.2.4.1 Uzyskane optymalne struktury z minimalnym współczynnikiem Poissona: A – dla $\nu_1 = 0.1$; $\nu_2 = 0.33$; $\nu_{eff} = -2.3611$; B – dla $\nu_1 = \nu_2 = 0.33$; $\nu_{eff} = -1.939$

Dla modelu z obszarem w kształcie kwadratu przy właściwościach materiałów obu faz: $E_1 = 10^7$ MPa, $E_2 = 10^{10}$ MPa, zastosowaniu schematu interpolacji SIMP ($p=3$), 15625 elementach skończonych w modelu oraz udziału materiału 2 („twardego”) $A_f = 30\%$ uzyskano różny o 0,4868 efektywny współczynnik Poissona przy równych ($\nu_{eff} = -1.939$) i różnych ($\nu_{eff} = -2.3611$) współczynnikach Poissona materiałów wypełniających. Również optymalne struktury nie wyglądają identycznie – widoczne są znaczne różnice w strukturach.

5 Optymalizacja topologiczna dwufazowych struktur plastra miodu

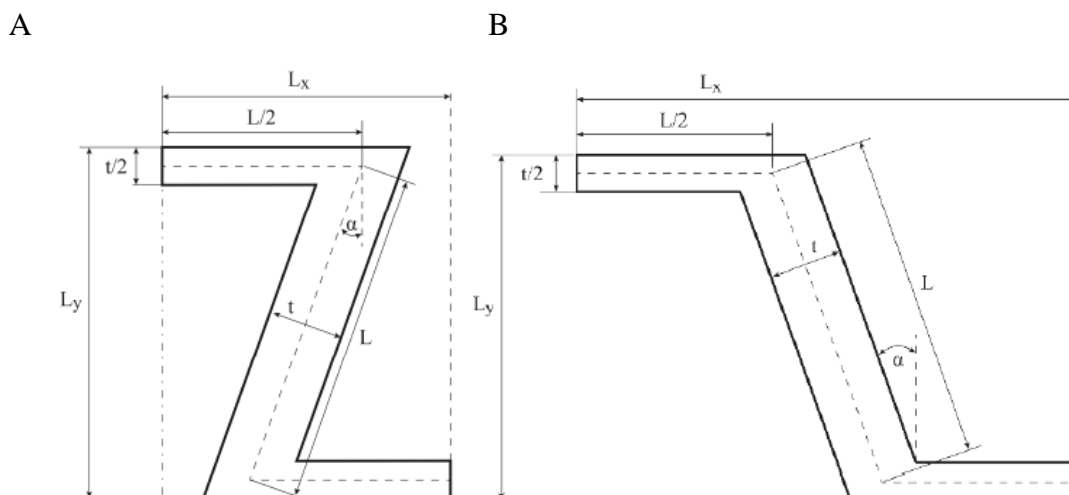
5.1 Model oraz warunki brzegowe

W kolejnym zadaniu optymalizacji topologicznej poddano pojedynczą komórkę plastra miodu. Za pomocą obliczeń w zaproponowanych modelach zbadany został wpływ rozłożenia dwóch materiałów w strukturze plastrów miodu na właściwości sześciokątnego kształtu. Obliczeniom poddano dwa rodzaje komórek plastrów miodu: klasyczny sześciokątny oraz strukturę tzw. re-entrant, posiadającą w swojej budowie kąt wklęsły. Pierwsza z tych struktur, zbudowana z jednego materiału nie wykazuje ujemnego efektywnego współczynnika Poissona, natomiast struktura re-entrant jest jedną z najbardziej rozpowszechnionych auksetycznych kształtów. Optymalizacja z funkcją minimalizacji liczby Poissona ma na celu wzbudzenie właściwości ujemnych w przypadku tej pierwszej domeny, a w przypadku tej drugiej pogłębienie efektu auksetycznego w jednym z kierunków działania obciążenia (anizotropia). Optymalizacja poprzez wypełnienie kształtu dwoma materiałami, tworząc niejednorodny, nieizotropowy kompozyt. To właśnie powoduje, iż współczynnik Poissona kompozytu różni się znacznie od dodatnich współczynników Poissona obu użytych do wypełnienia materiałów. Materiały izotropowe użyte w symulacjach różnią się modułem Younga i są charakteryzowane tylko przez ten parametr oraz dodatni współczynnik Poissona:

- a) „materiał miękki” moduł Younga wynosi $E_1 = 10^8$ Pa, a w kolejnych badaniach $E_1 = 10^9$ Pa, współczynnik Poissona wynosi $\nu_1 = 0.1$;
- b) „materiał twardy” moduł Younga wynosi $E_2 = 10^{11}$ Pa, współczynnik Poissona wynosi $\nu_2 = 0.33$;

Rozważane są dwa przypadki, w których stosunek modułów Younga jest różny i wynosi 10^2 lub 10^3 . Ze względu na podwójną symetrię komórki plastra miodu analizie poddano jej $\frac{1}{4}$ część. Cała komórka w trakcie analizy zostaje ściskana, następuje przesunięcie górnej i dolnej krawędzi komórki o 0.01 m.

Geometria optymalizowanego obszaru plastra miodu jest opisywana poprzez długości sześciokątnej struktury $L_x = 1.1248$ m oraz $L_y = 1.0659$ m, grubość boku t oraz kąt pochylenia $\alpha = 15^\circ$. Na Rys. 5.1.1 przedstawiono ilustrację wymiarów w optymalizowanym obszarze komórki konwencjonalnego plastra miodu oraz modelu re-entrant.

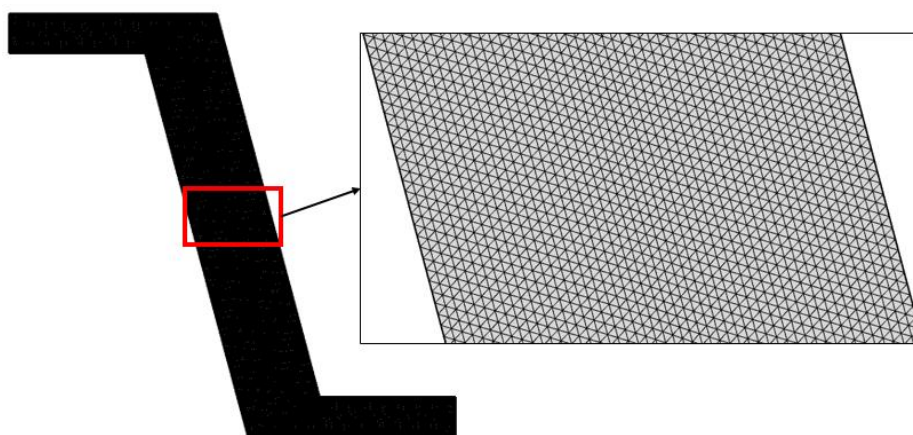


Rys.5.1.1 Rysunek z wymiarami opisującymi 1/4 – tą komórki plastra miodu A – re-entrant oraz B – konwencjonalnego [Strek 2017a]

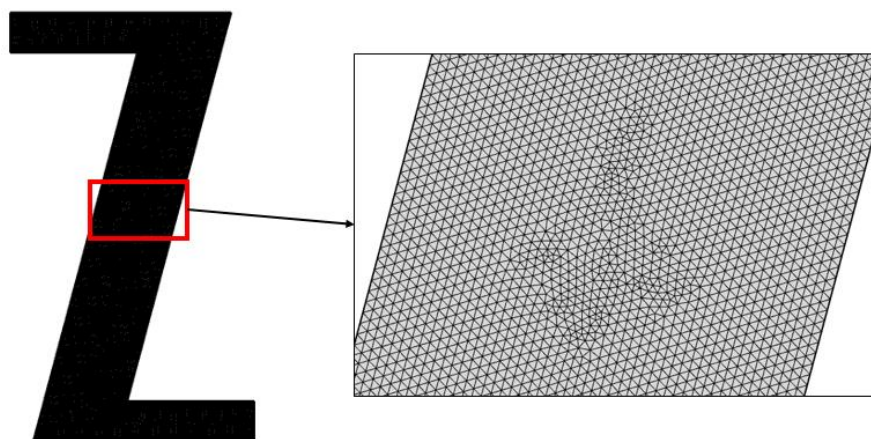
Zadane warunki brzegowe (Rys.5.1.4) dla analizowanych komórek plastrów miodu są następujące:

- krawędź górna ($y=L_y$): zadane przemieszczenie krawędzi w dół o 0.01 m,
- krawędź dolna ($y=0$): symetria, brak przemieszczenia wzdłuż osi y ,
- krawędź lewa ($x=0$): symetria, brak przemieszczenia wzdłuż osi x ,
- krawędź prawa ($x=L_x$): brak warunku brzegowe, swobodne przemieszczenie krawędzi.

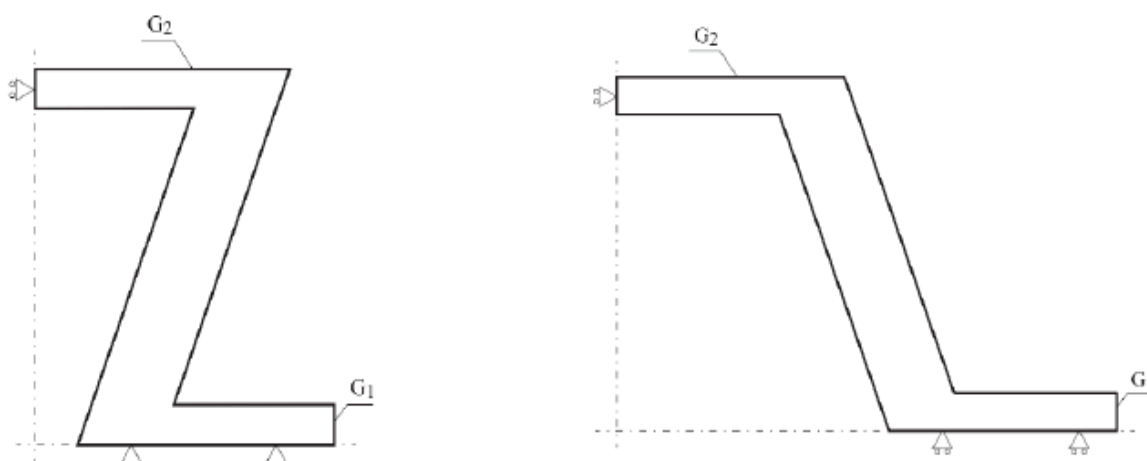
Elementami skończonymi, na jakie zastał podzielony to elementy trójkątne, wykorzystując algorytm automatyczny generowania siatki. W przypadku konwencjonalnego plastra miodu model podzielono na 29014, natomiast plastra miodu re-entrant na 29420 elementów skończonych trójkątnych (Rys. 5.1.2 i 5.1.3).



Rys.5.1.2 Model konwencjonalnego plastra miodu podzielony na 29014 powierzchniowych elementów skończonych



Rys.5.1.3 Model plastra miodu re-entrant podzielony na 29420 powierzchniowych elementów skończonych



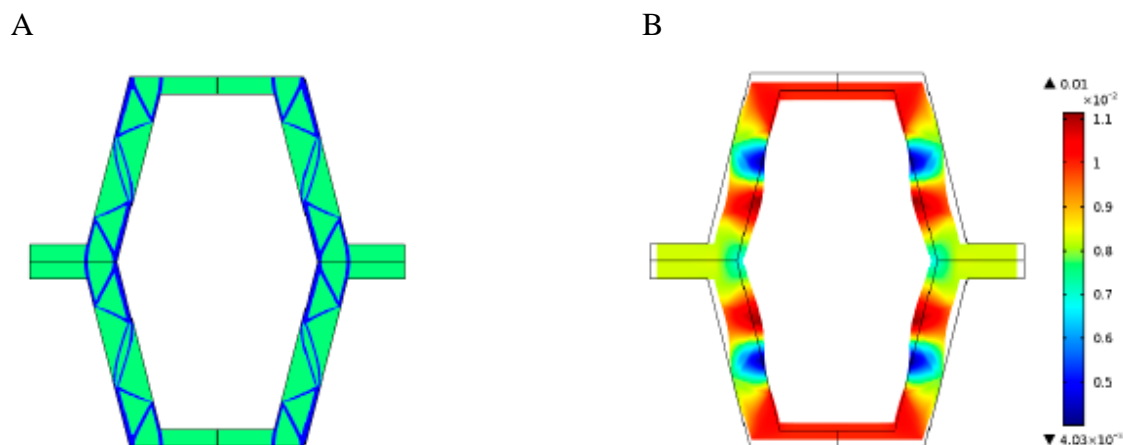
Rys. 5.1.4 Warunki brzegowe dla modeli plastrów miodu: A – re-entrant oraz B – konwencjonalnego [Strek 2017a]

5.2 Wyniki numeryczne obliczeń

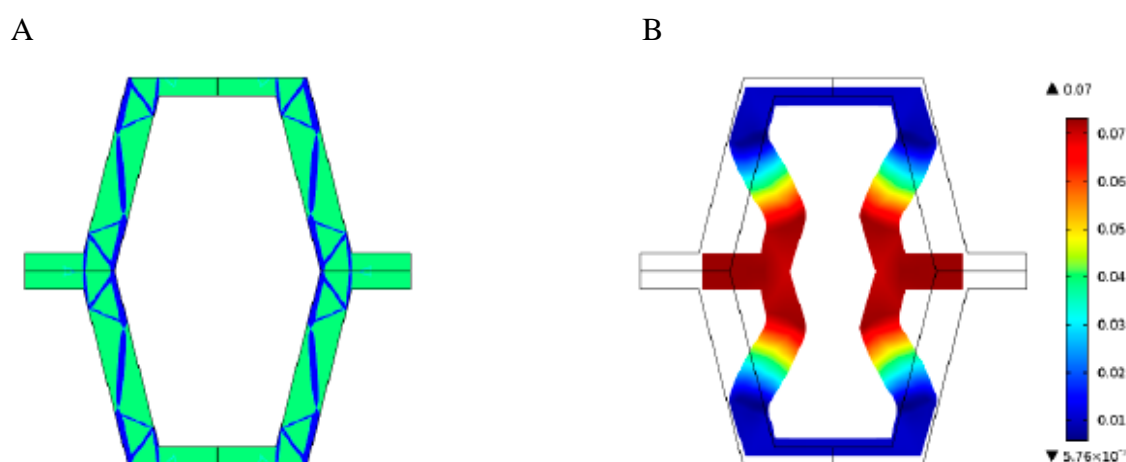
5.2.1 Minimalizacja efektywnego współczynnika Poissona w konwencjonalnym plastrze miodu

Na Rys. 5.2.1.1 – 5.2.1.8 zaprezentowano wyniki optymalizacji dwufazowej w strukturze konwencjonalnego plastra miodu. Po prawej stronie obok finalnego uzyskanego rozłożenia dwóch materiałów w strukturze widoczne jest odkształcenie modelu ilustrujące efekt ujemnego współczynnika Poissona. Każdy proces poszukiwania najlepszego odbywa się dla stałego procentu udziału materiału o większym module Younga. W przypadku poniższych modeli optymalizowano współczynnik Poissona dla

$A_f = 20\%$ oraz $A_f = 40\%$. Wyniki uzyskano dla dwóch grubości t : $t=0.2$ m oraz $t=0.28$ m. „Materiał twardy” jest na ilustracjach z lewej strony zaprezentowany przez kolor niebieski, a „materiał miękki” przez kolor zielony.

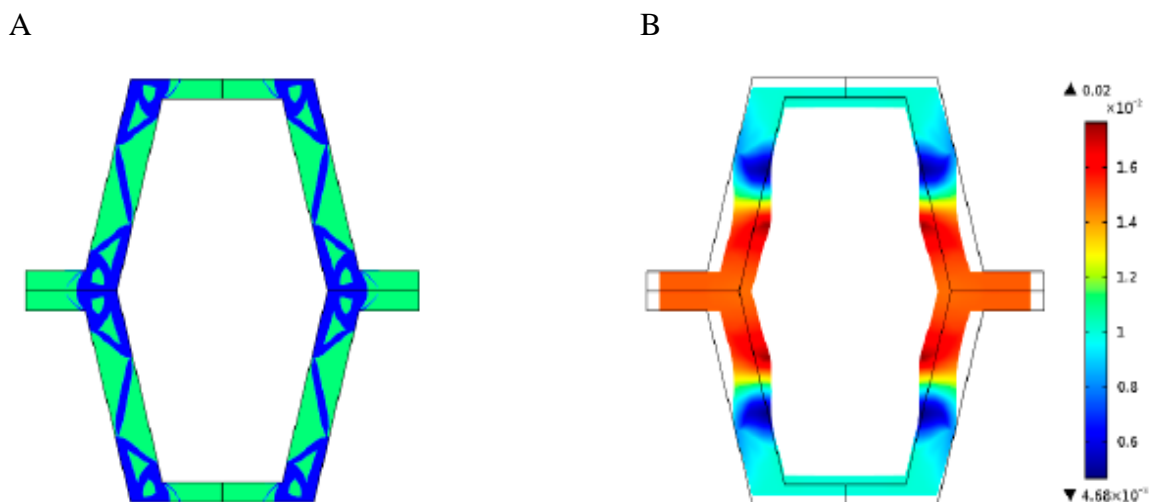


Rys. 5.2.1.1 A - Wynik optymalizacji topologicznej dwufazowej struktury plastra miodu dla założeń: stosunek modułów Younga: $E_2/E_1=10^2$, $A_f = 20\%$, $t = 0.2$; wynikowy uzyskany efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff}=-0.78$; B – obraz odkształcenia komórki pod wpływem siły ściskającej (wielkości w [m]) [Strek 2017a]

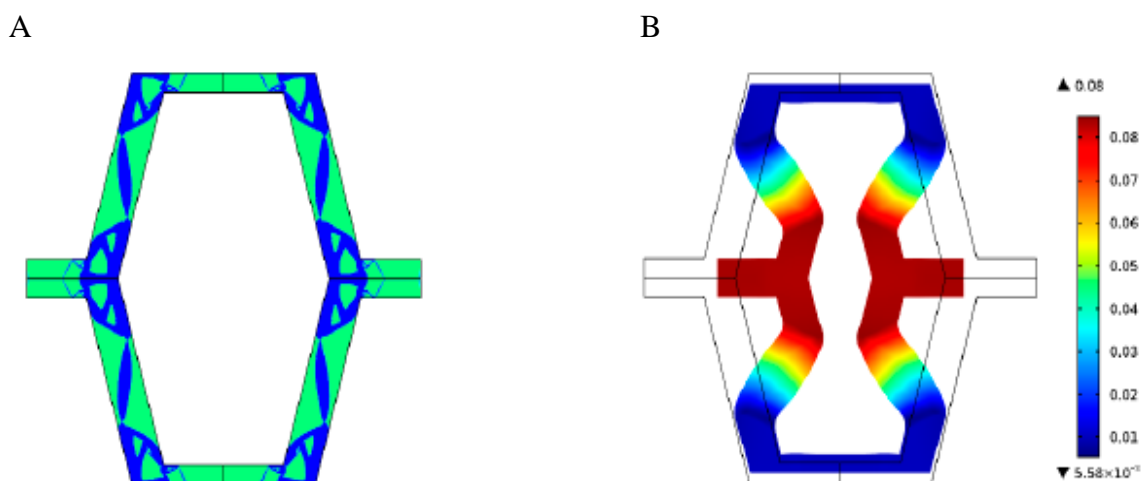


Rys. 5.2.1.2 A - Wynik optymalizacji topologicznej dwufazowej struktury plastra miodu dla założeń: stosunek modułów Younga: $E_2/E_1=10^3$, $A_f = 20\%$, $t = 0.2$; wynikowy uzyskany efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -6.91$; B – obraz odkształcenia komórki pod wpływem siły ściskającej (wielkości w [m]) [Strek 2017a]

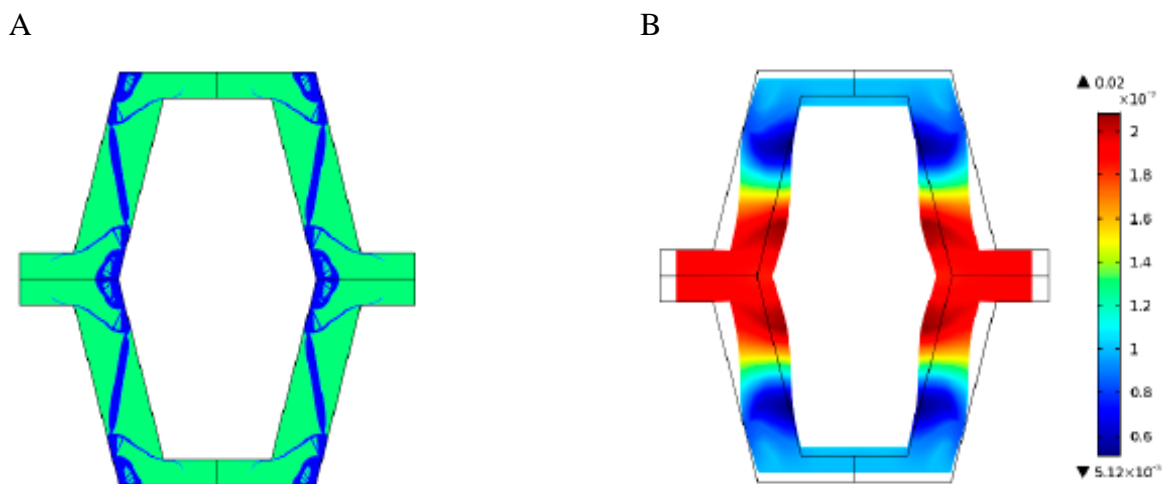
W Tab. 5.2.1.1 zebrano wyniki efektywnych współczynników Poissona dla konwencjonalnego plastra miodu dla różnych warunków początkowych (procentowej zawartości materiału twardego A_f , stosunków modułów Younga oraz grubości t).



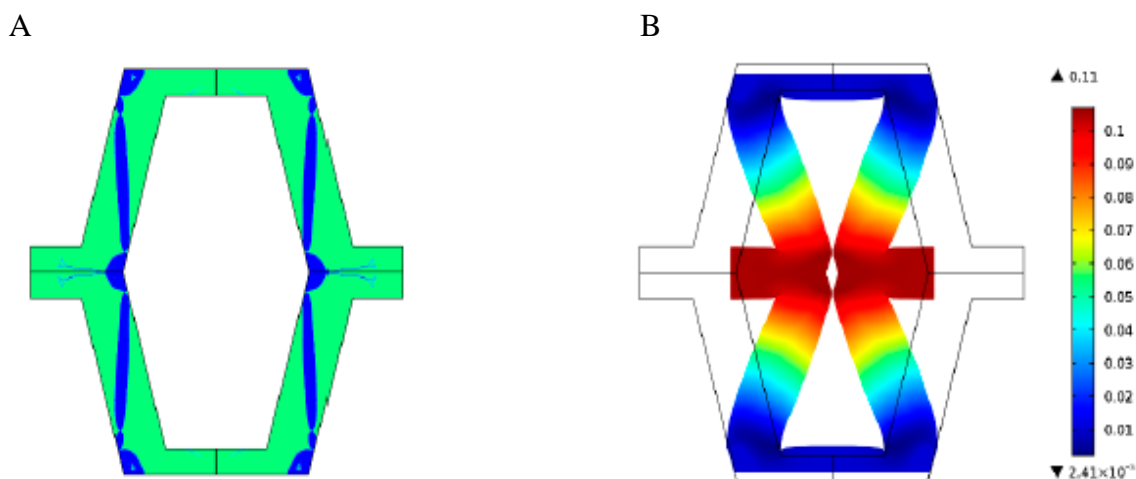
Rys. 5.2.1.3 A - Wynik optymalizacji topologicznej dwufazowej struktury plastra miodu dla założeń: stosunek modułów Younga: $E_2/E_1=10^2$, $A_f = 40\%$, $t = 0.2$; wynikowy uzyskany efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -1.41$; B – obraz odkształcenia komórki pod wpływem siły ściskającej (wielkości w [m]) [Strek 2017a]



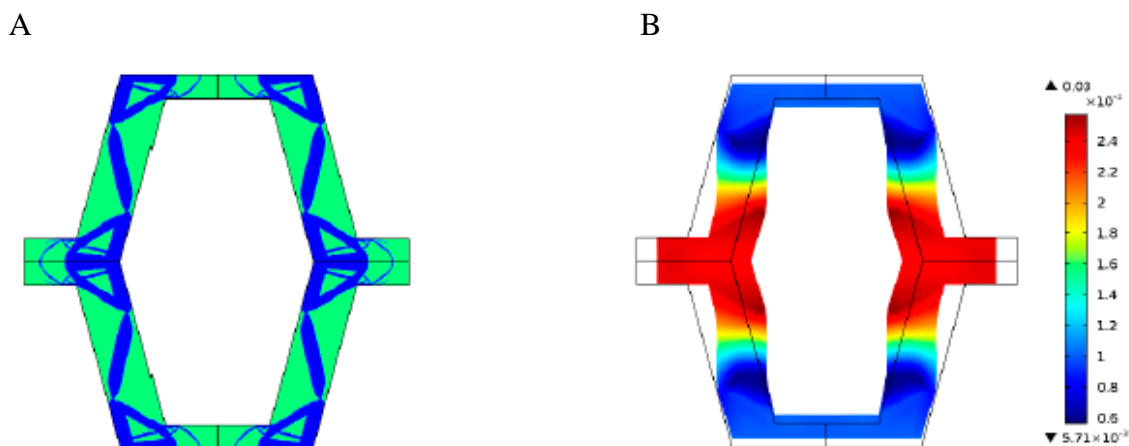
Rys. 5.2.1.4 A - Wynik optymalizacji topologicznej dwufazowej struktury plastra miodu dla założeń: stosunek modułów Younga: $E_2/E_1=10^3$, $A_f = 40\%$, $t = 0.2$; wynikowy uzyskany efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -7.95$; B – obraz odkształcenia komórki pod wpływem siły ściskającej (wielkości w [m]) [Strek 2017a]



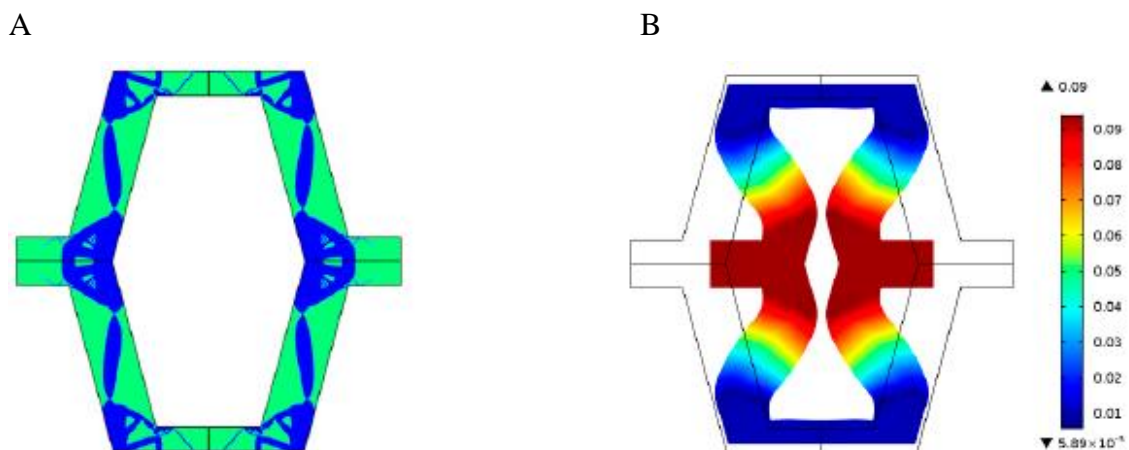
Rys. 5.2.1.5 A - Wynik optymalizacji topologicznej dwufazowej struktury plastra miodu dla założeń: stosunek modułów Younga: $E_2/E_1=10^2$, $A_f = 20\%$, $t = 0.28$; wynikowy uzyskany efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -1.89$; B – obraz odkształcenia komórki pod wpływem siły ściskającej (wielkości w [m]) [Strek 2017a]



Rys. 5.2.1.6 A - Wynik optymalizacji topologicznej dwufazowej struktury plastra miodu dla założeń: stosunek modułów Younga: $E_2/E_1=10^3$, $A_f = 20\%$, $t = 0.28$; wynikowy uzyskany efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -10.33$; B – obraz odkształcenia komórki pod wpływem siły ściskającej (wielkości w [m]) [Strek 2017a]



Rys.5.2.1.7 A - Wynik optymalizacji topologicznej dwufazowej struktury plastra miodu dla założeń: stosunek modułów Younga: $E_2/E_1=10^2$, $A_f = 40\%$, $t = 0.28$; wynikowy uzyskany efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff}=-2.39$; B – obraz odkształcenia komórki pod wpływem siły ściskającej (wielkości w [m]) [Strek 2017a]



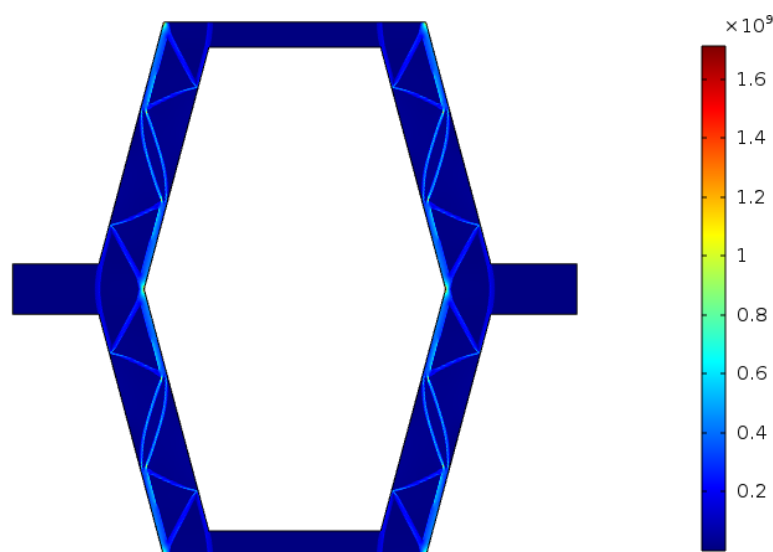
Rys. 5.2.1.8 A - Wynik optymalizacji topologicznej dwufazowej struktury plastra miodu dla założeń: stosunek modułów Younga: $E_2/E_1=10^3$, $A_f = 40\%$, $t = 0.28$; wynikowy uzyskany efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff}=-9.17$; B – obraz odkształcenia komórki pod wpływem siły ściskającej (wielkości w [m]) [Strek 2017a]

Analizując wyniki przedstawione na Rys. 5.2.1.1 – 5.2.1.8 można zauważyć, iż mniejsze wartości efektywnych współczynników Poissona uzyskano dla większego stosunku modułów Younga obu materiałów wypełniających. Również większa grubość komórki heksagonalnej sprzyja uzyskiwaniu mniejszego efektywnego współczynnika Poissona. W uzyskanych dwufazowych strukturach widać tworzące się „mechanizmy auksetyczne” materiału o większym module Younga, które powodują odpowiednie odkształcenie komórki, gwarantujące efekt auksetyczny.

Tab.5.2.1.1 Zestawienie wyników minimalizacji współczynnika Poissona w dwufazowej strukturze konwencjonalnego plastra miodu

Lp.	Stosunek modułów Younga E_2/E_1	Zawartość procentowa materiału o większym module Younga A_f [%]	Grubość t [m]	Efektywny współczynnik Poissona
1	10^2	20	0.2	-0.78
2	10^3	20	0.2	-6.91
3	10^2	40	0.2	-1.41
4	10^3	40	0.2	-7.95
5	10^2	20	0.28	-1.89
6	10^3	20	0.28	-10.33
7	10^2	40	0.28	-2.39
8	10^3	40	0.28	-9.17

Na Rys. 5.2.1.9 przedstawiono rozkład naprężeń w modelu o parametrach: stosunek modułów Younga 10^2 , zawartości fazy „twardej” $A_f = 20\%$, $t=0,2$, $\nu_{eff} = -0.78$. Największe naprężenia przenoszą fragmenty struktury wypełnione fazą materiału o większym module Younga.

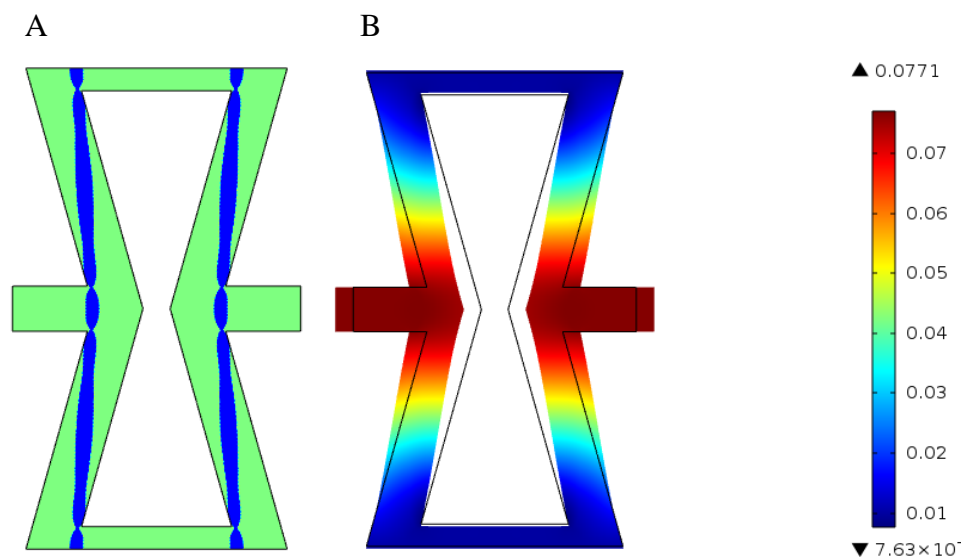


Rys. 5.2.1.9 Rozkład naprężeń von Misesa σ [N/m^2] dla stosunku modułów Younga 10^2 , zawartości $A_f = 20\%$, $t=0.2$ m, $\nu_{eff} = -0.78$

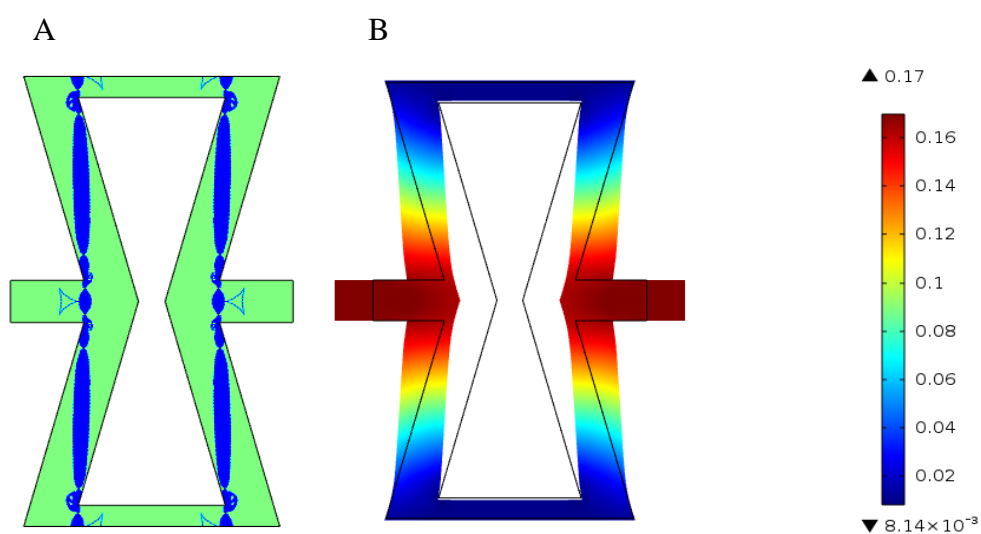
5.2.2 Minimalizacja efektywnego współczynnika Poissona w plastrze miodu re-entrant

Na Rys. 5.2.2.1 – 5.2.2.4 zaprezentowano wyniki minimalizacji dwufazowej w strukturze heksagonalny re-entrant. Wyniki są przedstawione dokładnie dla takich

samych założeń, jak w konwencjonalnej strukturze plastra miodu: dwa różne procentowe udziały „materiału twardego” $A_f = 20\%$ oraz $A_f = 40\%$ oraz grubość: $t=0.2$ m. „Materiał twardy” jest, jak poprzednio, reprezentowany przez kolor niebieski, a „materiał miękki” przez kolor zielony. Różnica występuje w zastosowanych warunkach brzegowych. Zadane przemieszczenie jest tutaj zadane w odwrotnym kierunku: wynosi ono 0.01 m i powoduje osiowe rozciąganie modelu. Wyniki uzyskanych efektywnych współczynników Poissona zebrano w Tab. 5.2.2.1.

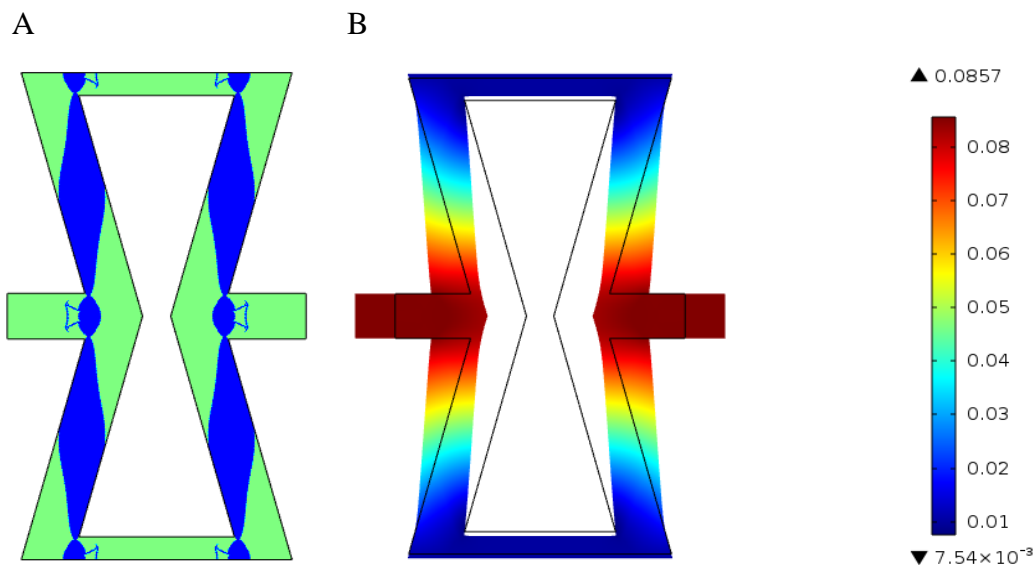


Rys.5.2.2.1 A - Wynik optymalizacji topologicznej dwufazowej struktury plastra miodu re-entrant dla założeń: stosunek modułów Younga: $E_2/E_1=10^2$, $A_f = 20\%$, $t = 0.2$ m; wynikowy uzyskany efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -13.482$; B – obraz odkształcenia komórki pod wpływem siły rozciągającej (wielkości w [m])

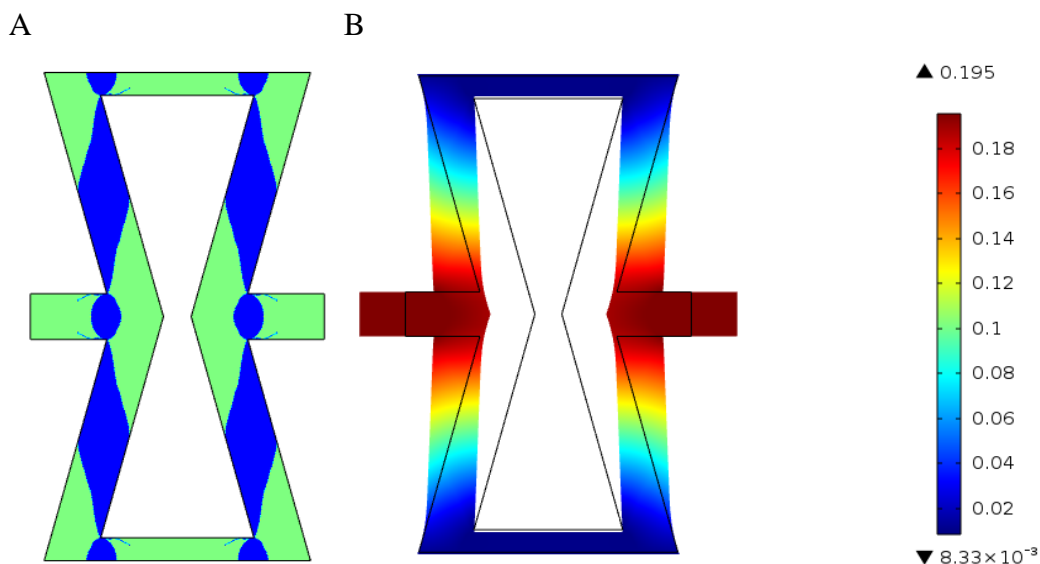


Rys.5.2.2.2 A - Wynik optymalizacji topologicznej dwufazowej struktury plastra miodu re-entrant dla założeń: stosunek modułów Younga: $E_2/E_1=10^3$, $A_f = 20\%$, $t = 0.2$ m;

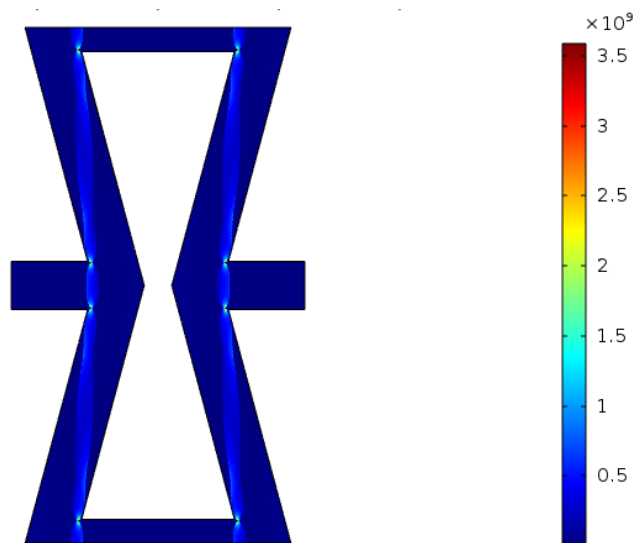
wynikowy uzyskany efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -29.764$; B – obraz odkształcenia komórki pod wpływem siły rozciągającej (wielkości w [m])



Rys.5.2.2.3 A - Wynik optymalizacji topologicznej dwufazowej struktury plastra miodu re--entrant dla założeń: stosunek modułów Younga: $E_2/E_1=10^2$, $A_f = 40\%$, $t = 0.2$ m; wynikowy uzyskany efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -15.01$; B – obraz odkształcenia komórki pod wpływem siły rozciągającej (wielkości w [m])



Rys.5.2.2.4 A - Wynik optymalizacji topologicznej dwufazowej struktury plastra miodu re--entrant dla założeń: stosunek modułów Younga: $E_2/E_1=10^3$, $A_f = 40\%$, $t = 0.2$ m; wynikowy uzyskany efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -34,289$; B – obraz odkształcenia komórki pod wpływem siły rozciągającej (wielkości w [m])



Rys. 5.2.2.5 Rozkład naprężeń von Misesa σ [N/m²] w strukturze re-entrant dla stosunku modułów Younga 10^2 , zawartości $A_f=20\%$, $t=0.2$ m, $\nu_{eff}=-13.482$

Na rysunku 5.2.2.5 przedstawiono rozkład naprężeń dla struktury re-entrant poddanej minimalizacji współczynnika Poissona. Parametry modelu, jak w przykładzie nr 1 Tab. 5.2.2.1. Również, jak i dla poprzednich przypadków największe naprężenia występują w tworzącej się strukturze materiale „twardym” wewnątrz struktury. Wartości naprężeń są podobne do modelu konwencjonalnego heksagonalnego plastra miodu.

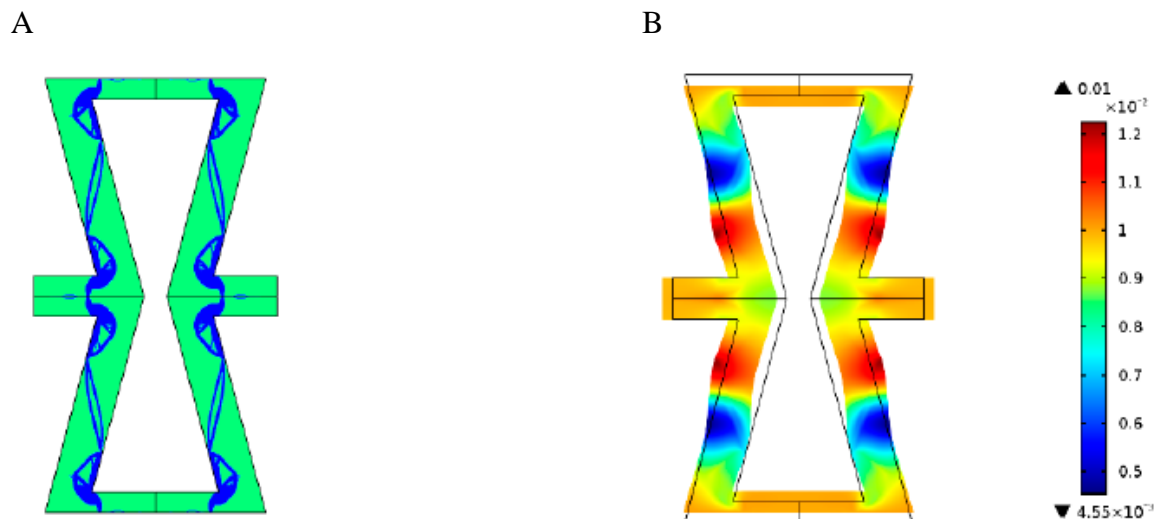
Tab.5.2.2.1 Zestawienie wyników dwufazowej minimalizacji współczynnika Poissona w strukturze heksagonalny re-entrant

Lp.	Stosunek modułów Younga E_2/E_1	Zawartość procentowa materiału o większym module Younga A_f [%]	Grubość t [m]	Efektywny współczynnik Poissona
1	10^2	20	0.2	-13.482
2	10^3	20	0.2	-29.764
3	10^2	40	0.2	-15.01
4	10^3	40	0.2	-34.289

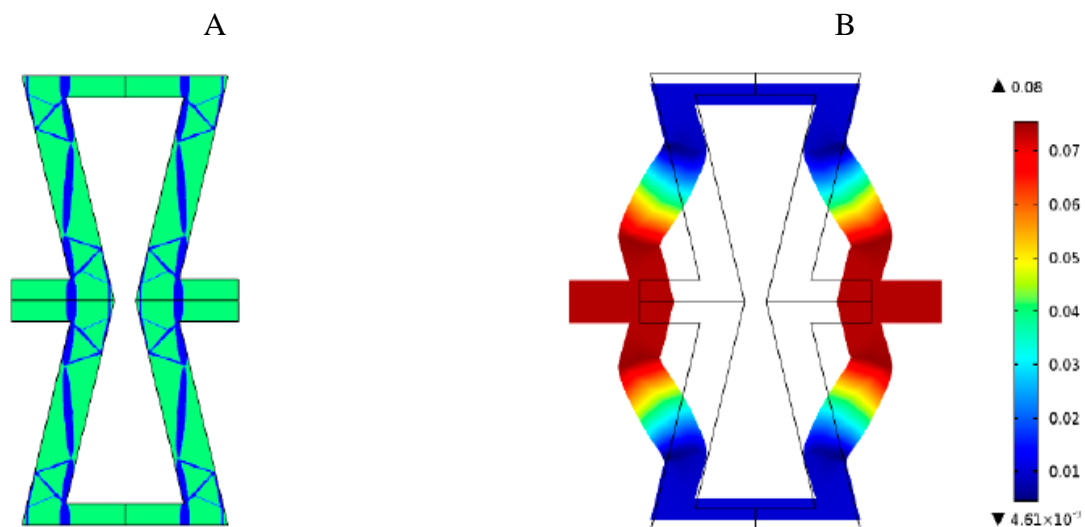
5.2.3 Maksymalizacja efektywnego współczynnika Poissona w strukturze heksagonalnej re-entrant

Dla struktury heksagonalny re-entrant, który będąc zbudowanym z jednego materiału wykazuje ujemny współczynnik Poissona dochodzący do wartości -1, można

również do sprawdzić, czy da się dla niego uzyskać jego dodatnią wartość, stosując dwufazową optymalizację topologiczną. Warunki brzegowe pozostają takie same, natomiast zmiana znaku w funkcji celu powoduje poszukiwanie maksymalnej możliwej liczby Poissona. Wyniki wraz z wartościami uzyskanymi podczas optymalizacji pokazano na Rys. 5.2.3.1 – 5.2.3.8. Jak widać niżej możliwe jest dla tych struktur uzyskanie znacznego dodatniego współczynnika Poissona. Wyniki zebrano w tabeli Tab.5.2.3.1.

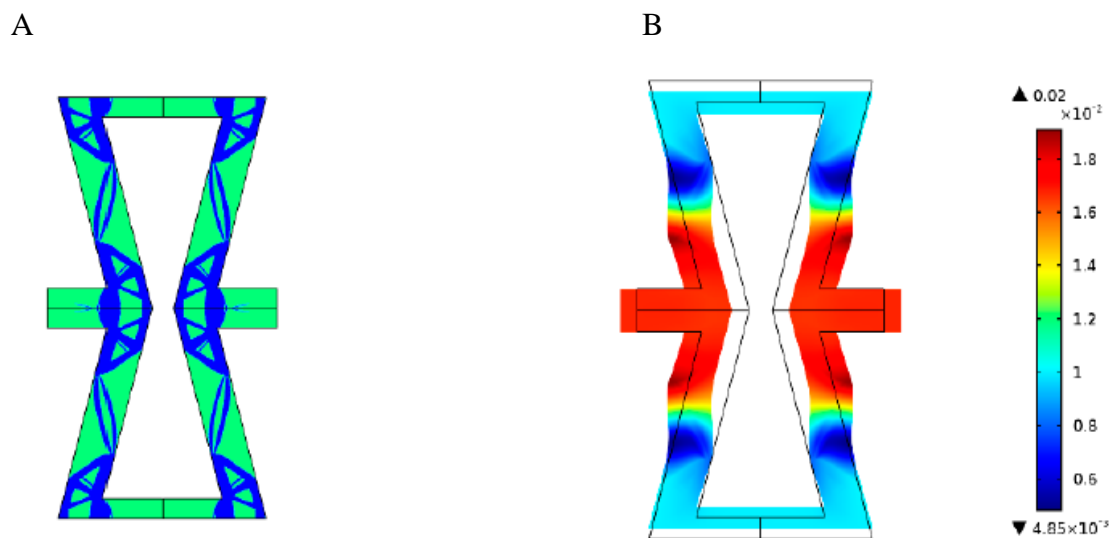


Rys. 5.2.3.1 A - Wynik optymalizacji topologicznej (maksymalizacji) dwufazowej struktury re-entrant dla założeń: stosunek modułów Younga: $E_2/E_1=10^2$, $A_f = 20\%$, $t = 0.2$ m; wynikowy uzyskany efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = 1.74$; B – obraz odkształcenia komórki pod wpływem siły ściskającej (wielkości w [m]) [Strek 2017a]

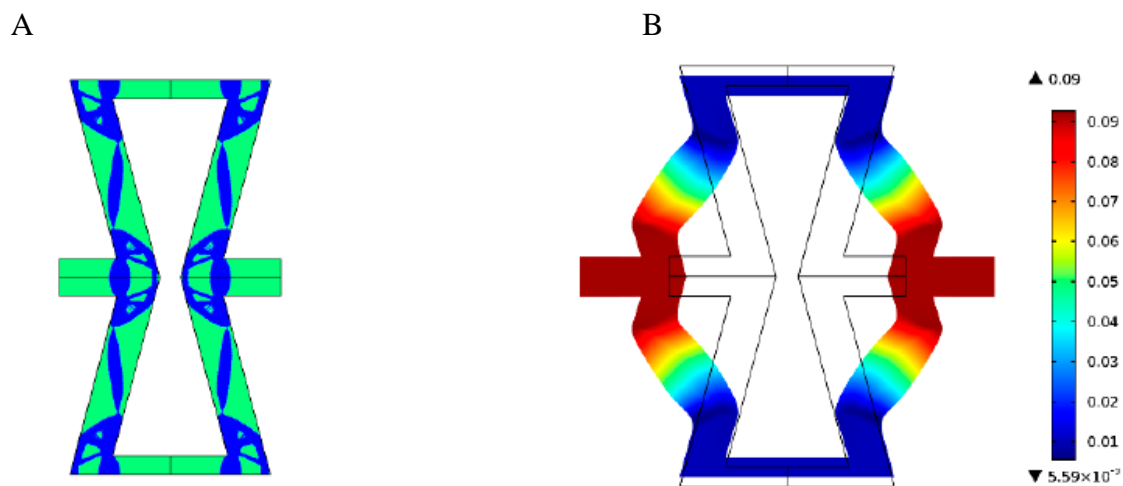


Rys. 5.2.3.2 A - Wynik optymalizacji topologicznej (maksymalizacji) dwufazowej struktury re-entrant dla założeń: stosunek modułów Younga: $E_2/E_1=10^3$, $A_f = 20\%$,

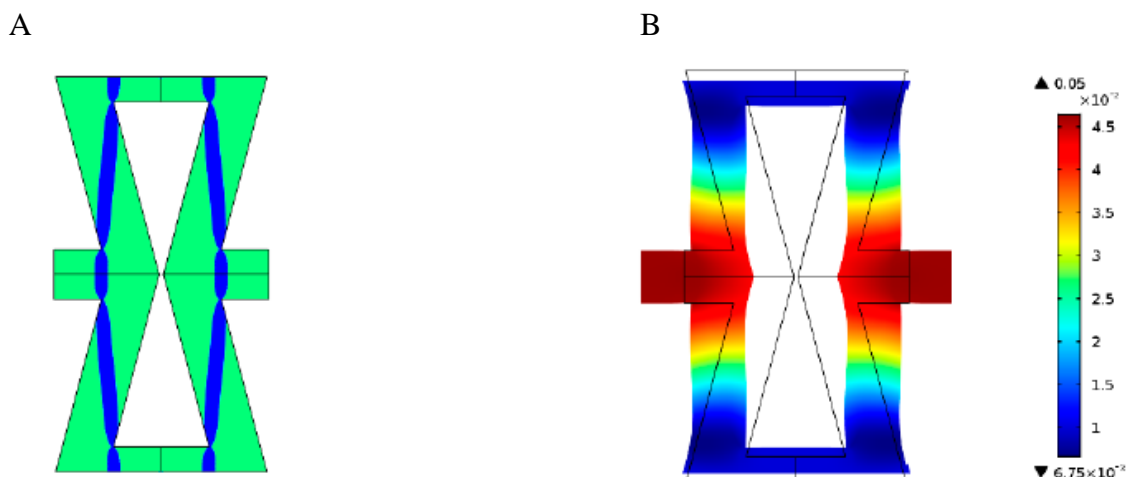
$t = 0.2$; wynikowy uzyskany efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = 12.97$; B – obraz odkształcenia komórki pod wpływem siły ściskającej (wielkości w [m]) [Strek 2017a]



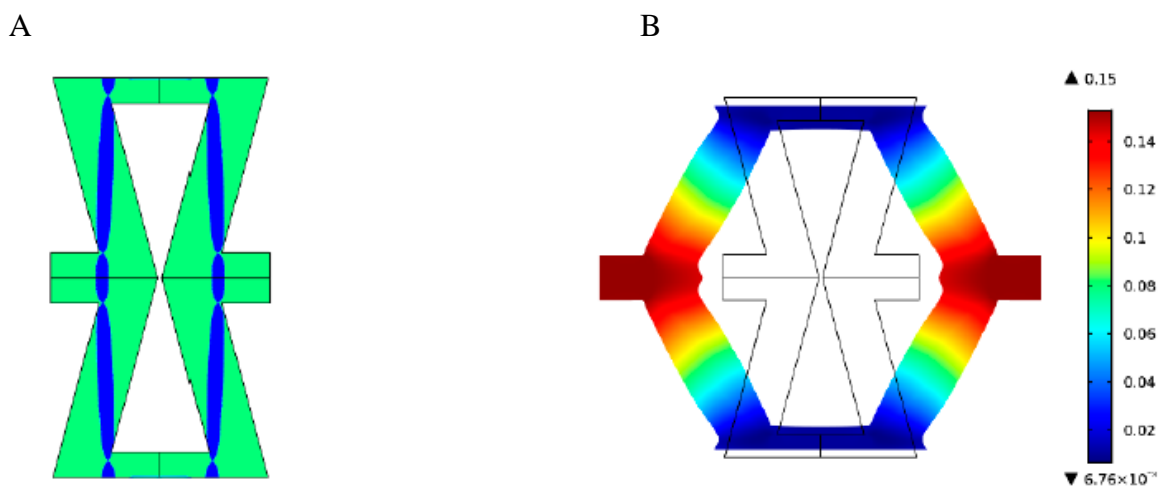
Rys. 5.2.3.3 A - Wynik optymalizacji topologicznej (maksymalizacji) dwufazowej struktury re-entrant dla założeń: stosunek modułów Younga: $E_2/E_1=10^2$, $A_f = 40\%$, $t = 0.2$ m; wynikowy uzyskany efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = 2.95$; B – obraz odkształcenia komórki pod wpływem siły ściskającej (wielkości w [m]) [Strek 2017a]



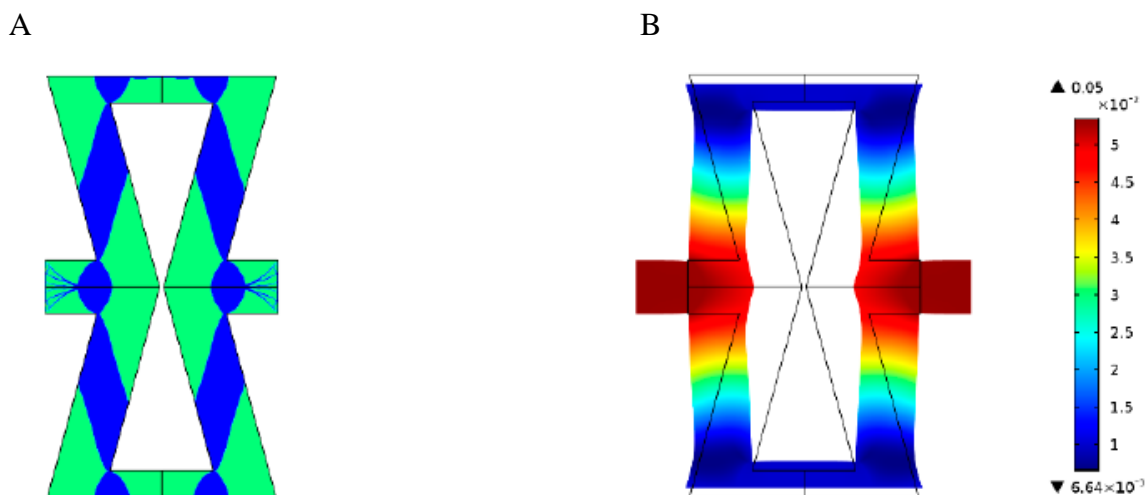
Rys. 5.2.3.4 A - Wynik optymalizacji topologicznej (maksymalizacji) dwufazowej struktury re-entrant dla założeń: stosunek modułów Younga: $E_2/E_1=10^3$, $A_f = 40\%$, $t = 0.2$ m; wynikowy uzyskany efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = 16.11$; B – obraz odkształcenia komórki pod wpływem siły ściskającej (wielkości w [m]) [Strek 2017a]



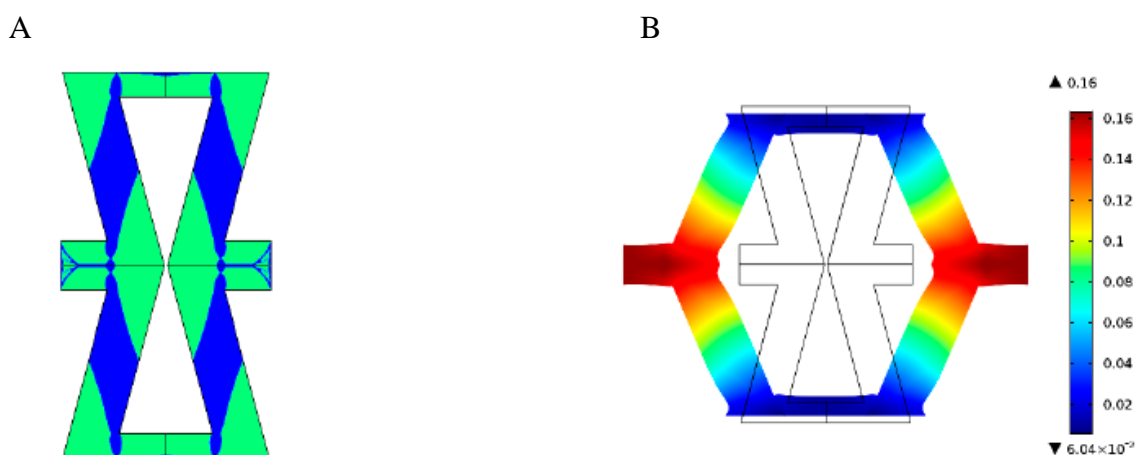
Rys.5.2.3.5 A - Wynik optymalizacji topologicznej (maksymalizacji) dwufazowej struktury re-entrant dla założeń: stosunek modułów Younga: $E_2/E_1=10^2$, $A_f = 20\%$, $t = 0.28$; wynikowy uzyskany efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = 8.42$; B – obraz odkształcenia komórki pod wpływem siły ściskającej (wielkości w [m]) [Strek 2017a]



Rys.5.2.3.6 A - Wynik optymalizacji topologicznej (maksymalizacji) dwufazowej struktury re-entrant dla założeń: stosunek modułów Younga: $E_2/E_1=10^3$, $A_f = 20\%$, $t = 0.28$ m; wynikowy uzyskany efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = 27.84$; B – obraz odkształcenia komórki pod wpływem siły ściskającej (wielkości w [m]) [Strek 2017a]



Rys. 5.2.3.7 A - Wynik optymalizacji topologicznej (maksymalizacji) dwufazowej struktury re-entrant dla założeń: stosunek modułów Younga: $E_2/E_1=10^2$, $A_f = 40\%$, $t = 0.28$ m; wynikowy uzyskany efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff}= 9.67$; B – obraz odkształcenia komórki pod wpływem siły ściskającej (wielkości w [m]) [Strek 2017a]



Rys.5.2.3.8 A - Wynik optymalizacji topologicznej (maksymalizacji) dwufazowej struktury re-entrant dla założeń: stosunek modułów Younga: $E_2/E_1=10^3$, $A_f = 40\%$, $t = 0.28$ m; wynikowy uzyskany efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff}= 29.7$; B – obraz odkształcenia komórki pod wpływem siły ściskającej (wielkości w [m]) [Strek 2017a]

Analizując wyniki maksymalizacji efektywnego współczynnika Poissona widać, że podobnie jak dla minimalizacji lepsze wyniki uzyskano dla większych grubości $t = 0.28$ m oraz większego stosunku modułów Younga materiałów wypełniających. Im większa grubość struktury tym większa możliwość optymalizacji rozłożenia obu materiałów.

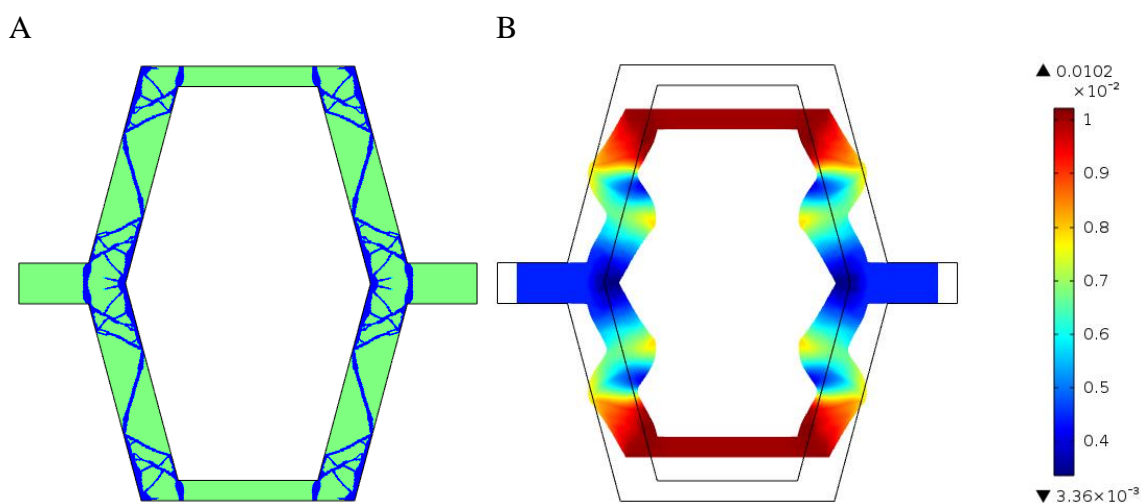
Tab.5.2.3.1 Zestawienie wyników dwufazowej maksymalizacji współczynnika Poissona w strukturze plastra miodu re-entrant

Lp.	Stosunek modułów Younga E_2/E_1	Zawartość procentowa materiału o większym module Younga A_f [%]	Grubość t [m]	Efektywny współczynnik Poissona
1	10^2	20	0.2	1.74
2	10^3	20	0.2	12.97
3	10^2	40	0.2	2.95
4	10^3	40	0.2	16.11
5	10^2	20	0.28	8.42
6	10^3	20	0.28	27.84
7	10^2	40	0.28	9.67
8	10^3	40	0.28	29.7

5.2.4 Optymalizacja topologiczna za pomocą metody RAMP

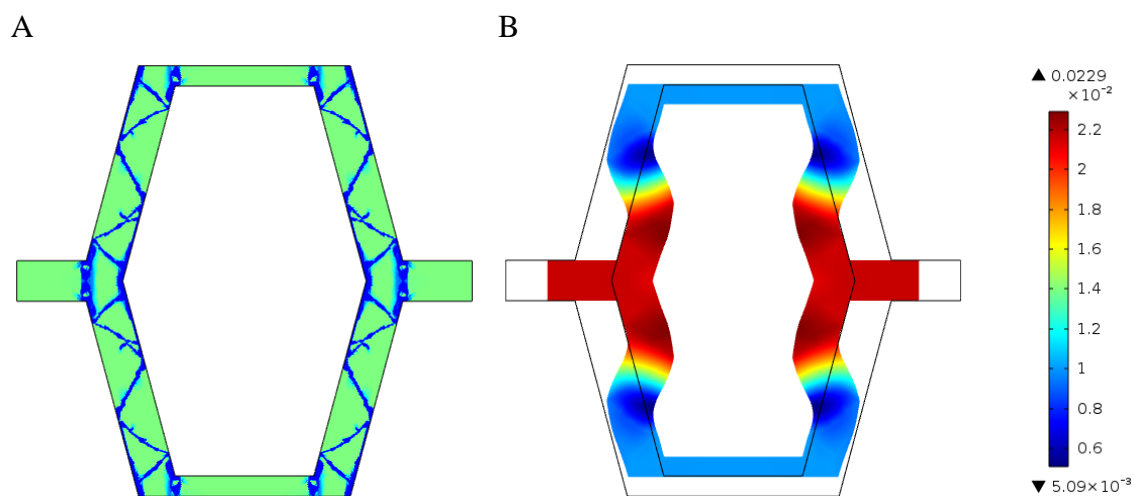
W ramach obliczeń optymalizacyjnych przeprowadzono również szereg obliczeń z wykorzystaniem schematu interpolacji RAMP. Opis matematyczny metody został przedstawiony w rozdziale 3.4.

Na Rys. 5.2.4.1 – 5.2.4.2 zostały przedstawione wyniki optymalizacji, w których RAMP zastąpił SIMP przy wyznaczaniu efektywnych współczynników Poissona dla konwencjonalnego plastra miodu. Warunki brzegowe oraz model zostały opisane w rozdziale 5.1. Wyniki uzyskane porównano w tabeli z przeprowadzonymi z użyciem SIMP, gdzie jedyną różnicą były użyte schematy interpolacji.

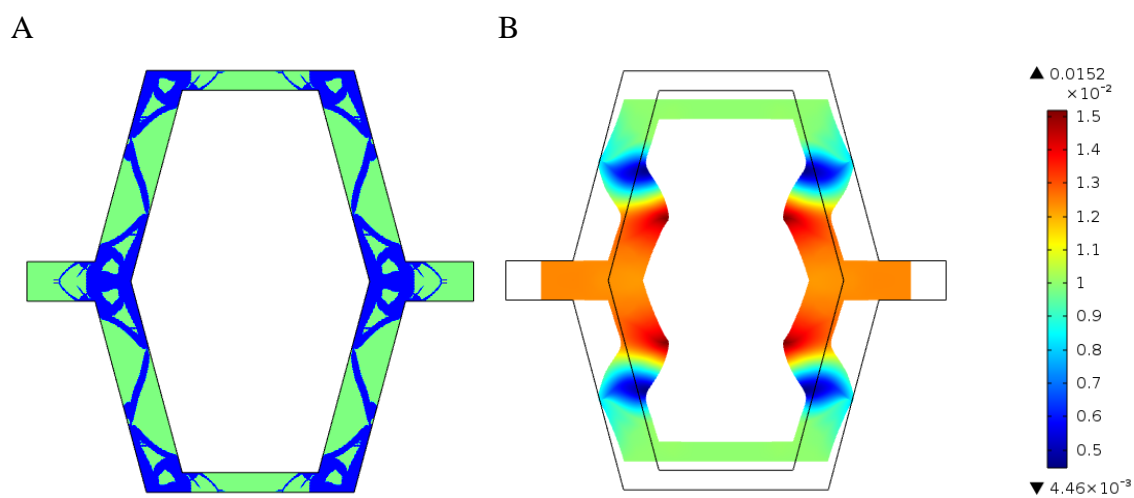


Rys. 5.2.4.1 A - Wynik optymalizacji topologicznej dwufazowej struktury konwencjonalnego plastra miodu z użyciem schematu RAMP dla założeń: stosunek

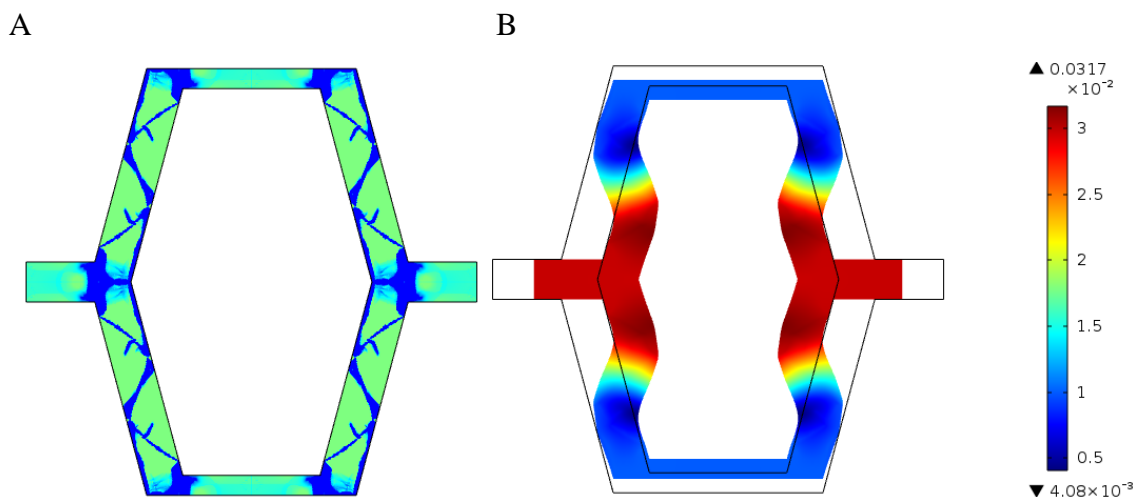
modułów Younga: $E_2/E_1=10^2$, $A_f = 20\%$, wynikowy uzyskany efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -0.42$; B – obraz odkształcenia komórki pod wpływem siły ściskającej (wielkości w [m])



Rys. 5.2.4.2 A - Wynik optymalizacji topologicznej dwufazowej struktury konwencjonalnego plastra miodu z użyciem schematu RAMP dla założeń: stosunek modułów Younga: $E_2/E_1=10^3$, $A_f = 20\%$, wynikowy uzyskany efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -2.05$; B – obraz odkształcenia komórki pod wpływem siły ściskającej (wielkości w [m])



Rys. 5.2.4.3 A - Wynik optymalizacji topologicznej dwufazowej struktury konwencjonalnego plastra miodu z użyciem schematu RAMP dla założeń: stosunek modułów Younga: $E_2/E_1=10^3$, $A_f = 20\%$, wynikowy uzyskany efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -1.18$; B – obraz odkształcenia komórki pod wpływem siły ściskającej (wielkości w [m])



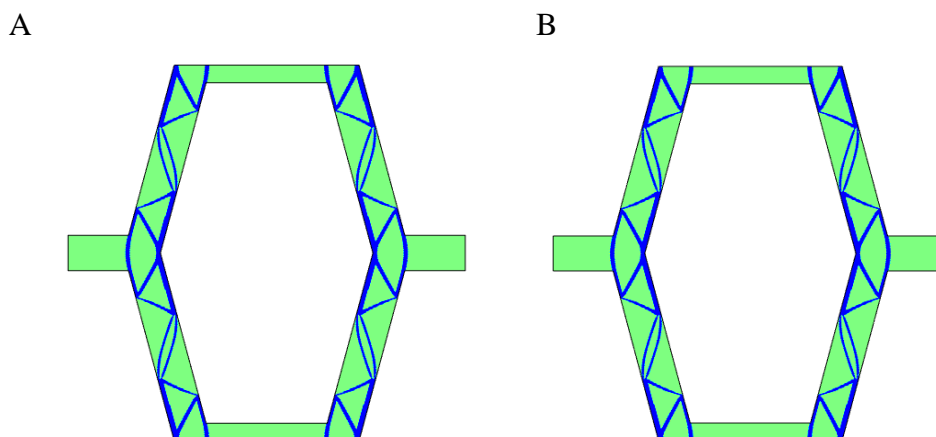
Rys. 5.2.4.4 A - Wynik optymalizacji topologicznej dwufazowej struktury konwencjonalnego plastra miodu z użyciem schematu RAMP dla założeń: stosunek modułów Younga: $E_2/E_1=10^3$, $A_f = 20\%$, wynikowy uzyskany efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -2.82$; B – obraz odkształcenia komórki pod wpływem siły ściskającej (wielkości w [m])

Tab. 5.2.4.1 Porównanie efektywnych współczynników Poissona uzyskanych metodami SIMP i RAMP dla struktury plastra miodu

Parametry	SIMP	RAMP
$A_f = 20\%$, $E_2/E_1 = 10^2$	-0.78	-0.42
$A_f = 20\%$, $E_2/E_1 = 10^3$	-6.91	-2.05
$A_f = 40\%$, $E_2/E_1 = 10^2$	-1.41	-1.18
$A_f = 40\%$, $E_2/E_1 = 10^3$	-7.95	-2.82

5.2.5 Optymalizacja z równymi współczynnikami Poissona materiałów wypełniających

Sprawdzono różnicę w osiągniętych efektywnych współczynnikach Poissona dla struktury konwencjonalnego plastra miodu, gdy współczynniki Poissona materiałów wypełniających są takie same i wynoszą $\nu=0.33$.



Rys. 5.2.5.1 Uzyskane optymalne struktury z minimalnym współczynnikiem Poissona: A – dla $\nu_1 = 0.1$; $\nu_2 = 0.33$; $\nu_{eff} = -0.78299$; B – dla $\nu_1 = \nu_2 = 0.33$; $\nu_{eff} = -0.783$

Dla modelu konwencjonalnego plastra miodu przy właściwościach materiałów obu faz: $E_1 = 10^9$ MPa, $E_2 = 10^{11}$ MPa, zastosowaniu schematu interpolacji SIMP ($p=3$), 29014 elementach skończonych w modelu oraz udziału materiału 2 („twardego”) $A_f = 20\%$ uzyskano taki sam (~ 0.001 , wartości $\nu_{eff} = -0.78299$ oraz $\nu_{eff} = -0.783$) efektywny współczynnik Poissona, przy równych i różnych współczynnikach Poissona materiałów wypełniających. Również optymalne struktury wyglądają identycznie.

5.2.6 Optymalizacja z wprowadzonym parametrem regularyzacji

Dokładność rozkładu zmiennej kontrolnej, a przez to dokładność minimalizacji/ maksymalizacji liczby Poissona w całej strukturze można zapisać jako:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\delta r}{\delta x} \right)^2 + \left(\frac{\delta r}{\delta y} \right)^2 d\Omega \quad (5.2.6.1)$$

gdzie: Ω – powierzchnia całego optymalizowanego obszaru struktury, r – zmienna kontrolna, x, y – współrzędne punktów w modelu.

Jeśli jako dodatkowe kryterium optymalizacji wprowadzimy ograniczenie dla dokładności rozkładu na określonym zadowalającym poziomie, to otrzymamy gwarancję dokładności rozwiązań.

Ograniczenie to jest określone parametrem regularyzacji: (p_{reg}).

$$0 < \int_{\Omega} \left(\frac{\delta r}{\delta x} \right)^2 + \left(\frac{\delta r}{\delta y} \right)^2 d\Omega < p_{reg} \quad (5.2.6.2)$$

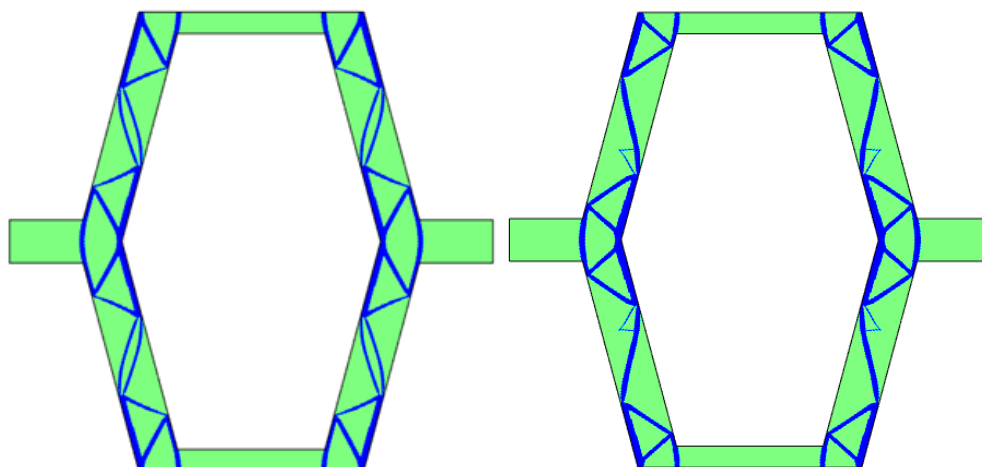
Dla badanych kształtów przeprowadzono dwufazową minimalizację współczynnika Poissona z dodatkowymi kryteriami optymalizacji, w których zgodnie z powyższym równaniem (5.2.6.2) $p_{reg} = 1, 100$ oraz 1000 .

Wyniki porównawcze obliczeń dla konwencjonalnego heksagonalnego plastra miodu pokazano na Rys. 5.2.6.1 - 5.2.6.2.

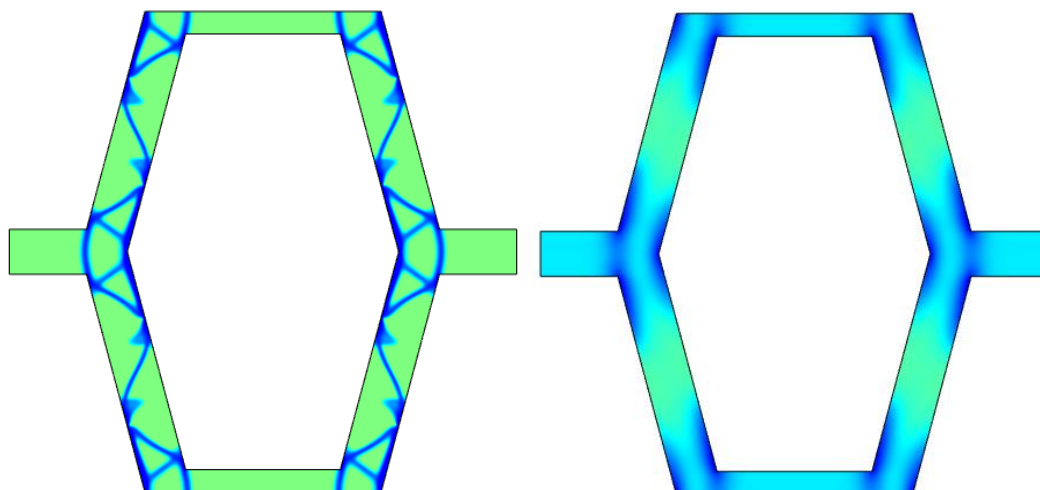
Przeprowadzono minimalizację współczynnika Poissona przy udziale fazy „twardej” $A_f = 20\%$, właściwościach obu faz: $E_1 = 10^9$ MPa, $E_2 = 10^{11}$ MPa, $\nu_1 = 0.1$, $\nu_2 = 0.33$, przy metodzie interpolacji SIMP oraz siatce elementów skończonych, tworzonej automatycznie, w liczbie 29014. Zastosowano:

- Brak ograniczeń dotyczących wartości parametru regularyzacji,
- Ograniczenie do wartości 1000,
- Ograniczenie do wartości 100,
- Ograniczenie do wartości 1.

Zoptymalizowane w ten sposób struktury przedstawiono na Rys. 5.2.6.1, 5.2.6.2 oraz zebrano w Tab. 5.2.6.1.



Rys. 5.2.6.1 Struktura heksagonalnego dwufazowego konwencjonalnego plastra miodu: A – bez wprowadzania do optymalizacji ograniczenia p_{reg} , B - przy wprowadzeniu parametru regularyzacji – maksymalna wartość: $p_{reg} = 1000$, $\nu_{eff} = -0.95623$, końcowe $p_{reg} = 935.15$



Rys. 5.2.6.2 Struktura heksagonalnego dwufazowego konwencjonalnego plastra miodu: A - przy wprowadzeniu parametru regularyzacji – maksymalna wartość: $p_{reg} = 100$, $v_{eff} = -0.051854$, końcowe $p_{reg} = 99.884$, B - przy wprowadzeniu parametru regularyzacji – maksymalna wartość: $p_{reg} = 1$, $v_{eff} = 1.6863$, końcowe $p_{reg} = 0.99965$

Tab. 5.2.6.1. Zestawienie wyników dla różnych ograniczeń parametru regularyzacji

Ograniczenie	Wartość końcowa p_{reg}	v_{eff}
brak	1051.8	-0.788299
$0 < p_{reg} < 1000$	935.15	-0.95623
$0 < p_{reg} < 100$	99.884	-0.051854
$0 < p_{reg} < 1$	0.99965	1.6863

W wyniku przeprowadzonych symulacji i analizy wyników w tabeli można stwierdzić, że znaczące ograniczenie parametru regularyzacji prowadzi do niezyskania ujemnego współczynnika Poissona i braku otrzymania jednoznacznej struktury wynikowej. Dla parametru regularyzacji mniejszego od 1 nie otrzymano struktury, w której wszystkie elementy skończone przyjmują wartości 0 lub 1, a przyjmują natomiast stany pośrednie.

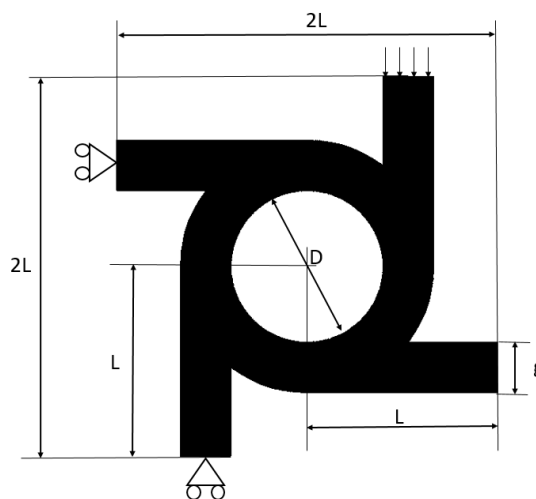
6 Optymalizacja topologiczna dwufazowych struktur chiralnych

6.1 Model oraz warunki brzegowe

W rozdziale 2.3 opisano grupę metamateriałów auksetycznych nazywanych chiralnymi. Struktury takie składają się z dużej ilości połączonych ze sobą pojedynczych komórek, na które składają się łączniki i węzły. W zależności od kształtu węzłów oraz ilości wychodzących z nich łączników struktury chiralne dzieli się na wiele rodzajów. W zależności od sposobu połączenia węzłów można również wyróżnić struktury chiralne właściwe oraz struktury anty-chiralne. W strukturach o takim kształcie liczba Poissona dochodzi do -1 [Prall1996]. Najniższa jego wartość jest osiągnięta dla kształtu anty-tetra-chiralnego, czyli takiego, w którym z jednego węzła wychodzą cztery łączniki a pojedyncze komórki łączą się ze swoimi lustrzanymi odbiciami.

Sposób optymalizacji jest realizowany z użyciem metody SIMP, a algorytm wyznaczania współczynnika Poissona został przedstawiony w poprzednich rozdziałach.

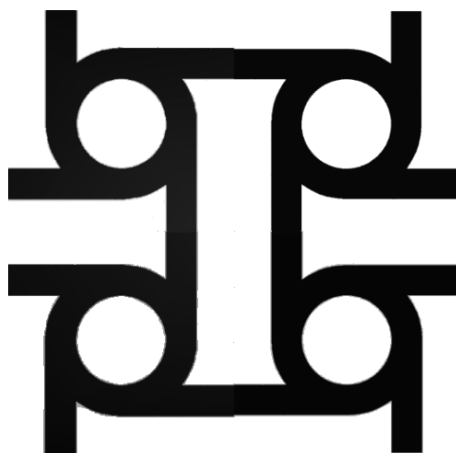
Optymalizacja takiej pojedynczej anty-tetra-chiralnej komórki odbywa się w warunkach obciążenia siłą ściskającą działającą od góry. Rozważany kształt (o wymiarach $2L$ na $2L$) opisywany jest przez wymiary: L – długość łącznika, D – średnica węzła i g – grubość łącznika. W rozpatrywanym przypadku wysokość, jak i szerokość jest taka sama: $L_x = L_y = 2L$ (Rys.6.1.1).



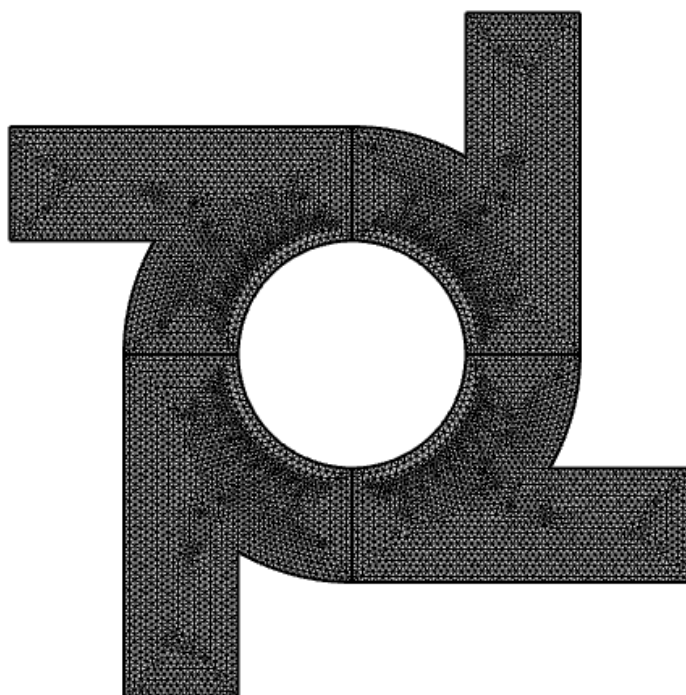
Rys.6.1.1 Warunki brzegowe oraz wymiary pojedynczej komórki

Z powodu podwójnej symetrii optymalizowanego kształtu (rys. 6.1.2) analizie podlega jedynie $\frac{1}{4}$ części najmniejszego możliwego do analizy fragmentu struktury anty-tetra-chiralnej. Warunki brzegowe użyte w obliczeniach są następujące:

- prawa krawędź $x = L$: wolny koniec,
- lewa krawędź (warunek symetryczności) $x = -L$: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$, brak przemieszczenia wzdłuż osi x ,
- dolna krawędź (warunek symetryczności) $y = -L$: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$, brak przemieszczenia wzdłuż osi y ,
- górną krawędź: $y = L$: przyłożona siła $F = 20 \text{ kN/m}$, gdzie: $L = 0.15 \text{ m}$.

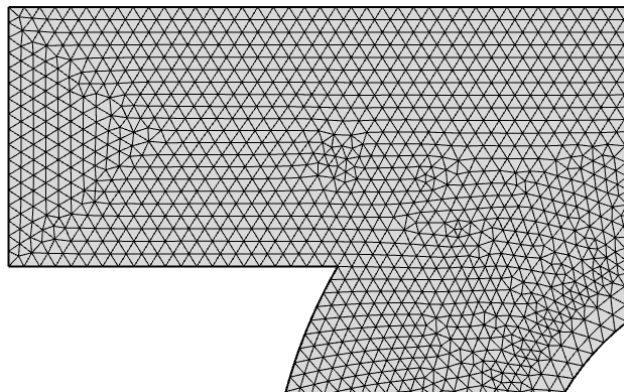


Rys.6.1.2 Geometria struktury anty-tetra-chiralnej (anti-tetra-chiral geometry – ATC)



Rys.6.1.3 Model struktury ATC podzielony na 12904 elementów skończonych

Na Rys. 6.1.3 przedstawiono model struktury anty-tetra-chiralnej podzielony na 12904 elementy skończone trójkątne. Na rys. 6.1.4 powiększeniu przedstawiono fragment struktury. Zastosowany rodzaj elementów skończonych to elementy powierzchniowe rozłożone wg algorytmu automatycznego (tzw. Delauney'a).



Rys. 6.1.4 Powiększony fragment struktury ATC podzielony na elementy powierzchniowe o kształcie trójkąta wg algorytmu automatycznego

6.2 Wyniki numeryczne optymalizacji dwufazowej struktury anty-tetra-chiralnej

6.2.1 Minimalizacja efektywnego współczynnika Poissona przy grubości struktury $g = 0.025$ m

Struktura anty-tetra-chiralna jest wypełniana dwoma materiałami, tak aby uzyskać jak najmniejszy współczynnik Poissona. Obie użyte do wypełnienia domeny materiały są charakteryzowane jedynie poprzez dodatni współczynnik Poissona oraz moduły Younga. Pierwszy z tych dwóch materiałów może być nazywany ze względu na mniejszy moduł Younga „materiałem miękkim”, a drugi ze względu jego większą wartość „materiałem twardym”. Wartości stałych materiałowych dwóch faz:

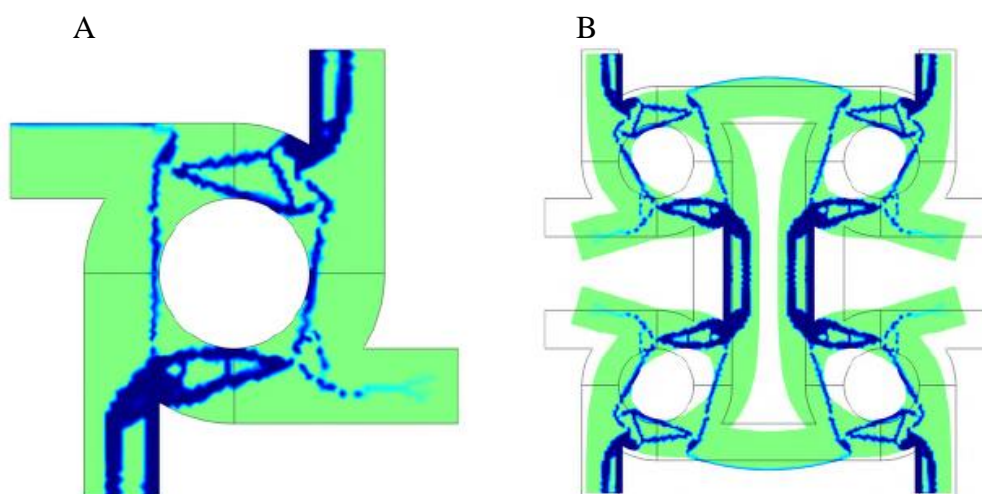
- a) materiał miękki: moduł Younga wynosi $E_1 = 10^7$ Pa (charakterystyczny dla elastomerów), a liczba Poissona $\nu_1 = 0.1$;
- b) materiał twardy: moduł Younga wynosi $E_2 = 2 \cdot 10^{11}$ Pa (charakterystyczny dla stali), a liczba Poissona $\nu_2 = 0.33$.

We wszystkich symulacjach procentowy udział fazy „materiału twardego” w całej domenie jest stały i określany jako A_f . Optymalizację przeprowadzono dla A_f , który procentowo wynosił od 20% do 50%.

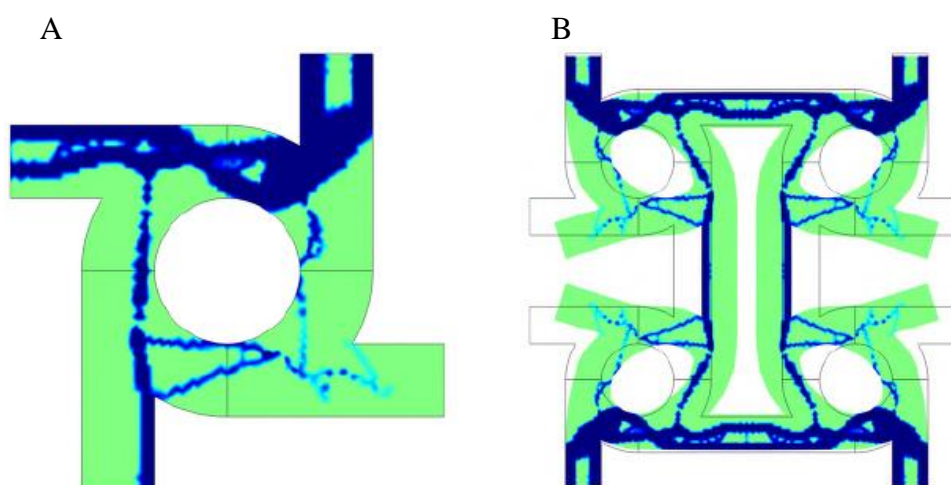
Wymiary zoptymalizowanej struktury określono jako: $L = 0.15$ m, średnica węzła $D = 0.1$ m, a grubość łącznika i węzła $g = 0.025$ m, a w kolejnych symulacjach $g = 0.0125$ m.

Na Rys. 6.2.1.1 – 6.2.1.4 zielony kolor reprezentuje „materiał miękki”, a niebieski reprezentuje „materiał twardy”.

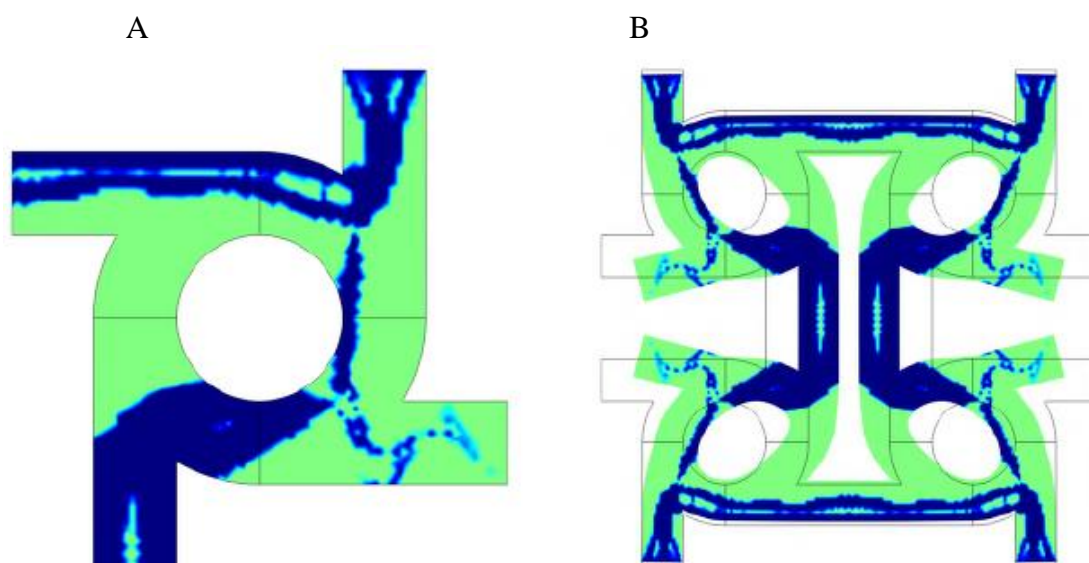
Na Rys. 6.2.1.1A – 6.2.1.4A pokazana jest zoptymalizowana dwufazowa struktura w anti-tetra-chiralnej domenie, w której procentowy „udział materiału twardego” A_f wynosi 20%, 30%, 40% oraz 50%. Efektywny współczynnik Poissona całej struktury po optymalizacji wynosi -6.4188. Na Rys. 6.2.1.1B – 6.2.1.4B pokazano cztery zoptymalizowane komórki anti-tetra-chiralne po odkształceniu.



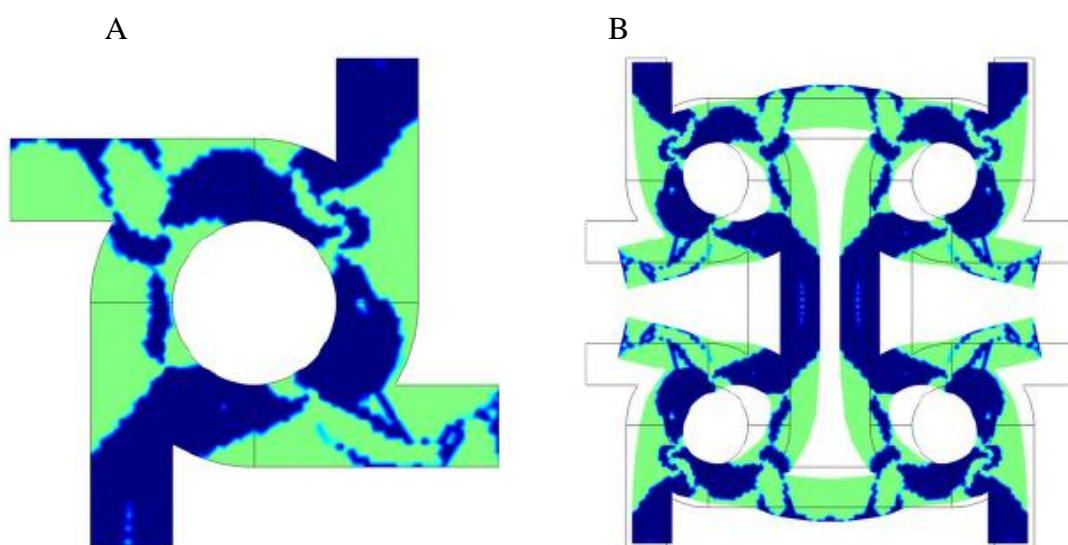
Rys. 6.2.1.1 Wyniki optymalizacji dwufazowej komórki anti-tetra-chiralnej o $A_f = 20\%$: A – pojedyncza zoptymalizowana komórka, B – cztery komórki: obraz po deformacji [Strek2017a]



Rys. 6.2.1.2 Wyniki optymalizacji dwufazowej komórki anti-tetra-chiralnej o $A_f = 30\%$: A – pojedyncza zoptymalizowana komórka, B – cztery komórki: obraz po deformacji [Strek2017a]



Rys.6.2.1.3 Wyniki optymalizacji dwufazowej komórki anti-tetra-chiralnej o $A_f = 40\%$:
 A – pojedyncza zoptymalizowana komórka, B – cztery komórki: obraz po deformacji
 [Strek2017a]



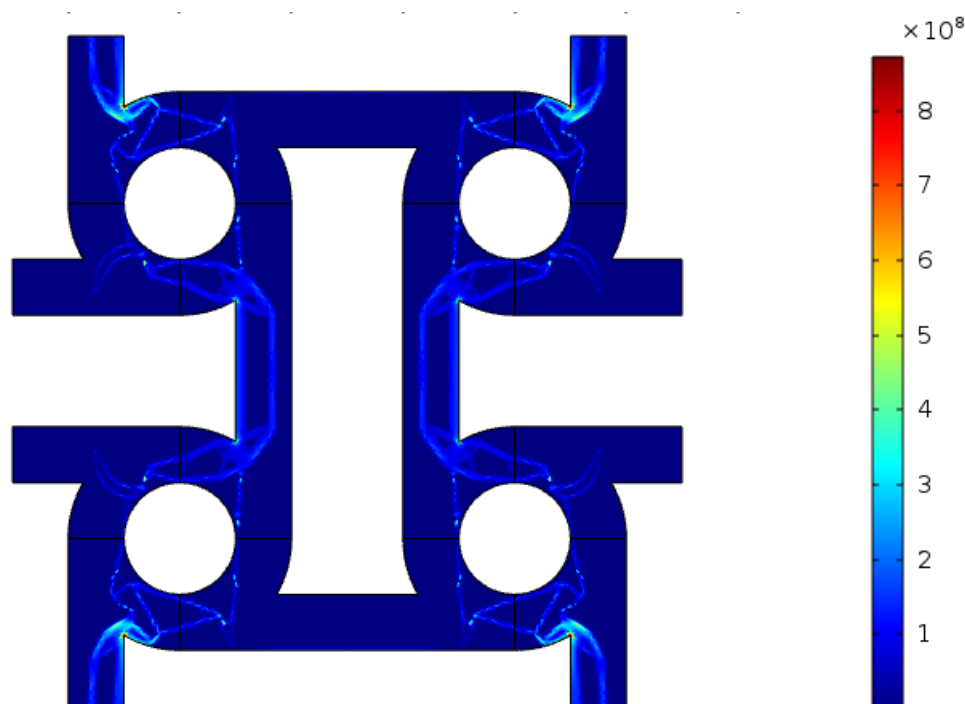
Rys. 6.2.1.4 Wyniki optymalizacji dwufazowej komórki anti-tetra-chiralnej o $A_f = 50\%$:
 A – pojedyncza zoptymalizowana komórka, B – cztery komórki: obraz po deformacji
 [Strek2017a]

Dla różnych A_f uzyskano bardzo podobne wyniki optymalizacji efektywnego współczynnika Poissona na poziomie od -6.4188 do -8.7017.

W strukturze zoptymalizowanej sprawdzono również naprężenia, których rozkład pokazano na rysunku Rys. 6.2.1.5. Były one rzędu 10^8 N/m², a największe wartości uzyskano dla fazy materiału twardego, u dołu oraz góry modelu. Faza o większym module Younga przejmuje większość naprężeń. W pozostałych częściach modelu wypełnionych materiałem o mniejszym module Younga naprężenia były stosunkowo małe i równomiernie rozłożone.

Tab. 6.2.1.1 Wyniki optymalizacji efektywnego współczynnika Poissona dla różnego udziału „materiału twardego” A_f przy grubości $g = 0,025$ m

Struktura	1	2	3	4
A_f	20%	30%	40%	50%
Efektywny współczynnik Poissona	-6.4188	-8.7017	-6.9386	-7.0516

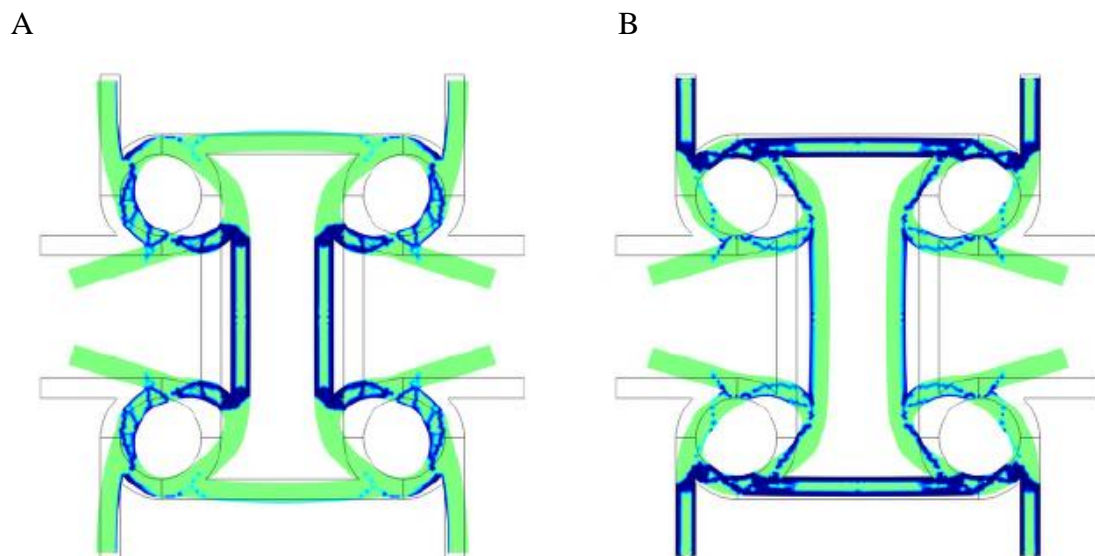


Rys. 6.2.1.5 Rozkład naprężeń von Misesa σ [N/m²] zawartości $A_f = 20\%$, $g = 0.025$ m, $\nu_{eff} = -6.4188$

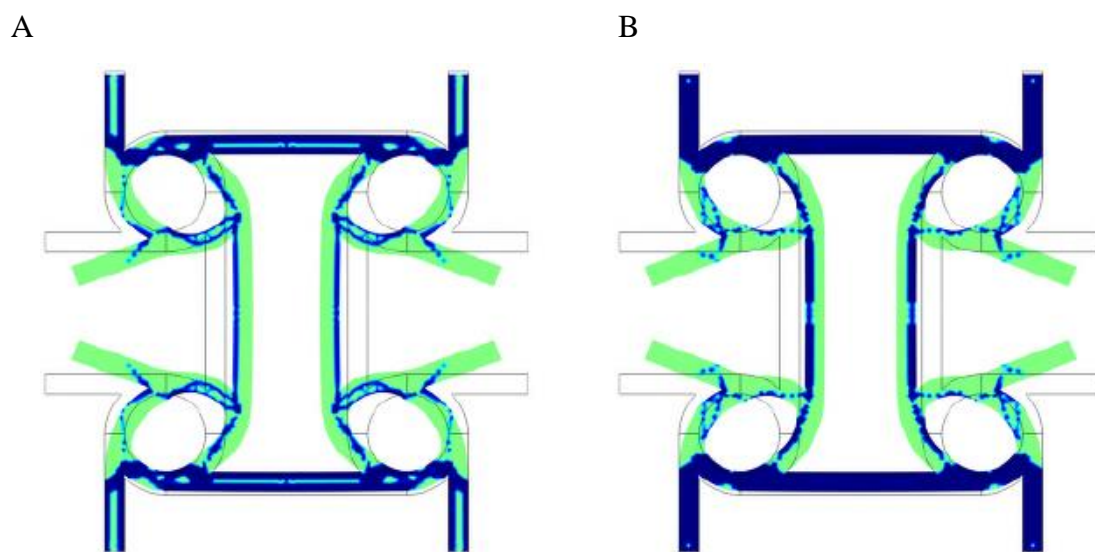
6.2.2 Minimalizacja efektywnego współczynnika Poissona przy grubości struktury $g = 0.0125$ m

Na kolejnych Rys. 6.2.2.1 – 6.2.2.2 przedstawiono odkształcenie struktur anty-tetra-chiralnych po minimalizacji współczynnika Poissona dla struktury o dwukrotnie

mniej niż poprzednio grubości, $g = 0.0125$. Przedstawiono również wyniki dla udziału „materiału twardego” A_f równego 20%, 30%, 40% oraz 50%.



Rys.6.2.2.1 Odształcenie struktur anty-tetra-chiralnych o $g = 0.0125$ m: A – przy $A_f = 20\%$, B – przy $A_f = 30\%$ [Strek2017a]

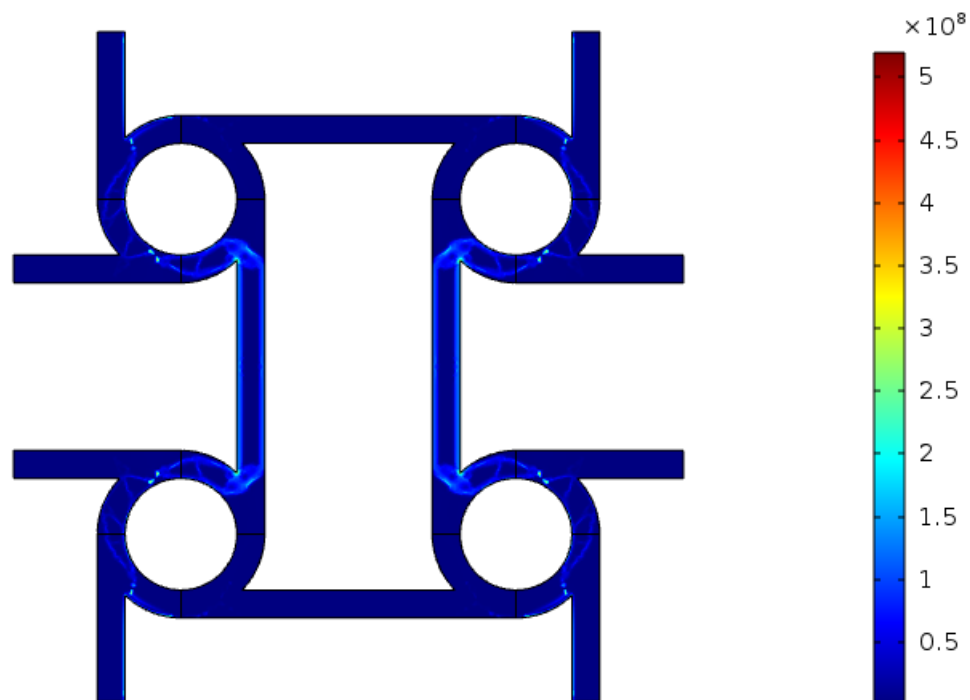


Rys. 6.2.2.1 Odształcenie struktur anty-tetra-chiralnych o $g = 0.0125$ m: A – przy $A_f = 40\%$, B – przy $A_f = 50\%$ [Strek2017a]

Tab.6.2.2.1 Wyniki optymalizacji efektywnego współczynnika Poissona dla różnego udziału „materiału twardego” A_f przy grubości $g = 0.0125$ m

Struktura	5	6	7	8
A_f	20%	30%	40%	50%
Współczynnik Poissona	-4.4994	-8,7017	-7.3032	-7.5293

Dla mniejszej grubości komórki anty-tetra-chiralnej otrzymano dla różnych A_f zbliżone wyniki z wyjątkiem najmniejszego udziału fazy „twardej” $\nu_{eff} = -4.4994$.

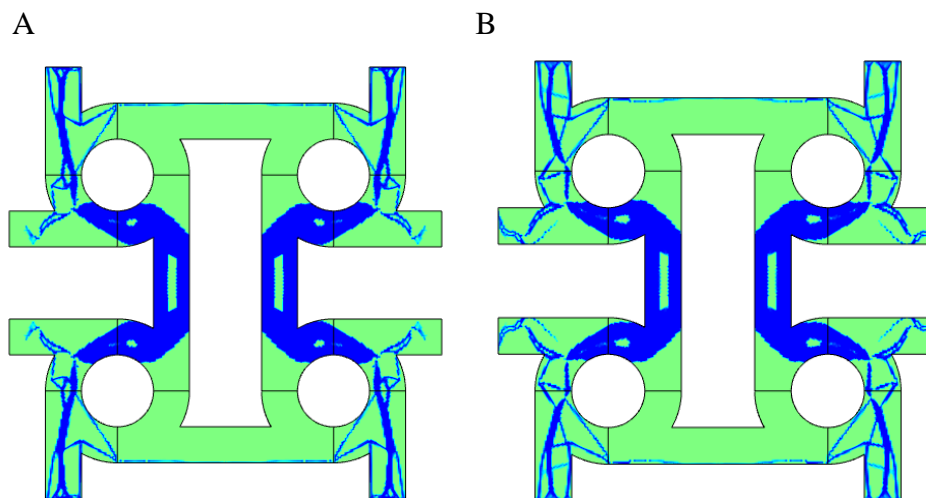


Rys. 6.2.2.3 Rysunek rozkładu naprężeń von Misesa σ [N/m²] zawartości $A_f = 20\%$, $g=0,125$ m, $\nu_{eff} = -4.4994$

Na Rys. 6.2.2.3 przedstawiono rozkład naprężeń dla optymalnego modelu o grubości $g = 0.0125$ m. Największe naprężenia są przenoszone przez elementy wypełnione fazą o większym module Younga, jednak koncentrują się głównie w części środkowej modelu. Wartości są podobne do naprężeń w modelu geometrycznie dwukrotnie grubszym.

6.2.3 Optymalizacja z równymi współczynnikami Poissona materiałów wypełniających

Sprawdzono różnicę w osiągniętych efektywnych współczynnikach Poissona dla struktury heksagonalnej re-entrant, gdy współczynniki Poissona materiałów wypełniających są takie same i wynoszą $\nu=0.33$.



Rys. 6.2.3.1 Uzyskane optymalne struktury z minimalnym współczynnikiem Poissona:
 A – dla $\nu_1 = 0.1$; $\nu_2 = 0.33$; $\nu_{eff} = -8.1785$; B – dla $\nu_1 = \nu_2 = 0.33$; $\nu_{eff} = -7.6917$

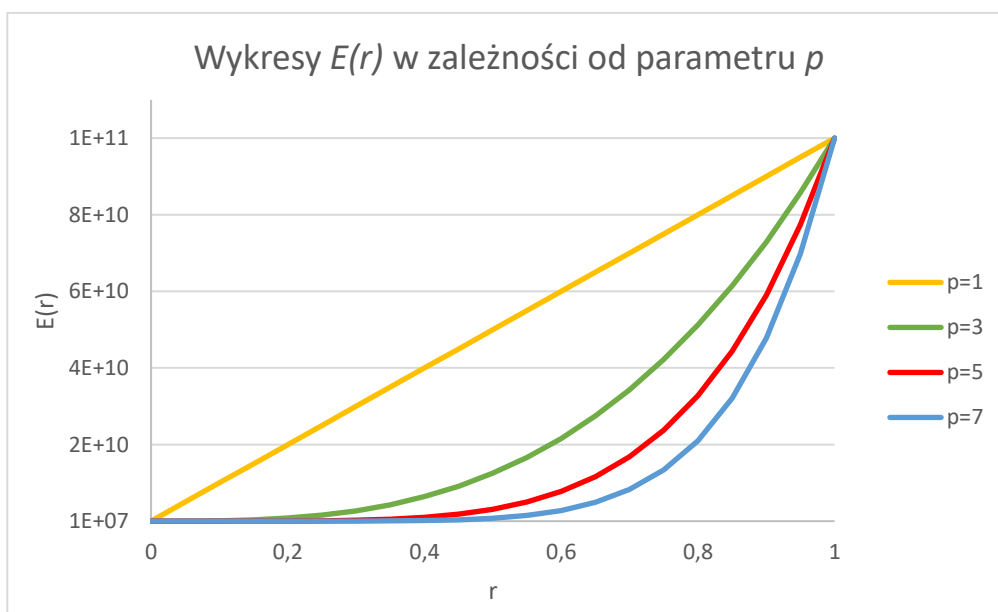
Dla struktury anty-tetra-chiralnej przy właściwościach materiałów obu faz: $E_1 = 10^9$ MPa, $E_2 = 2 \cdot 10^{11}$ MPa, zastosowaniu schematu interpolacji SIMP ($p=3$), 12904 elementach skończonych w modelu oraz udziału materiału 2 („twardego”) $A_f = 30\%$ uzyskano różny o 0.4868 efektywny współczynnik Poissona, przy równych ($\nu_{eff} = -7.6917$) i różnych ($\nu_{eff} = -8.1785$) współczynnikach Poissona materiałów wypełniających. Obie struktury różnią się w niewielkim stopniu.

7 Wpływ parametru penalizacji na wyniki optymalizacji topologicznej

7.1 Cel optymalizacji ze zmiennym współczynnikiem p

W metodzie SIMP używany jest parametr p nazywany współczynnikiem kary bądź współczynnikiem penalizacji, który służy do przyspieszenia podjęcia decyzji, czy element skończony jest utożsamiany z obecnością materiału lub brakiem obecności. Dzięki jego zastosowaniu bardziej pożądanym w obszarze obliczeniowym jest brak bądź obecność materiału (wartość 0 i wartość 1) niż stany przejściowe (wartości pomiędzy 0 a 1).

Często podaje się, że największą efektywność numeryczną uzyskuje się stosując parametr penalizacji równy 3, gdy w optymalizacji używana jest stal. W niniejszym rozdziale przedstawiono wyniki optymalizacji z funkcją celu minimalizacji współczynnika Poissona z użyciem schematu interpolacji SIMP, gdzie wartość współczynnika p wynosiła $p=2$, $p=3$, $p=4$, $p=5$. Przykładowy rozkład wartości zmiennej kontrolnej r w zależności od różnych wartości parametru penalizacji p przedstawiono na rys. 7.1.1.



Rys. 7.1.1 Rozkład zmiennej wartości zmiennej kontrolnej r dla różnych wartości parametru p , przy $E_1 = 10^7$ Pa, $E_2 = 10^{11}$ Pa

W literaturze [Bendsøe2003] podaje się, że minimalna wartość współczynnika kary jest zależna od współczynników Poissona ν używanych materiałów i jest określana wg wzoru (7.1.1):

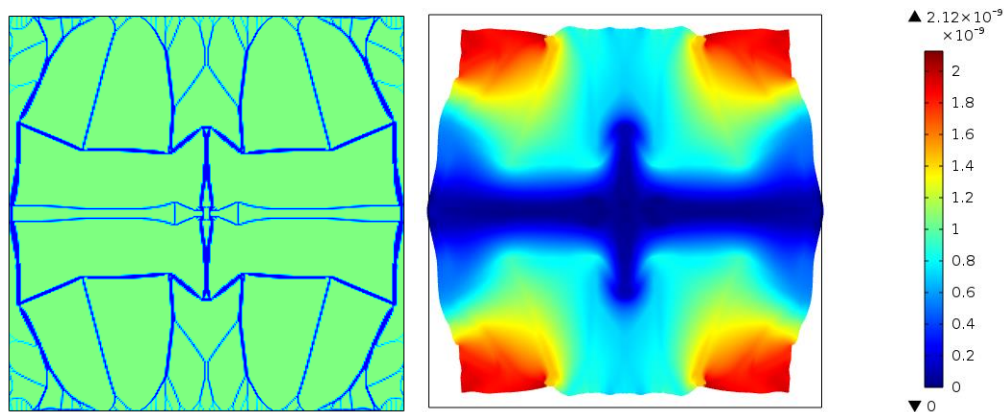
$$p_{min} = \max \left\{ \frac{2}{1-\nu}, \frac{4}{1+\nu} \right\} \quad (7.1.1)$$

Obliczenia wykonano dla różnych kształtów domen obliczeniowych: kwadratu, konwencjonalnego plastra miodu oraz kształtu anty-tetra-chiralnego. Efektywne współczynniki Poissona porównano i przedstawiono na wykresie.

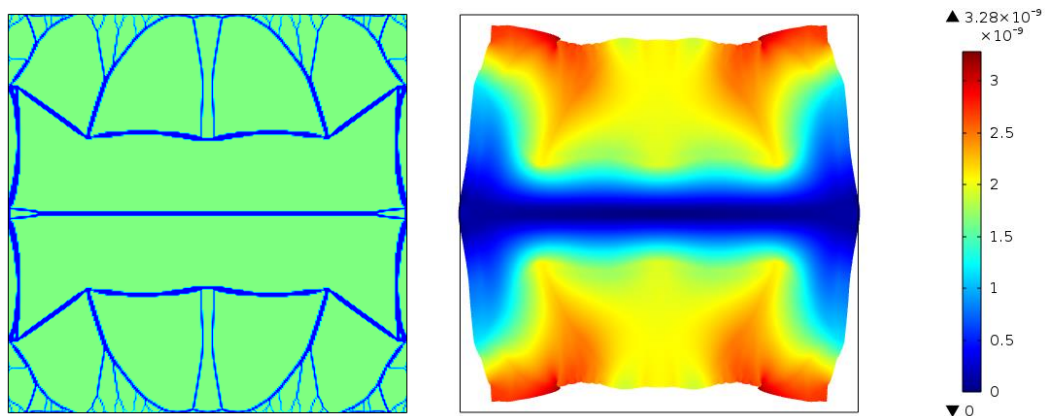
7.2 Wyniki optymalizacji topologicznej (minimalizacja efektywnego współczynnika Poissona) dla różnych wartości parametru kary p dla różnych domen obliczeniowych

7.2.1 Wyniki minimalizacji przy różnym p dla kwadratu o boku 0.1 m

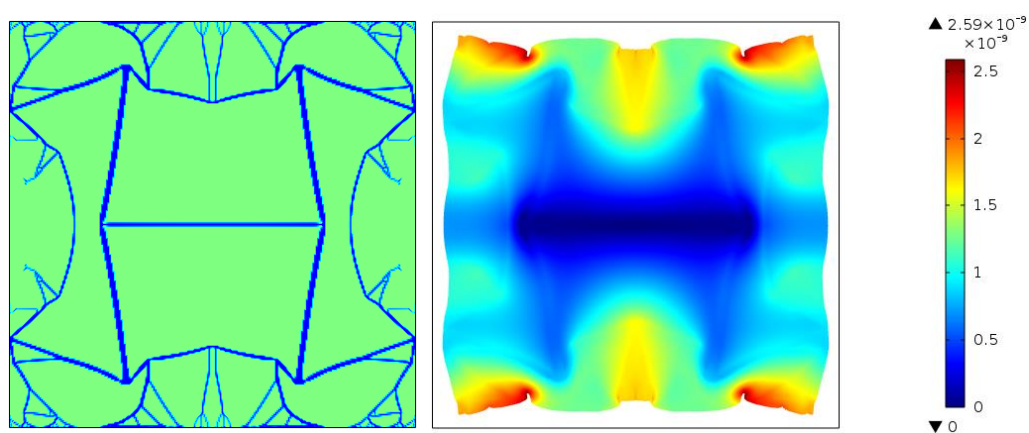
Na Rys. 7.2.1.1 – 7.2.1.12 przedstawiono struktury wynikowe wraz z ich zachowaniem podczas ściskania osiowego (siła ściskająca w kierunku pionowym, przyłożona dwustronnie, od dołu i od góry) dla domeny w kształcie kwadratu o boku 0.1 m. Warunki brzegowe są takie same, jak w poprzednich badaniach. Zmienna jest wartość procentowej zawartości „materiału twardego” w całej strukturze, tj. $A_f = 10\%$, 20% oraz 30%. Moduł Younga materiałów wynoszą 10^{10} MPa oraz 10^7 MPa. Jak we wcześniejszych rozdziałach materiał o większym współczynniku Poissona jest ilustrowany na rysunkach kolorem niebieskim, a materiał o mniejszym kolorem zielonym. Ilość elementów skończonych, na które został podzielony model to 15625.



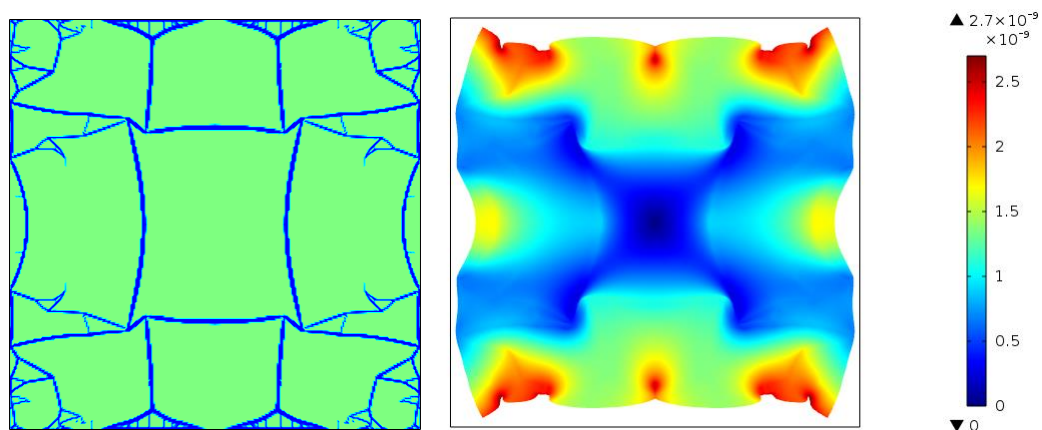
Rys.7.2.1.1 Wyniki optymalizacji dla warunków początkowych: $A_f = 10\%$, $E_1 = 10^7$ MPa, $E_2 = 2 \cdot 10^{11}$ MPa, $\nu_1 = 0.1$, $\nu_2 = 0.33$, $p=2$, efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -1.0006$



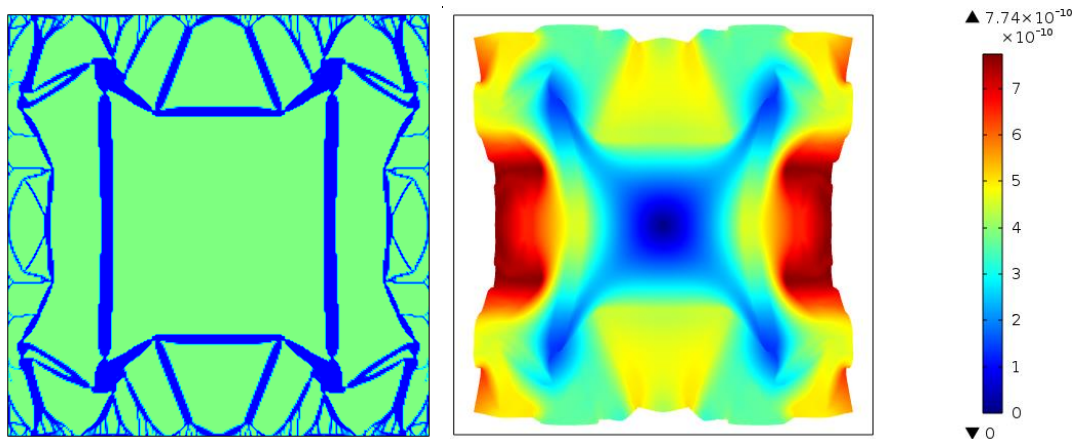
Rys. 7.2.1.2 Wyniki optymalizacji dla warunków początkowych: $A_f = 10\%$, $E_1 = 10^7$ MPa, $E_2 = 10^{10}$ MPa, $\nu_1 = 0.1$, $\nu_2 = 0.33$, $p=3$, efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -0.57548$



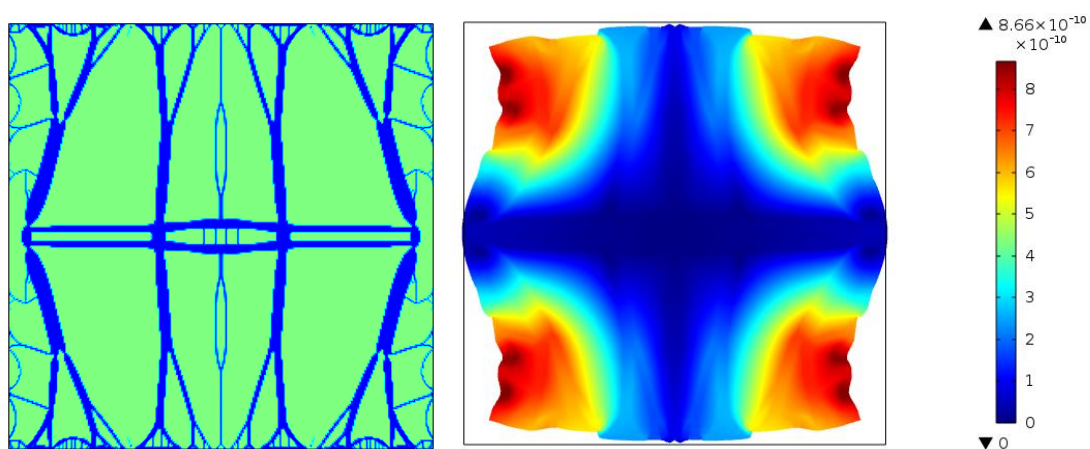
Rys. 7.2.1.3 Wyniki optymalizacji dla warunków początkowych: $A_f = 10\%$, $E_1 = 10^7$ MPa, $E_2 = 10^{10}$ MPa, $\nu_1 = 0.1$, $\nu_2 = 0.33$, $p=4$, efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -0.70949$



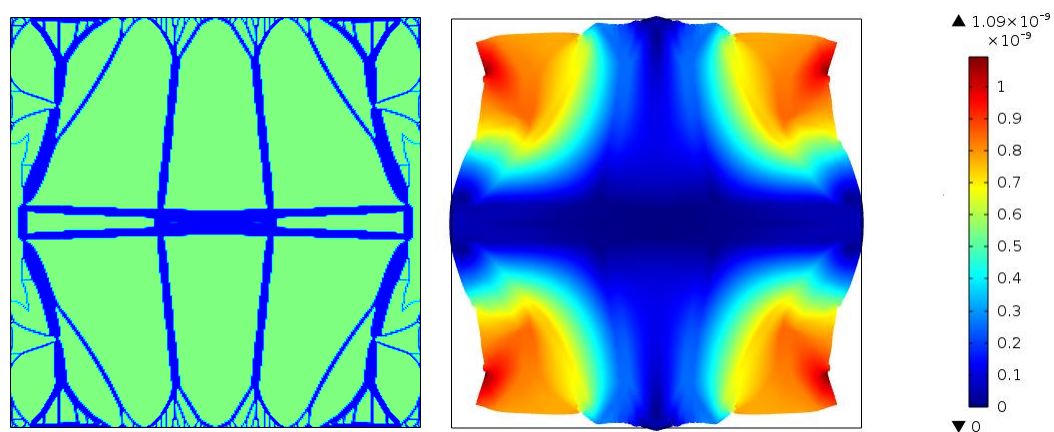
Rys. 7.2.1.4 Wyniki optymalizacji dla warunków początkowych: $A_f = 10\%$, $E_1 = 10^7$ MPa, $E_2 = 10^{10}$ MPa, $\nu_1 = 0.1$, $\nu_2 = 0.33$, $p=5$, efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -0.59322$



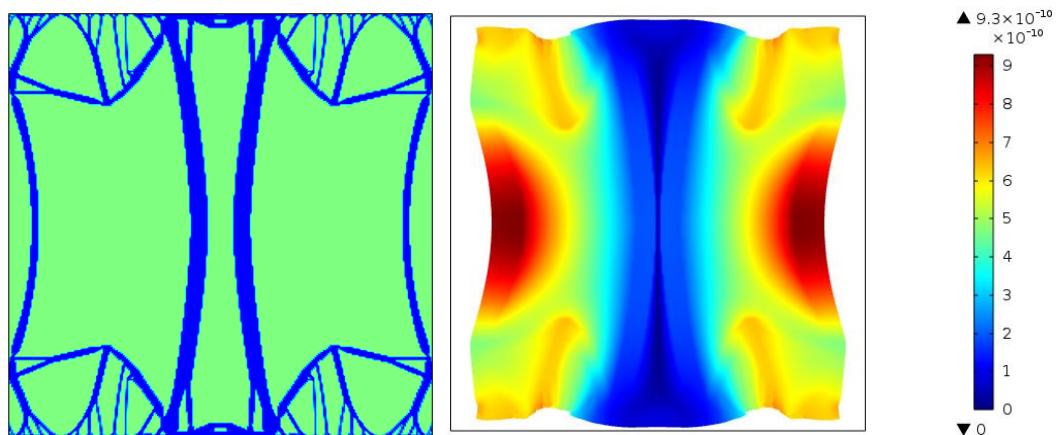
Rys. 7.2.1.5 Wyniki optymalizacji dla warunków początkowych: $A_f = 20\%$, $E_I = 10^7$ MPa, $E_2 = 10^{10}$ MPa, $\nu_I = 0.1$, $\nu_2 = 0.33$, $p=2$, efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -1.8102$



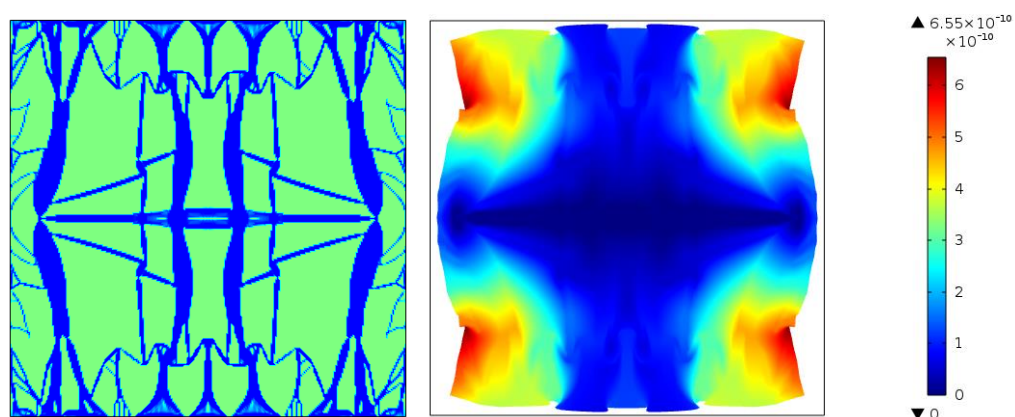
Rys. 7.2.1.6 Wyniki optymalizacji dla warunków początkowych: $A_f = 20\%$, $E_I = 10^7$ MPa, $E_2 = 10^{10}$ MPa, $\nu_I = 0.1$, $\nu_2 = 0.33$, $p=3$, efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -2.1036$



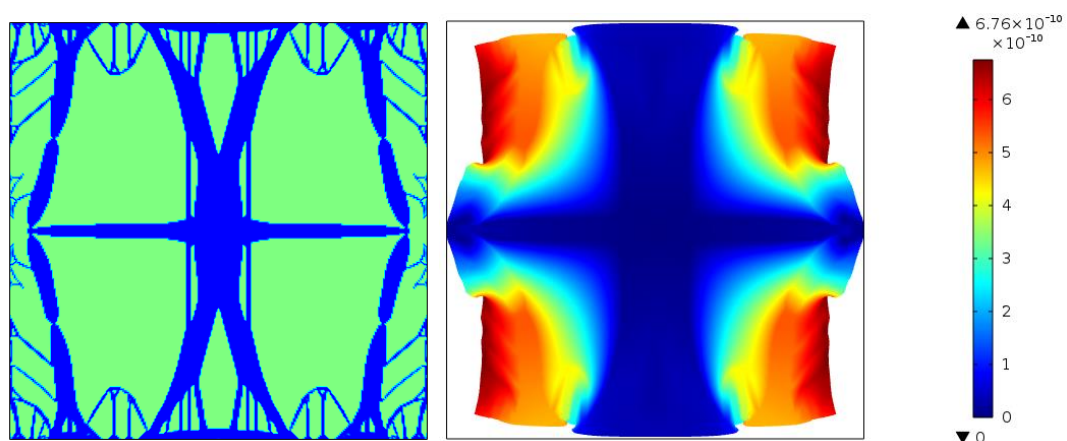
Rys.7.2.1.7 Wyniki optymalizacji dla warunków początkowych: $A_f = 20\%$, $E_I = 10^7$ MPa, $E_2 = 10^{10}$ MPa, $\nu_I = 0.1$, $\nu_2 = 0.33$, $p=4$, efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -1.8224$



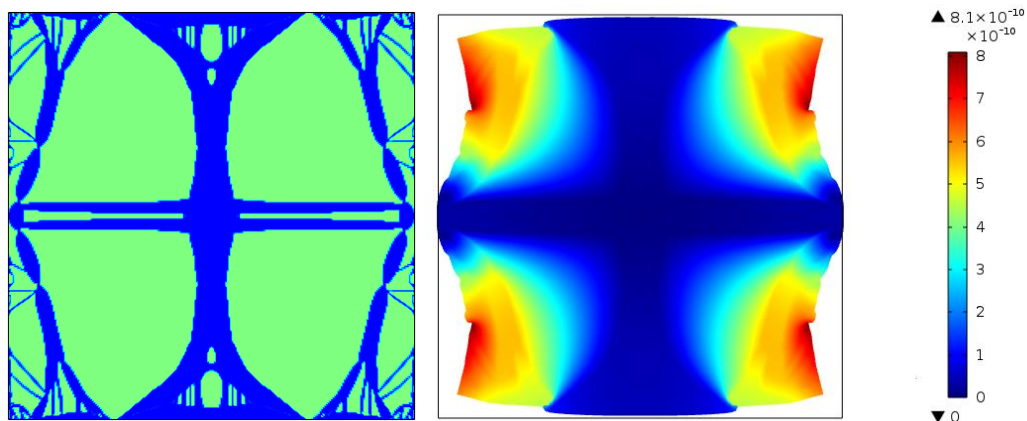
Rys. 7.2.1.8 Wyniki optymalizacji dla warunków początkowych: $A_f = 20\%$, $E_I = 10^7$ MPa, $E_2 = 10^{10}$ MPa, $\nu_I = 0.1$, $\nu_2 = 0.33$, $p=5$, efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -2.3292$



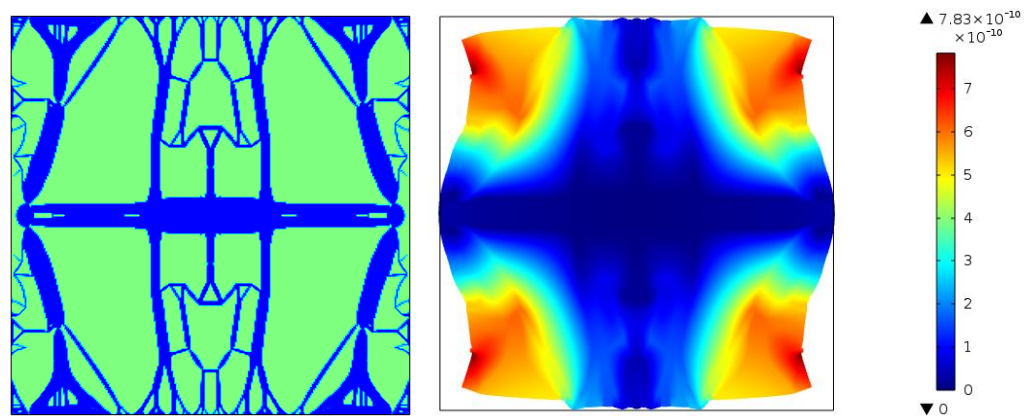
Rys. 7.2.1.9 Wyniki optymalizacji dla warunków początkowych: $A_f = 30\%$, $E_I = 10^7$ MPa, $E_2 = 10^{10}$ MPa, $\nu_I = 0.1$, $\nu_2 = 0.33$, $p=2$, efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -2.2750$



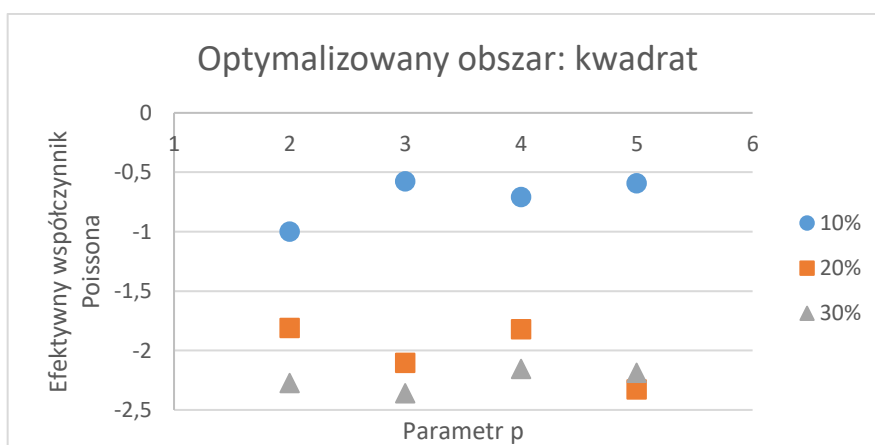
Rys. 7.2.1.10 Wyniki optymalizacji dla warunków początkowych: $A_f = 30\%$, $E_I = 10^7$ MPa, $E_2 = 10^{10}$ MPa, $\nu_I = 0.1$, $\nu_2 = 0.33$, $p=3$, efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -2.3611$



Rys. 7.2.1.11 Wyniki optymalizacji dla warunków początkowych: $A_f = 30\%$, $E_I = 10^7$ MPa, $E_2 = 10^{10}$ MPa, $\nu_1 = 0.1$, $\nu_2 = 0.33$, $p=4$, efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -2.1557$



Rys. 7.2.1.12 Wyniki optymalizacji dla warunków początkowych: $A_f = 30\%$, $E_I = 10^7$ MPa, $E_2 = 10^{10}$ MPa, $\nu_1 = 0.1$, $\nu_2 = 0.33$, $p=5$, efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -2.1874$



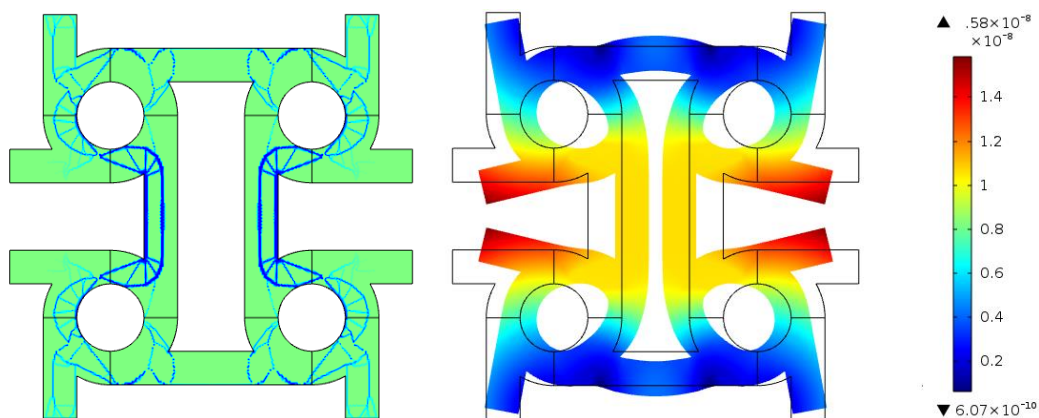
Rys. 7.2.1.13 Zestawienie uzyskanych wyników współczynnika Poissona dla zmiennego parametru p przy różnym udziale materiału o większym współczynniku Poissona

Na podstawie wykresu z Rys. 7.2.1.13 oraz danych z optymalizacji, których wyniki przedstawiono na Rys. 7.2.1.1 – 7.2.1.12 można zauważyć, iż najmniejszą wartość

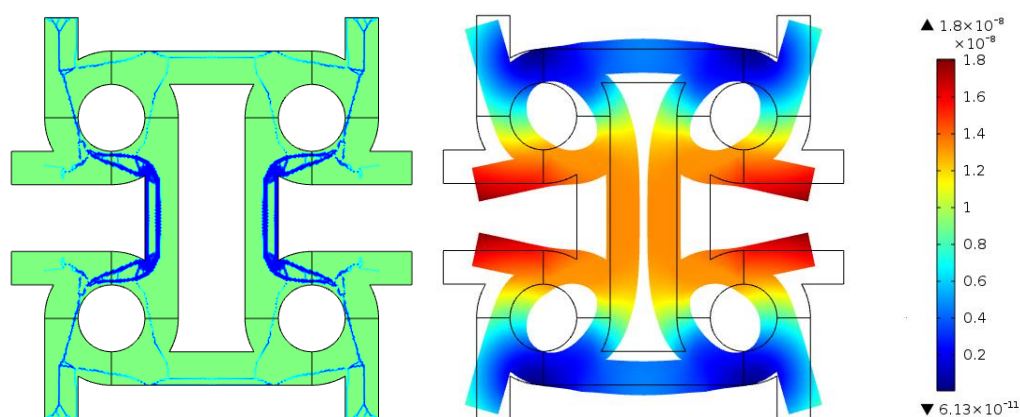
efektywnego współczynnika znaleziono dla $A_f = 30\%$ oraz parametru penalizacji metody SIMP równym 3. Potwierdzono również, iż najmniej optymalne wyniki otrzymano dla zawartości 10% fazy „twardej”.

7.2.2 Wyniki minimalizacji przy różnym p dla struktury anty-tetra-chiralnej

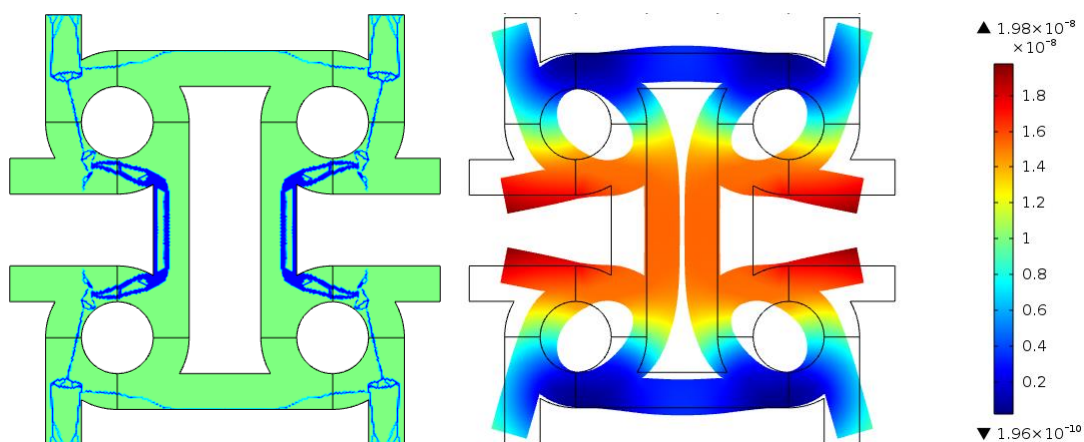
Dla struktury anty-tetra-chiralnej zbadano, jak wyniki minimalizowanego współczynnika Poissona różnią się w zależności od parametru kary p w schemacie interpolacji metodą SIMP. Parametr penalizacji przyjmuje wartość 2,3,4 oraz 5. Struktura jest ściskana, warunki brzegowe są takie same, jak w modelu w rozdziale 6-tym. Na rysunkach Rys. 7.2.2.1 – 7.2.2.12 przedstawiono struktury wynikowe oraz odkształcenie struktury.



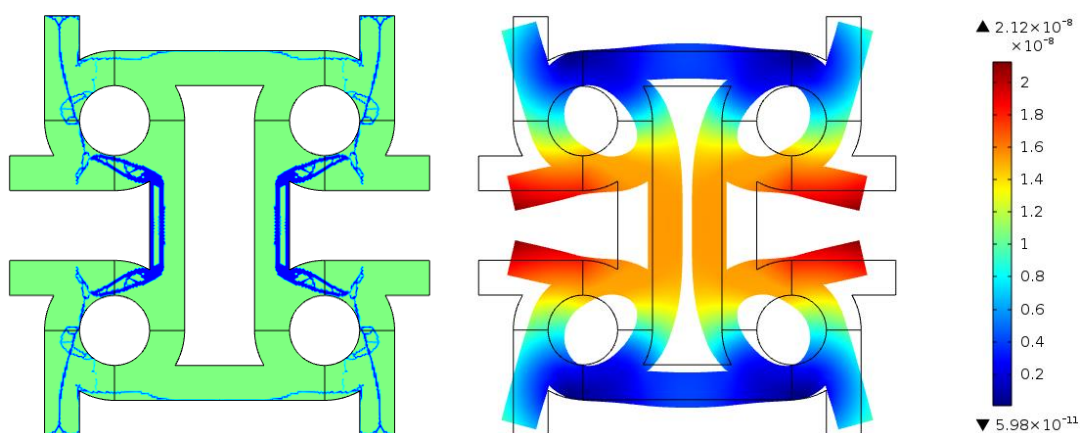
Rys. 7.2.2.1 Wyniki optymalizacji dla warunków początkowych: $A_f = 10\%$, $E_I = 10^7$ MPa, $E_2 = 2 \cdot 10^{11}$ MPa, $\nu_I = 0.1$; $\nu_2 = 0.33$, $p=2$, efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -3.4877$



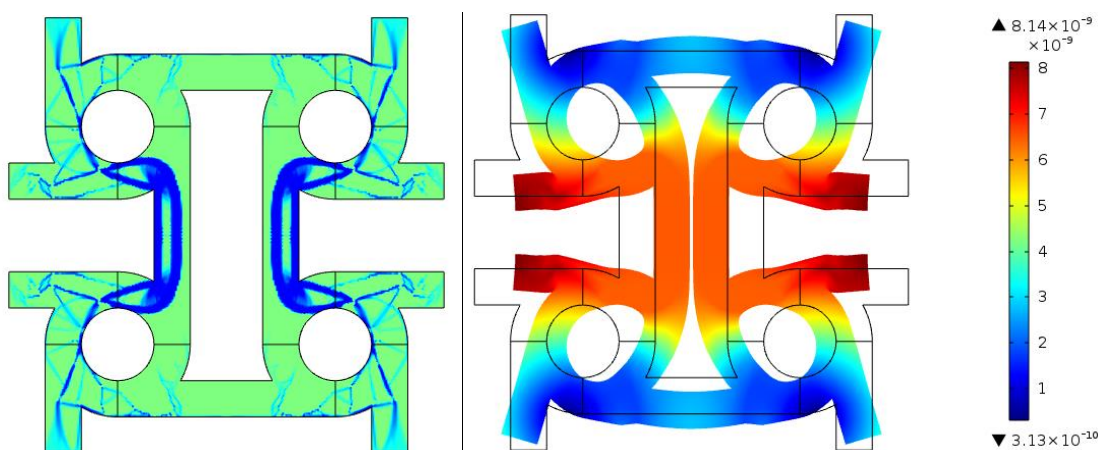
Rys. 7.2.2.2 Wyniki optymalizacji dla warunków początkowych: $A_f = 10\%$, $E_I = 10^7$ MPa, $E_2 = 2 \cdot 10^{11}$ MPa, $\nu_I = 0.1$, $\nu_2 = 0.33$, $p=3$, efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -3.6103$



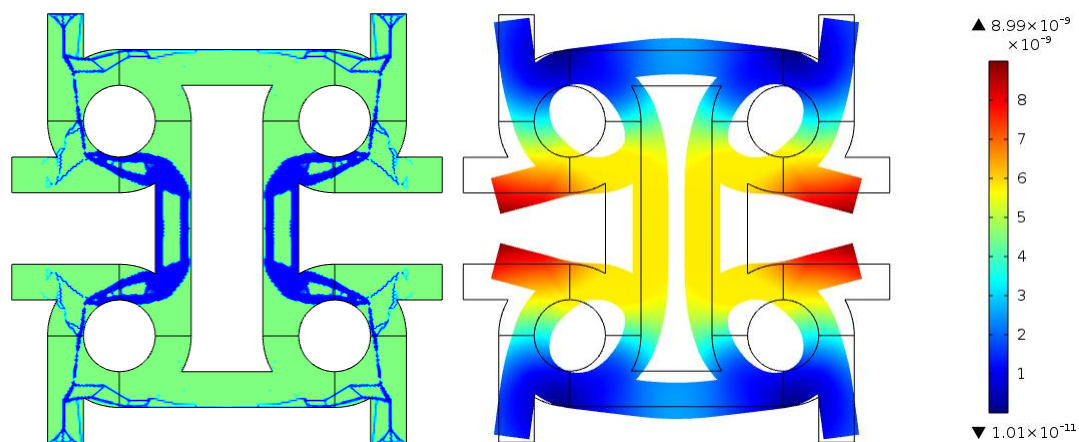
Rys. 7.2.2.3 Wyniki optymalizacji dla warunków początkowych: $A_f = 10\%$, $E_I = 10^7$ MPa, $E_2 = 2 \cdot 10^{11}$ MPa, $\nu_1 = 0.1$, $\nu_2 = 0.33$, $p=4$, efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -3.5886$



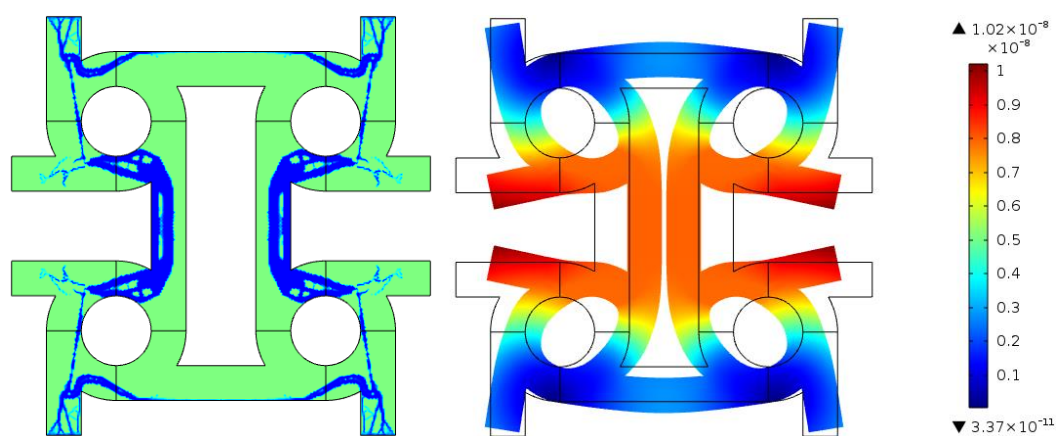
Rys. 7.2.2.4 Wyniki optymalizacji dla warunków początkowych: $A_f = 10\%$, $E_I = 10^7$ MPa, $E_2 = 2 \cdot 10^{11}$ MPa, $\nu_1 = 0.1$, $\nu_2 = 0.33$, $p=5$, efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -3.3878$



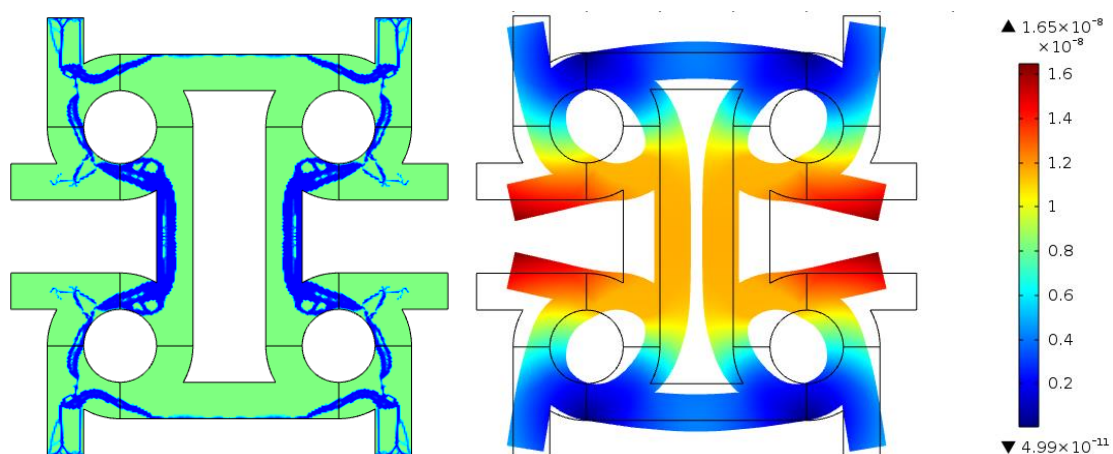
Rys. 7.2.2.5 Wyniki optymalizacji dla warunków początkowych: $A_f = 20\%$, $E_I = 10^7$ MPa, $E_2 = 2 \cdot 10^{11}$ MPa, $\nu_1 = 0.1$, $\nu_2 = 0.33$, $p=2$, efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -3.6792$



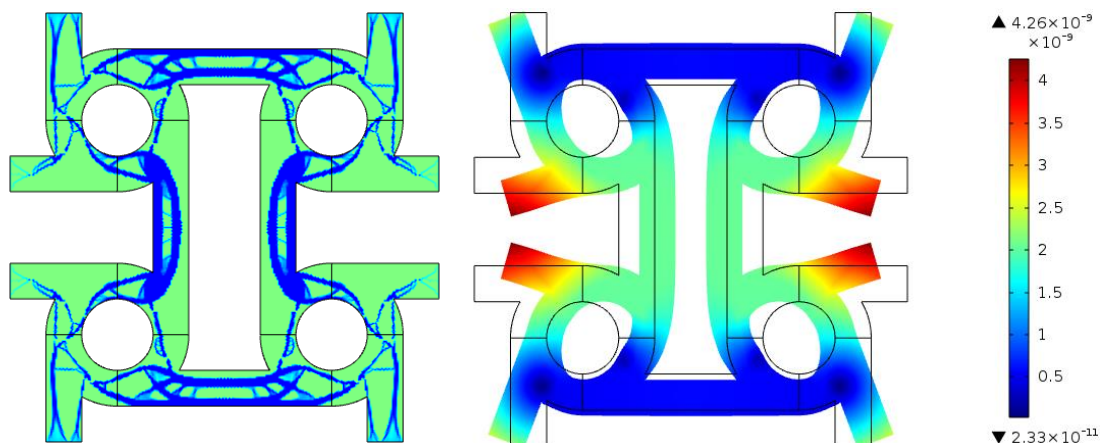
Rys. 7.2.2.6 Wyniki optymalizacji dla warunków początkowych: $A_f = 20\%$, $E_I = 10^7$ MPa, $E_2 = 2 \cdot 10^{11}$ MPa, $\nu_1 = 0.1$, $\nu_2 = 0.33$, $p=3$, efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -6.0906$



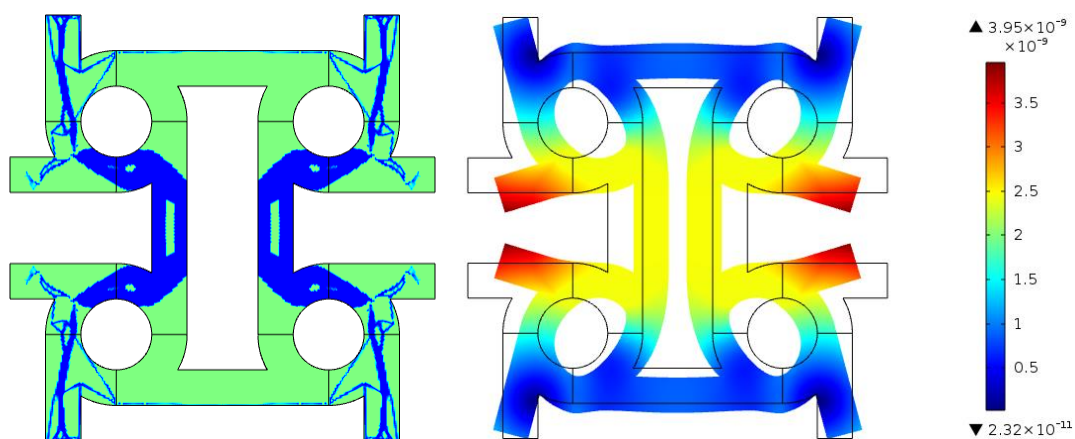
Rys. 7.2.2.7 Wyniki optymalizacji dla warunków początkowych: $A_f = 20\%$, $E_I = 10^7$ MPa, $E_2 = 2 \cdot 10^{11}$ MPa, $\nu_1 = 0.1$, $\nu_2 = 0.33$, $p=4$, efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -5.1445$



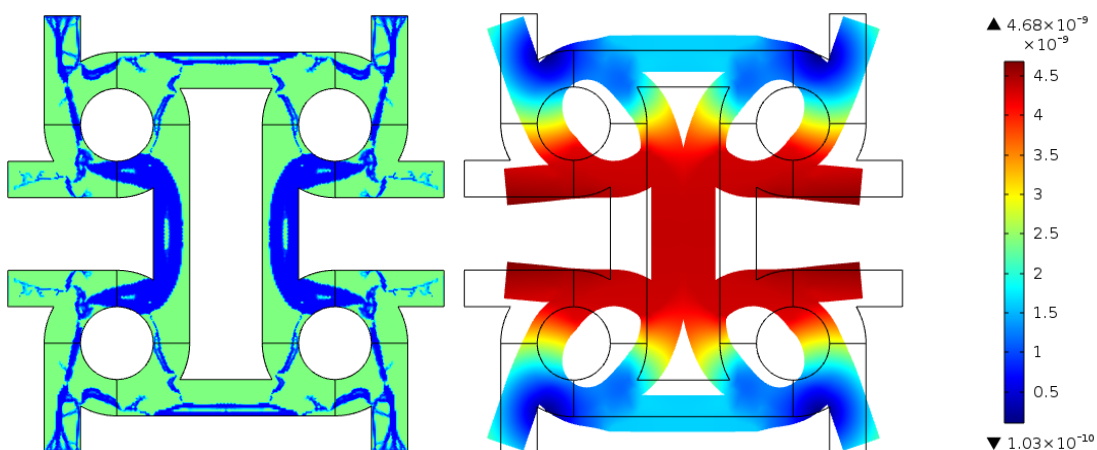
Rys. 7.2.2.8 Wyniki optymalizacji dla warunków początkowych: $A_f = 20\%$, $E_I = 10^7$ MPa, $E_2 = 2 \cdot 10^{11}$ MPa, $\nu_1 = 0.1$, $\nu_2 = 0.33$, $p=5$, efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -3.9978$



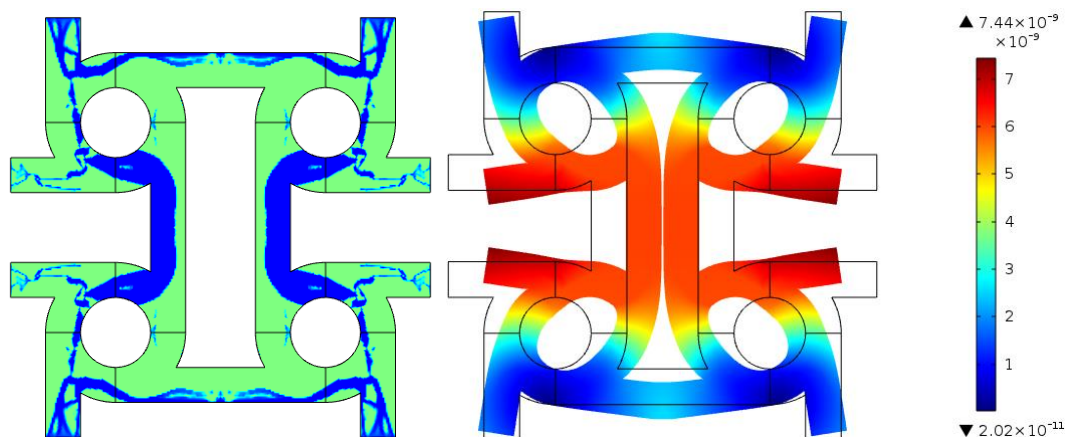
Rys.7.2.2.9 Wyniki optymalizacji dla warunków początkowych: $A_f = 30\%$, $E_1 = 10^7$ MPa, $E_2 = 2 \cdot 10^{11}$ MPa, $\nu_1 = 0.1$, $\nu_2 = 0.33$, $p=2$, efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -6.2268$



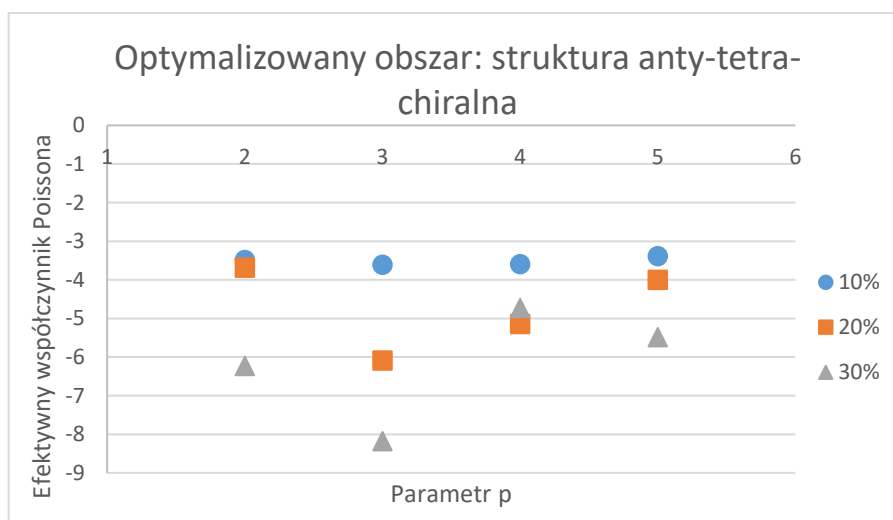
Rys. 7.2.2.10 Wyniki optymalizacji dla warunków początkowych: $A_f = 30\%$, $E_1 = 10^7$ MPa, $E_2 = 2 \cdot 10^{11}$ MPa, $\nu_1 = 0.1$, $\nu_2 = 0.33$, $p=3$, efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -8.1785$



Rys.7.2.2.11 Wyniki optymalizacji dla warunków początkowych: $A_f = 30\%$, $E_1 = 10^7$ MPa, $E_2 = 2 \cdot 10^{11}$ MPa, $\nu_1 = 0.1$, $\nu_2 = 0.33$, $p=4$, efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -4.7267$



Rys. 7.2.2.12 Wyniki optymalizacji dla warunków początkowych: $A_f = 30\%$, $E_1 = 10^7$ MPa, $E_2 = 2 \cdot 10^{11}$ MPa, $\nu_1 = 0.1$, $\nu_2 = 0.33$, $p=5$, efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -5.4857$



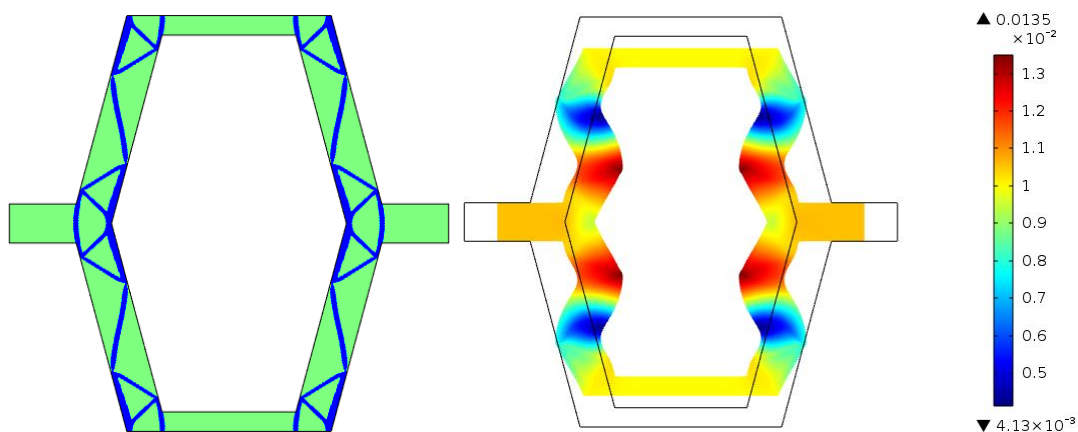
Rys. 7.2.2.13 Zestawienie uzyskanych wyników współczynnika Poissona dla zmiennego parametru p przy różnym udziale materiału o większym współczynniku Poissona

Dla struktury anty-tetra-chiralnej najmniejszą wartość efektywnego współczynnika Poissona uzyskano, podobnie jak dla kształtu kwadratu, dla $A_f=30\%$ oraz parametru penalizacji równym $p=3$.

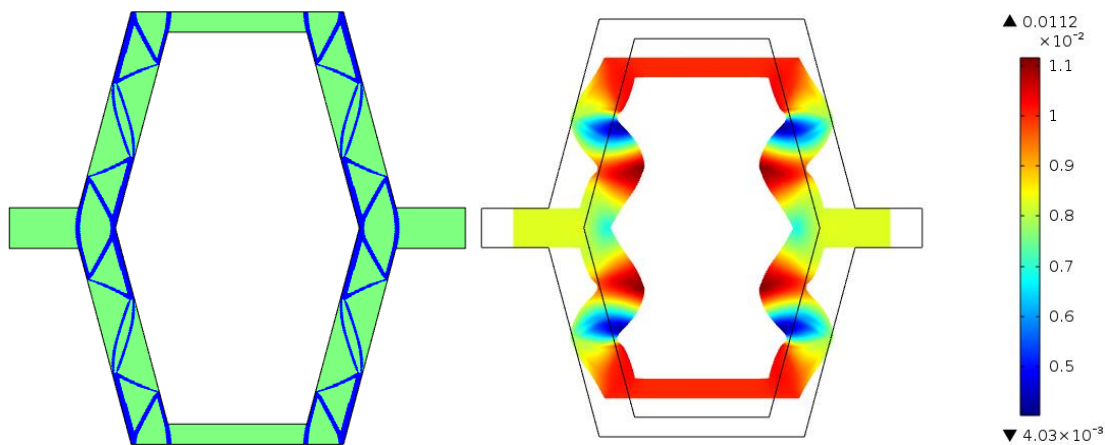
7.2.3 Wyniki minimalizacji przy różnym p dla komórki heksagonalnego konwencjonalnego plastra miodu

Dla struktury heksagonalnego konwencjonalnego plastra miodu zbadano wpływ parametru kary na wynik minimalnego zoptymalizowanego współczynnika Poissona. Obliczenia wykonano dla komórki o grubości $t = 0.2$ m. Struktura jest ściskana, warunki

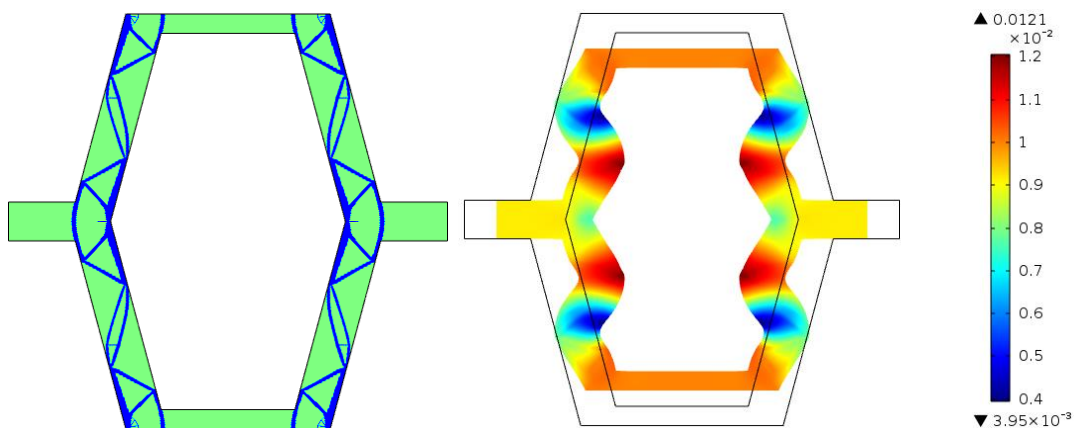
brzegowe są dokładnie takie, jak w opisano w rozdziale 5.1. Na Rys. 7.2.3.1 do 7.2.3.8 pokazano struktury wynikowe, gdzie efektywny współczynnik Poissona liczono za pomocą interpolacji SIMP z różnymi wartościami p . Zawartość materiału twardego wynosiła $A_f = 20\%$ oraz $A_f = 40\%$. Na Rys. 7.2.3.9 został przedstawiony wykres z wartościami uzyskanymi w optymalizacji dla różnych zawartości materiału o większym module Younga.



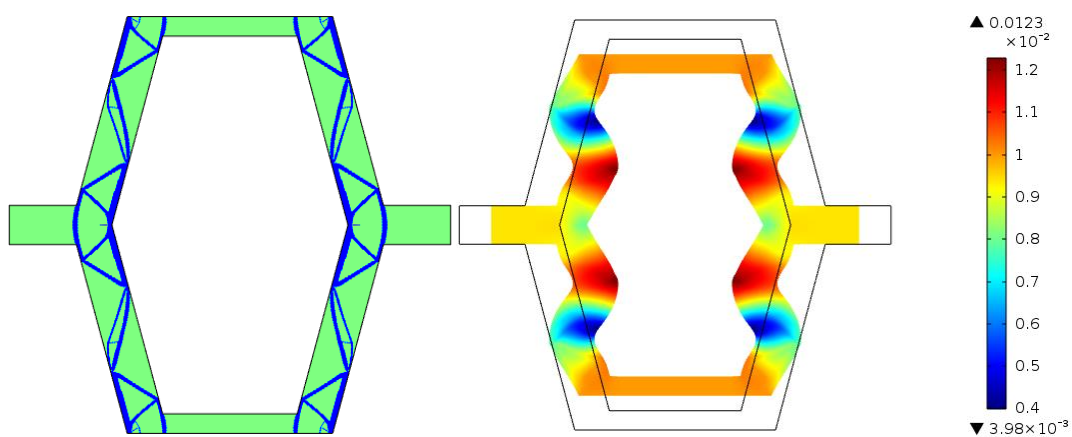
Rys.7.2.3.1 Wyniki optymalizacji dla warunków początkowych: $A_f = 20\%$, $E_1 = 10^9$ MPa, $E_2 = 10^{11}$ MPa, $\nu_1 = 0.1$, $\nu_2 = 0.33$, $p=2$, efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -1,0012$



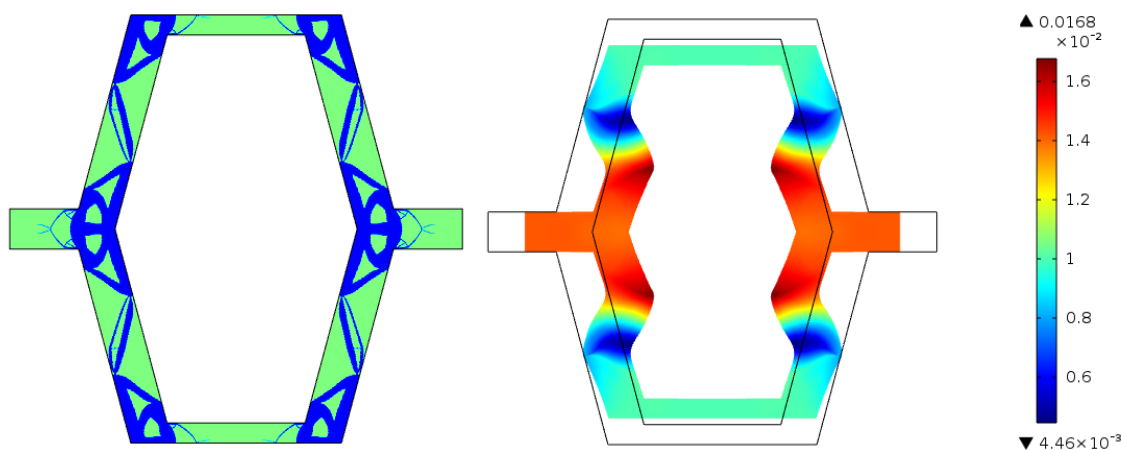
Rys. 7.2.3.2 Wyniki optymalizacji dla warunków początkowych: $A_f = 20\%$, $E_1 = 10^9$ MPa, $E_2 = 10^{11}$ MPa, $\nu_1 = 0.1$, $\nu_2 = 0.33$, $p=3$, efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -0.78299$



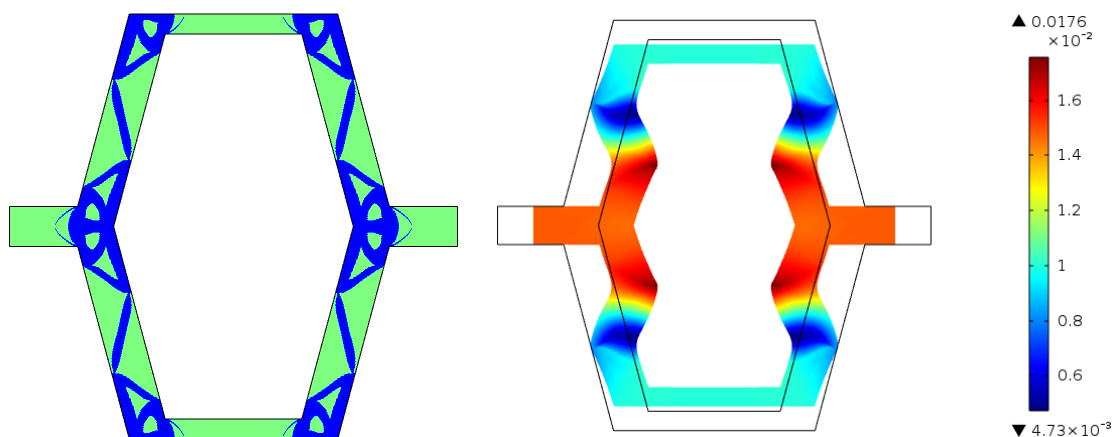
Rys. 7.2.3.3 Wyniki optymalizacji dla warunków początkowych: $A_f = 20\%$, $E_I = 10^9$ MPa, $E_2 = 10^{11}$ MPa, $\nu_I = 0.1$, $\nu_2 = 0.33$, $p=4$, efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -0.86734$



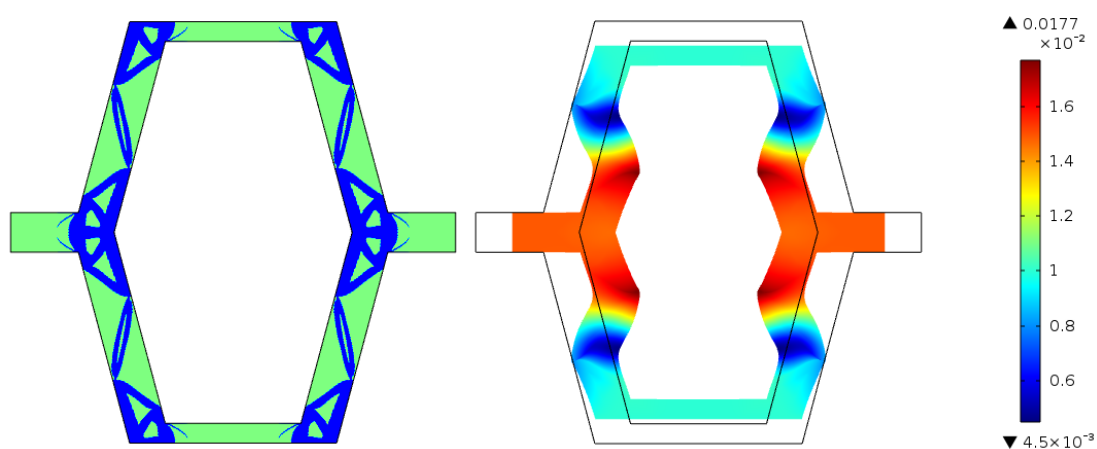
Rys. 7.2.3.4 Wyniki optymalizacji dla warunków początkowych: $A_f = 20\%$, $E_I = 10^9$ MPa, $E_2 = 10^{11}$ MPa, $\nu_I = 0.1$, $\nu_2 = 0.33$, $p=5$, efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -0.88922$



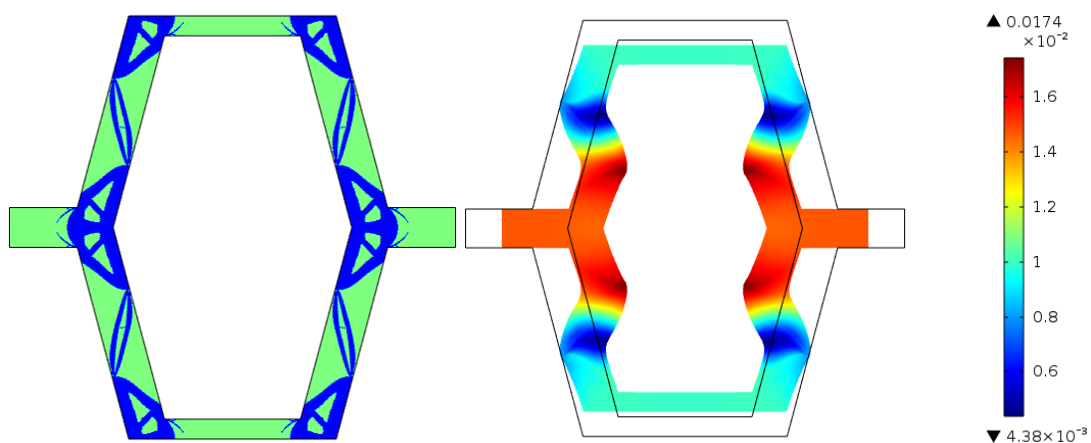
Rys. 7.2.3.5 Wyniki optymalizacji dla warunków początkowych: $A_f = 40\%$, $E_I = 10^9$ MPa, $E_2 = 10^{11}$ MPa, $\nu_I = 0.1$, $\nu_2 = 0.33$, $p=2$, efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -1.3455$



Rys. 7.2.3.6 Wyniki optymalizacji dla warunków początkowych: $A_f = 30\%$, $E_I = 10^9$ MPa, $E_2 = 10^{11}$ MPa, $\nu_I = 0.1$, $\nu_2 = 0.33$, $p=3$, efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -1.469$



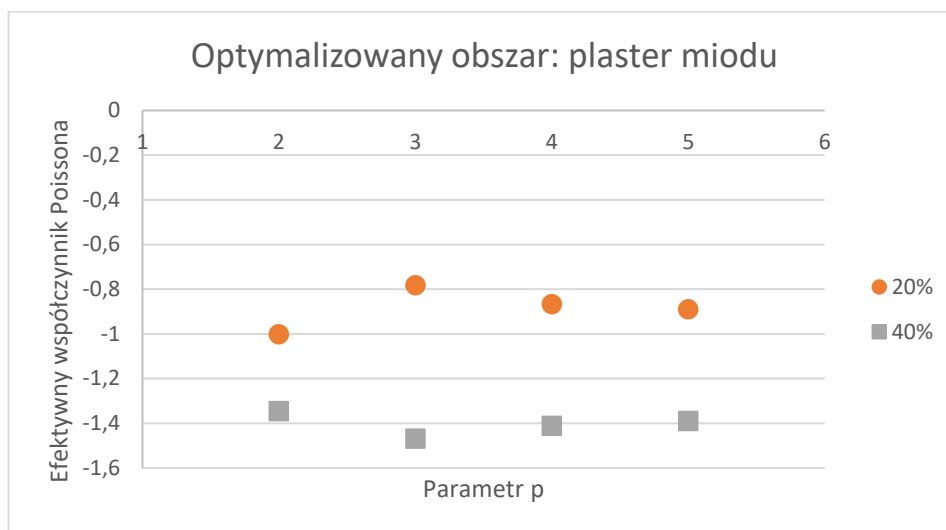
Rys. 7.2.3.7 Wyniki optymalizacji dla warunków początkowych: $A_f = 30\%$, $E_I = 10^9$ MPa, $E_2 = 10^{11}$ MPa, $\nu_I = 0.1$, $\nu_2 = 0.33$, $p=4$, efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -1.4118$



Rys. 7.2.3.8 Wyniki optymalizacji dla warunków początkowych: $A_f = 30\%$, $E_I = 10^9$ MPa, $E_2 = 10^{11}$ MPa, $\nu_I = 0.1$, $\nu_2 = 0.33$, $p=5$, efektywny współczynnik Poissona $\nu_{eff} = -1.3954$

Najmniejszy efektywny współczynnik Poissona w wyniku optymalizacji uzyskano przy $A_f = 40\%$ oraz parametrze penalizacji $p = 3$. Dla wszystkich struktur

najbardziej optymalne wyniki otrzymano dla największej zawartości materiału o większym module Younga oraz przy parametrze kary równym 3.

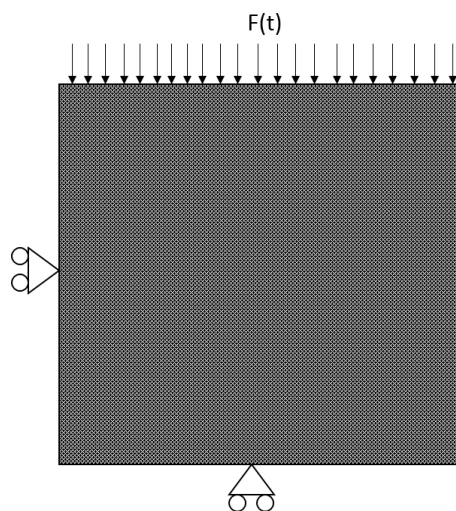


Rys. 7.2.3.9 Zestawienie uzyskanych wyników współczynnika Poissona dla zmiennego parametru p przy różnym udziale materiału o większym współczynniku Poissona

8 Badania dynamiczne zoptymalizowanych struktur

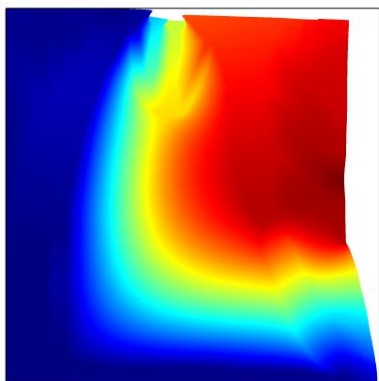
8.1 Wyniki badań częstości własnych dla kwadratu

Dla struktury o kształcie kwadratu, z już zminimalizowanym efektywnym współczynnikiem Poissona (Rys. 7.2.1.10) zbadano właściwości dynamiczne, sprawdzając wartości częstości własnych struktury, pod wpływem wymuszenia harmonicznego. Warunki brzegowe są takie same, jak podczas badań w poprzednich rozdziałach. Natomiast na górną krawędź działa siła harmoniczna (Rys. 8.1.1) Na Rys. 8.1.2 A-G przedstawiono odkształcenia zoptymalizowanego kształtu, dla każdej z ośmiu pierwszych częstotliwości własnych struktury dwufazowej. W tabeli 8.1.1 przedstawiono zestawienie wyników częstości własnych, z porównaniem, jak wyglądają częstości własne dla struktur o takim samym kształcie, ale jednofazowej.

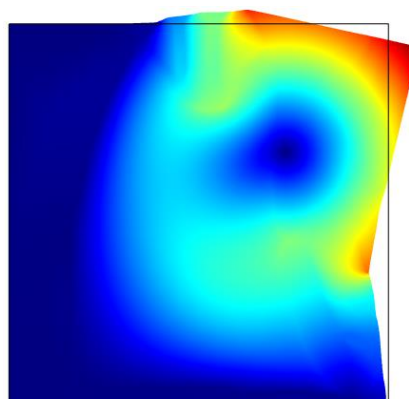


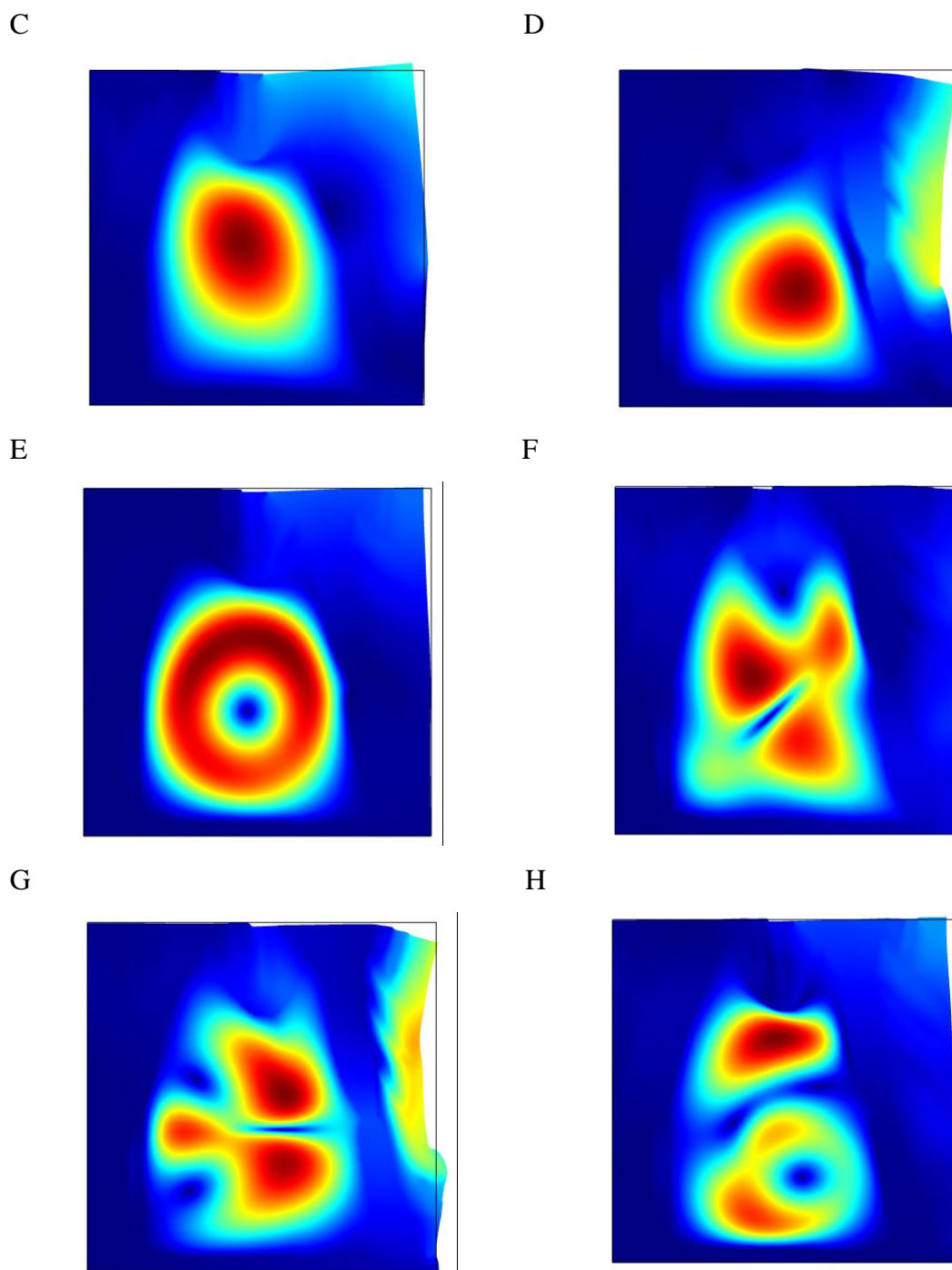
Rys. 8.1.1 Warunki brzegowe badanej struktury, do krawędzi górnej przyłożona siła $F(t)$

A



B





Rys. 8.1.2 Postaci drgań własnych $\frac{1}{4}$ zoptymalizowanej struktury dwufazowej o minimalnym efektywnym współczynniku Poissona, wartość częstości własnej: A – 165.71 Hz, B – 231.77 Hz, C – 313.89 Hz, D – 362.97 Hz, E – 389.51 Hz, F – 468.44 Hz, G – 494.62 Hz, H – 512.64 Hz

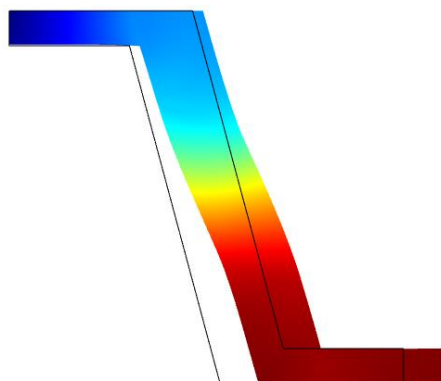
Tab. 8.1.1 Wartości częstości własnych dla struktur: A – jednofazowej (zbudowanej z materiału 1 ($E_1 = 10^7$ Pa, $\nu_1=0.1$, $\rho_1=4000$ kg/m³), B – jednofazowej (zbudowanej z materiału 2 ($E_2 = 10^{10}$ Pa, $\nu_2=0.33$, $\rho_2=7000$ kg/m³) i C - optymalnej pod względem minimalnego efektywnego współczynnika Poissona,

Nr	1	2	3	4	5	6	7	8
Rodzaj	[Hz]							
A	376.89	395.15	412.49	698.3	830.66	1040.7	1130.7	1191.4
B	8193.4	9412.9	11065	15822	18937	23373	24580	29277
C	165.71	231.77	313.89	362.97	389.51	468.44	494.62	512.64

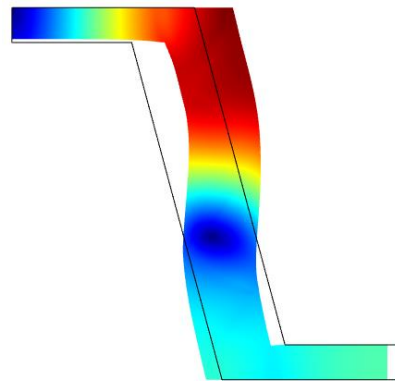
8.2 Wyniki badań częstości własnych dla heksagonalnego plastra miodu

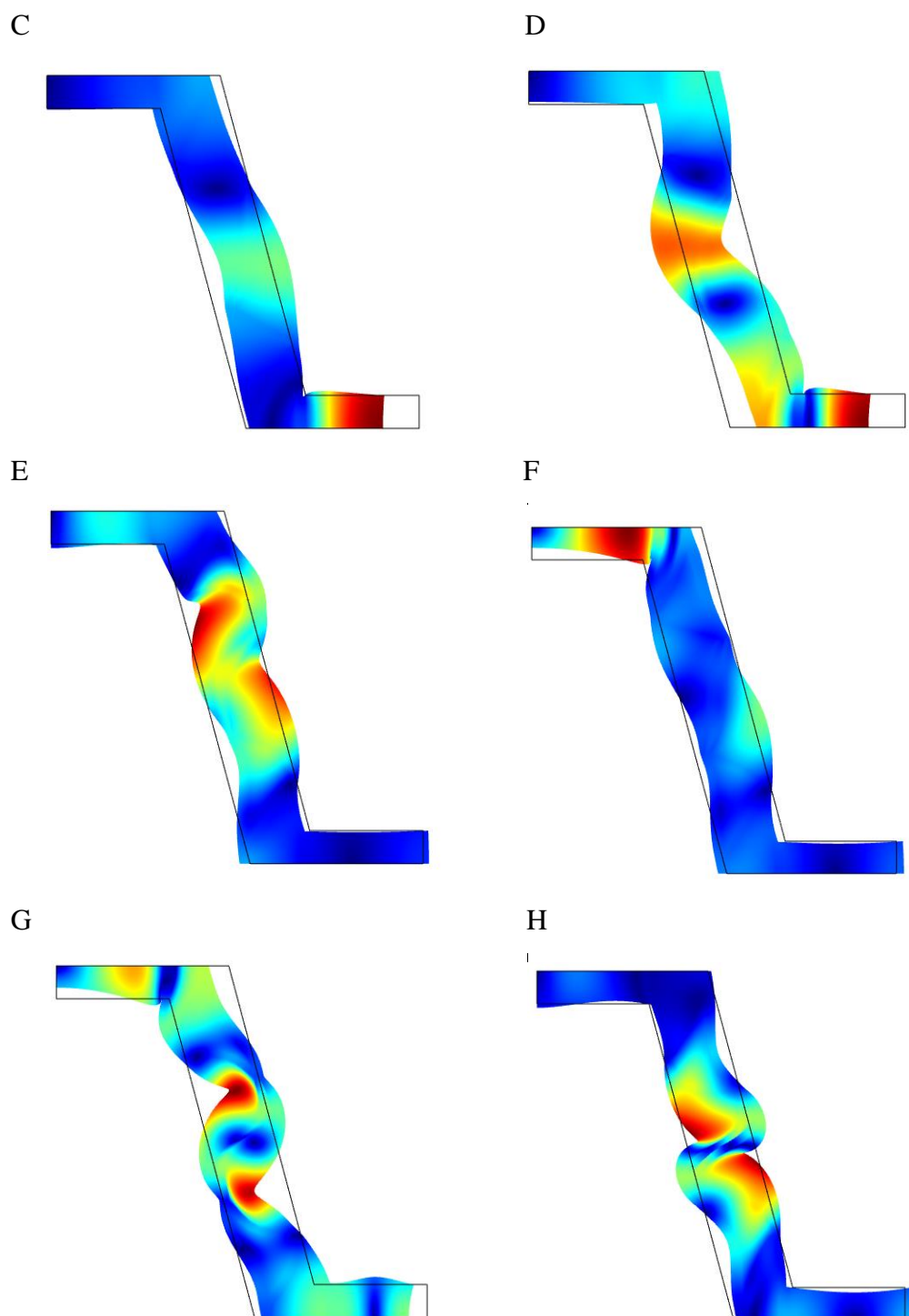
Dla struktury o kształcie heksagonalnego plastra miodu, z już zminimalizowanym efektywnym współczynnikiem Poissona (Rys. 5.2.1.1A) zbadano właściwości dynamiczne, sprawdzając wartości częstości własnych struktury, pod wpływem wymuszenia harmonicznego. Warunki brzegowe są takie same, jak podczas badań w poprzednich rozdziałach, z tym, że siła wymuszająca jest siłą harmoniczną. Na Rys. 8.2.1 A-H przedstawiono odkształcenia zoptymalizowanego kształtu, dla każdej z ośmiu pierwszych częstotliwości własnych struktury dwufazowej. W tabeli 8.2.1 przedstawiono zestawienie wyników częstości własnych, z porównaniem, jak wyglądają częstości własne dla struktury homogenicznej o takim samym kształcie.

A



B





Rys. 8.2.1 Postaci drgań własnych $\frac{1}{4}$ zoptymalizowanej struktury dwufazowej o minimalnym efektywnym współczynniku Poissona, wartość częstotliwości własnej: A – 38.229 Hz, B – 109.56 Hz, C – 247.22 Hz, D – 310.82 Hz, E – 410.48 Hz, F – 464.23 Hz, G – 546.53 Hz, H – 570.56 Hz

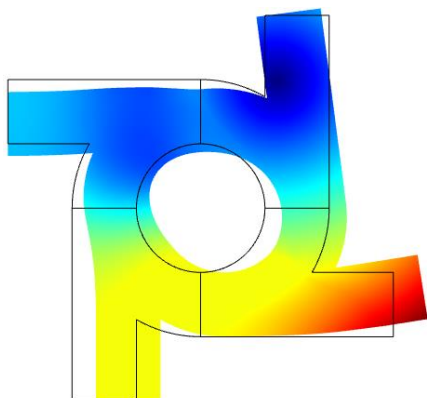
Tab. 8.2.1 Wartości częstości własnych dla struktur: A – jednofazowej (zbudowanej z materiału 1 ($E_1 = 10^9$ Pa, $\nu_1=0.1$, $\rho_1=4000$ kg/m³), B – jednofazowej (zbudowanej z materiału 2 ($E_2 = 10^{11}$ Pa, $\nu_2=0.33$, $\rho_2=7000$ kg/m³) i C - optymalnej pod względem minimalnego efektywnego współczynnika Poissona

Nr	1	2	3	4	5	6	7	8
Rodzaj	[Hz]							
A	53.814	153.74	347.15	440.16	582.94	655.11	783.18	822.79
B	128.02	366.9	827.88	1040.9	1374.6	1554.6	1830.2	1910.7
C	38.229	109.56	247.22	310.82	410.48	464.23	546.53	570.56

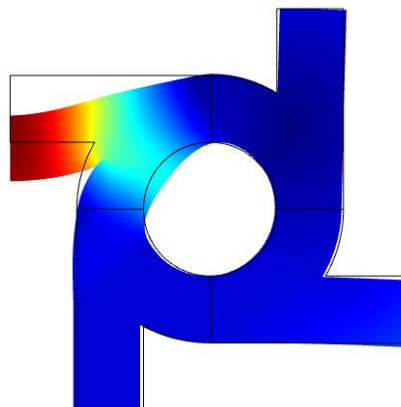
8.3 Wyniki badań częstości własnych dla struktury anty-tetra-chiralnej

Dla struktury o kształcie anty-tetra-chiralnym, z optymalnym efektywnym współczynnikiem Poissona (Rys. 6.2.1.1.) zbadano właściwości dynamiczne, sprawdzając wartości częstości własnych struktury, pod wpływem wymuszenia harmonicznego. Warunki brzegowe są takie same, jak podczas badań w poprzednich rozdziałach, z tym, że siła wymuszająca jest siłą harmoniczną. Na Rys. 8.3.1 A-H zostały zilustrowane odkształcenia zoptymalizowanego kształtu, dla każdej z 8-miu pierwszych częstości własnych struktury dwufazowej. W tabeli Tab. 8.3.1 przedstawiono zestawienie ich wyników, z porównaniem, jak wyglądają częstości własne dla struktury złożonej z jednego materiału o takim samym kształcie.

A

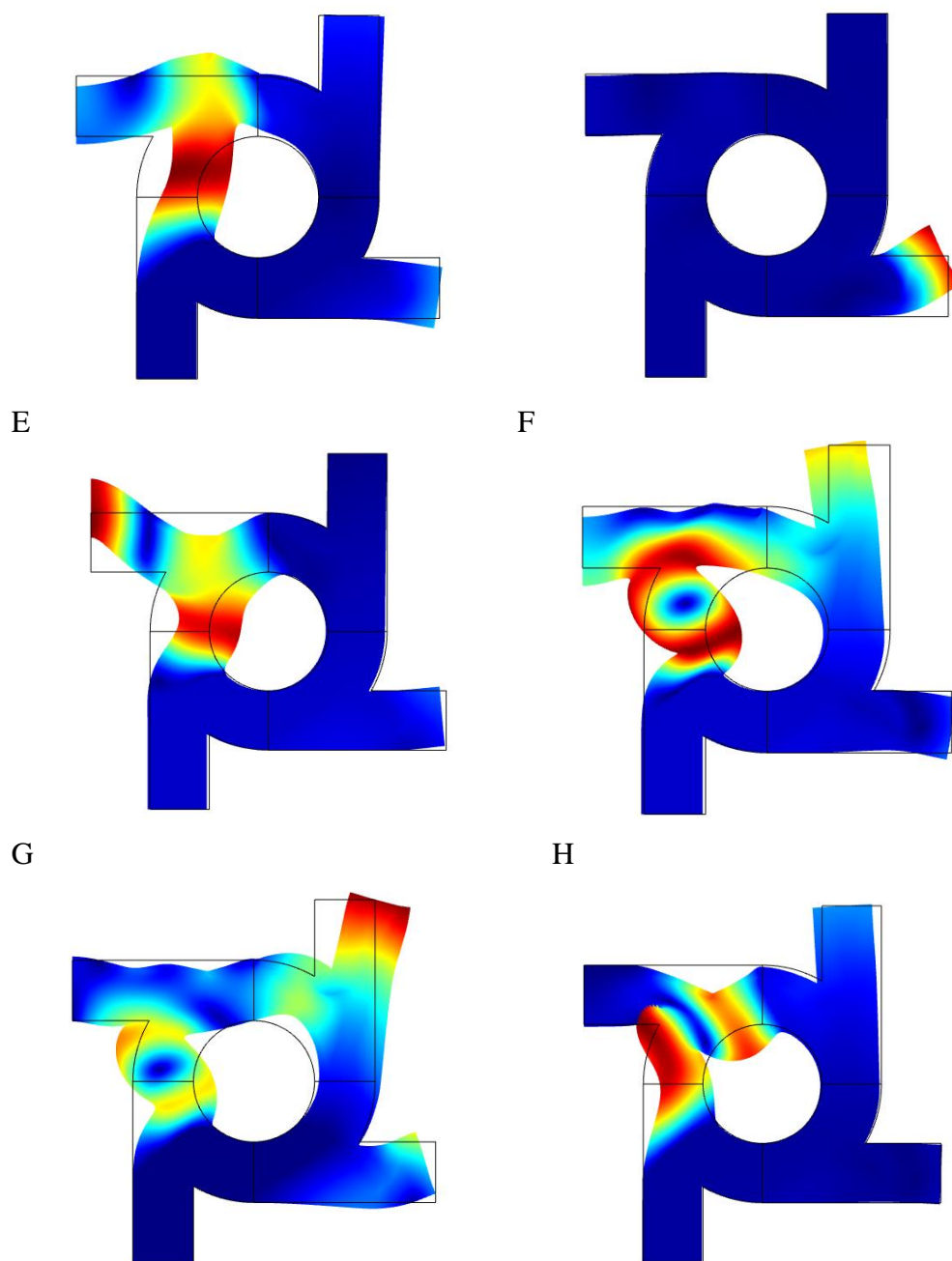


B



C

D



Rys. 8.3.1 Postaci drgań własnych $\frac{1}{4}$ zoptymalizowanej struktury dwufazowej o minimalnym efektywnym współczynniku Poissona, wartość częstości własnej: A – 17.035 Hz, B – 41.259 Hz, C - 75.223 Hz, D – 88.819 Hz, E – 101.65 Hz, F – 134.49 Hz, G - 152.43 Hz, H – 156.7 Hz

Tab. 8.3.1 Wartości częstości własnych dla struktur: A – jednofazowej (zbudowanej z materiału 1 ($E_1 = 10^7$ Pa, $\nu_1=0.1$, $\rho_1=4000$ kg/m³), B – jednofazowej (zbudowanej z materiału 2 ($E_2 = 2 \cdot 10^{11}$ Pa, $\nu_2=0.33$, $\rho_2=7000$ kg/m³) i C - optymalnej pod względem minimalnego efektywnego współczynnika Poissona

Nr	1	2	3	4	5	6	7	8
Rodzaj	[Hz]							
A	24.578	58.922	109.96	128.53	147.34	194.96	218.58	228.55
B	18.04	43.692	79.659	94.057	107.64	142.43	161.41	165.94
C	17.035	41.259	75.223	88.819	101.65	134.49	152.43	156.7

Uzyskane dla wszystkich domen obliczeniowych wyniki wskazują na znaczne zmniejszenie częstości własnych dla struktury dwufazowej w porównaniu z kształtami wypełnionymi tylko jednym materiałem.

9 Wnioski

W pracy udowodniono, iż możliwe jest uzyskanie ujemnych efektywnych współczynników Poissona, poprzez wypełnienie dwoma materiałami, struktur o różnych kształtach, zarówno takich, jakie wykazują auksetyczne właściwości, będąc złożone z jednego materiału, jak i nie wykazują ich wcześniej. Poprzez wypełnienie struktury tymi samymi materiałami można również uzyskać wysoką dodatnią wartość efektywnego współczynnika Poissona.

Im większy parametr kształtu materiału (np. grubość, szerokość) tym bardziej optymalne okazały się wyniki (wskazują na to wyniki badań dla zmiennej grubości heksagonalnego konwencjonalnego plastra miodu oraz struktury anty-tetra-chiralnej). W strukturach o większej powierzchni materiał „twardy” miał większe możliwości zbudowania odpowiednich struktur, które determinowały pojawianie się odkształcenia poprzecznego, które zwiększało efektywny współczynnik Poissona.

W zdecydowanej większości udział fazy materiału o większym module Younga na poziomie 30% - 40% przynosił w wynikach bardziej optymalne wyniki. Dalsze zwiększanie udziału tego materiału w całej strukturze nie przynosiło zwiększenia optymalności rozwiązania (struktura anty-tetra-chiralna).

W konwencjonalnym heksagonalnym plastrze miodu przeprowadzono badania dla modeli z różnymi stosunkami modułów Younga materiałów wypełniających. Tutaj bardziej optymalne rozwiązania otrzymano dla większego stosunku 10^3 MPa niż dla 10^2 MPa.

Przedstawione w rozdziale siódmym wyniki badań dla różnego parametru penalizacji (kary) p w schemacie interpolacji SIMP właściwości struktury dwufazowej wskazują na to, iż najbardziej optymalne wyniki otrzymano dla parametru p o wartości równej 3. Szczególnie było to widoczne w badaniach modeli, gdzie zawartość fazy „twardej” w całej strukturze była największa (30% lub 40%). Mniejsze zawartości (10%, 20%) nie pokazywały jednoznacznie, dla którego p uzyskano najbardziej optymalne rozwiązanie.

W pracy (rozdział 5.2.4) przedstawiono porównanie wyników optymalizacji za pomocą schematów interpolacji SIMP oraz RAMP dla struktury konwencjonalnego plastra miodu. Wyniki uzyskane metodą RAMP są mniej optymalne niż liczone za pomocą modelu SIMP. Największą różnicę między wynikami, na niekorzyść modelu

RAMP zaobserwowano przy większej różnicy modułów Younga materiałów faz wypełniających strukturę.

Wyniki optymalizacji dla różnych ilości elementów skończonych w strukturze (rozdział 4.2.3) potwierdziły zależność rozwiązań od właśnie tego czynnika. Struktury wynikowe różniły się bardzo w zależności od ilości elementów oraz algorytmu wypełnienia siatki. Różnice w wartości efektywnego współczynnika Poissona dochodziły do około 100%. Prawie identyczne wyniki uzyskano dla siatki mapowanej o 4489 elementach i siatki automatycznej o 24912 elementach.

W pracy sprawdzono również wpływ równych współczynników Poissona materiałów obu wypełniających strukturę faz. Współczynnik ten wynosił dla obu materiałów 0.33. Dla struktury konwencjonalnego plastra miodu zmiana ta nie wpłynęła na wynik rozwiązania. W przypadku domeny obliczeniowej o kształcie kwadratu różnica wyniosła ok. 5%, natomiast dla struktury anty-tetra-chiralnej wyniosła ona ok. 20%.

W niniejszej pracy (rozdział 5.2.6) przeprowadzono również optymalizację z wprowadzonym ograniczeniem tzw. parametru regularyzacji do wartości 1000, 100, oraz 1. Wprowadzenie tego ograniczenia w wielkości 100 doprowadziło do znaczącego zwiększenia wyniku, a przez to uzyskanie mało optymalnego rozwiązania. Wprowadzenie do modelu obliczeniowego ograniczenia parametru optymalizacji do 1 nie pozwoliło uzyskać optymalnego rozwiązania, a także nie została struktura 0-1 (elementy skończone w modelu przyjęły wartości pośrednie).

W rozdziale ósmym przedstawiono częstości własne optymalnych struktur ze zminimalizowanym współczynnikiem Poissona oraz porównano te częstości ze strukturami jednofazowymi. Modele optymalne przyjmowały znacząco mniejsze wartości niż struktury homogeniczne.

Literatura

- [Alderson2000] Alderson A.; Rasburn J.; Ameer-Be S.; Mullarkey P.G.; Perrie W.; Evans K.E. An auxetic filter: A tuneable lter displaying enhanced size selectivity or defouling properties. *Industrial & Engineering Chemistry Research* 2000, 39:654-665. doi: 10.1021/ie990572w.
- [Ali2014] Ali M.N.; Busfield J.J.C.; Rehman I.U. Auxetic oesophageal stents: structureand mechanicalproperties. *Journal of Materials Science: Materials in Medicine* 2014, vol. 25, no. 2, p. 527-553. doi: 10.1007/s10856-013-5067-2.
- [Almgren1985] Almgren R.F. An isotropic three-dimensional structure with poisson's ratio=-1. *Journal of Elasticity* 1985, 15(4):427-430, doi: 10.1007/ BF00042531.
- [Ameen2005] Ameen M. *Computational elasticity*, Alpha Science, UK, 2005.
- [Andreassen2014] Andreassen E.; Lazarov B.S.; Sigmund O. Design of manufacturable 3D extremal elastic microstructure. *Mech. Mater.* 2014, 69, 1–10. doi: 10.1016/j.mechmat.2013.09.018.
- [Bacigalupo2014] Bacigalupo A.; Gambarotta L. Homogenization of periodic hexa- and tetra-chiral cellular solids. *Composite Structures* 2014, 116:461-476, doi:10.1016/j.compstruct.2014.05.033.
- [Banerjee2011] Banerjee B. *An Introduction to Metamaterials and Waves in Composites*. CRC Press Taylor & Francis Group Boca Raton, USA, 2011.
- [Baughman1998] Baughman R.H.; Shacklette J.M.; Zakhidov A.A; Stafstroem S. Negative poisson's ratio as a common feature of cubic metals. *Nature* 1998, 392:362-365. doi: 10.1038/32842.
- [Bendsøe1988] Bendsøe M. P.; Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1988, 71, 197–224. doi: 10.1016/0045-7825(88)90086-2.
- [Bendsøe1989] Bendsøe M. P. Optimal shape design as a material distribution problem, *Struct. Optim.* 1989, 1, 193–202. doi: 10.1007/BF01650949.
- [Bendsøe1999] Bendsøe M.P.; Sigmund O.. Material interpolation schemes in topology optimization. *Arch. Appl. Mech.* 1999, 69, 635–654. doi: 10.1007/s004190050
- [Bendsøe2003] Bendsøe M.P.; Sigmund O. *Topology Optimization, Theory, Methods and Application*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg 2003.
- [Bezazi2007] Bezazi A.; Scarpa F. Mechanical behaviour of conventional and negative Poisson's ratio thermoplastic polyurethane foams under compressive cyclic loading.

- International Journal of Fatigue 2007, 29(5):922-930. doi: 10.1016/j.ijfatigue.2006.07.015.
- [Bianchi2010] Bianchi M.; Scarpa F.L.; Smith C.W. Shape memory behaviour in auxetic foams: mechanical properties. *Acta Materialia* 2010, 58(3):858-865. doi: 10.1016/j.actamat.2009.09.063.
- [Bilski2016] Bilski M.; Wojciechowski K.W. Tailoring Poisson's ratio by introducing auxetic layers, *Physica Status Solidi B* 2016, 253, 7, 1318-1323 doi: 10.1002/pssb.201600140.
- [Blumenfeld2005] Blumenfeld R. Auxetic strains: insight from iso-auxetic materials. *Molecular Simulation* 2005, 31(13):867-871. doi: 10.1080/08927020500295044.
- [Brandt1978] Brandt A.M. *Podstawy optymalizacji elementów konstrukcji budowlanych*, PWN, Warszawa 1978.
- [Buczynski1999] Buczynski T.; Kokot G. The evolutionary optimization using genetic algorithms and boundary elements, *WCSMO-3 (World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization)*, Buffalo, New York, 1999, 87–89.
- [Burke1997] Burke M. A stretch of the imagination. *New Scientist* 1997, 154(2085):36-39.
- [Caddock1989] Caddock B.D.; Evans K.E. Microporous materials with negative Poisson's ratios: Microstructure and mechanical properties. *Journal of Physics D: Applied Physics* 1989, 22:1877-1882. doi: 10.1088/0022-3727/22/12/012
- [Chan1997] Chan N.; Evans E. Microscopic examination of the microstructure and deformation of conventional and auxetic foams. *Journal of Materials Science* 1997, 32(21):5725-5736. doi: 10.1023/A:1018665617008.
- [Chan1998] Chan N.; Evans K.E.. Indentation resilience of conventional and auxetic foams. *Journal of Cellular Plastics* 1998, 34(3):231-260. doi: 10.1177/0021955X9803400304.
- [Choi1995a] Choi J.B.; Lakes R.S. Nonlinear analysis of the poisson's ratio of negative Poisson's ratio foams. *Journal of Composite Materials* 1995, 29(1):113-128. doi: 10.1177/002199839502900106.
- [Choi1995b] Choi J.B.; Lakes R.S. Analysis of elastic modulus of conventional foams and of re-entrant foam materials with a negative poisson's ratio. *International Journal of Mechanical Sciences* 1995, 37(1):5159. doi:10.1016/0020-7403(94)00047-N.

- [Czarnecki2015a] Czarnecki S.; Wawruch P. The emergence of auxetic material as a result of optimal isotropic design. *Phys. Status Solidi B* 2015, 252, 1620–1630. doi: 10.1002/pssb.201570342
- [Czarnecki2015b] Czarnecki S. Isotropic material design. *Comput. Meth. Sci. Technol.* 2015, 21, 49–64. doi: 10.12921/cmst.2015.21.02.001
- [Czarnecki2017] Czarnecki S.; Lewiński T. On material design by the optimal choice of Young's modulus distribution. *Int. J. Solids Struct* 2017, 110–111, 315–331. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2016.11.021
- [Eschenauer1993] Eschenauer H.A.; Schumacher A.; Vietor T. Decision makings for initial designs made for ad-vanced materials, w: Bendsøe M.P., Mota Soares C. A. *Topology design of structures* 1993, s. 469–480. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- [Eschenauer1994] Eschenauer H.A.; Kobelev V.V.; Schumacher A., Bubble method for topology and shape optimization of structures. *Struct. Optim.* 1994, Vol. 8, s. 42–51. doi: 10.1007/BF01742933
- [Eschenauer1995] Eschenauer H.A.; Schumacher A. Simultaneous shape and topology optimization of structures, w: Rozvany G.I.N., Olhoff N. *Proceedings of WCSMO–1 (World Congress on Structural and Mul-tidisciplinary Optimization)*, Pergamon, Book of abstracts 1995, s. 177–184. doi:10.1115/1.1388075
- [Evans1991a] Evans K.E. Auxetic polymers: a new range of materials. *Endeavour* 1991, 15(4): 170-174. doi: 10.1016/0160-9327(91)90123-S
- [Evans1991b] Evans K.E.; Nkansah M.A.; Hutchinson I.J.; Rogers S.C. Molecular network design. *Nature* 1991, 353(124), 1991. doi: 10.1038/353124a0.
- [Evans1994] Evans K.E.; Nkansah M.A.; Hutchinson I.J. Auxetic foams: Modelling negative Poisson's ratios. *Acta Metallurgica et Materialia* 1994, 42(4):1289-1294. doi:0.1016/0956-7151(94)90145-7
- [Friis1988] Friis E.A.; Lakes R.S.; Park J.B. Negative poisson's ratio polymeric and metallic materials. *Journal of Materials Science* 1988, 23:4406-4414. doi: 10.1007/BF00551939
- [Gaspar2005] Gaspar N; Ren X.J.; Smith C.W.; Grima J.N.; Evans K.E. Novel honeycombs with auxetic behaviour. *Acta Materialia* 2005, vol. 53, no. 8, p. 2439-2445. doi: 10.1016/j.actamat.2005.02.006

- [Gatt2015] Gatt R.; Wood M.V.; Gatt A., Zarb F.; C. Formosa; Azzopardi K.M.; Chockalingam N. Negative Poisson's ratios in tendons: an unexpected mechanical response. *Acta biomaterialia* 2015, 24, 201-208. doi: 10.1016/j.actbio.2015.06.018
- [Gibiansky2000] Gibiansky L.V.; Sigmund O. Multiphase composites with extremal bulk modulus. *J. Mech. Phys. Solids* 2000, 48, 461-498. doi: 10.1016/S0022-5096(99)00043-5
- [Gibson1982] Gibson L.J.; Ashby M.F.; Schajer G. S.; C. I. Robertson The mechanics of two-dimensional cellular materials, 382, *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* 1982. doi: 10.1098/rspa.1982.0087
- [Gibson1997] Gibson L.J.; Ashby M.F. *Cellular solids: Structure and properties*. Cambridge University Press (2nd ed.), 1997.
- [Grima2005a] Grima J.N.; Alderson A.; Evans K.E. Auxetic behaviour from rotating rigid units. *Physica status solidi B* 2005, 242(3):561-575, doi: 10.1002/pssb.200460376.
- [Grima2005b] Grima J.N.; Evans K.E. Auxetic behaviour from rotating triangles. *Journal of Materials Science* 2005, 41(10):3193-3196, doi: 10.1007/s10853-006-6339-8.
- [Grima2008a] Grima J.N.; Attard D. Auxetic behaviour from rotating rhombi. *Physica status solidi B* 2008, 245(11):2395-2404, doi: 10.1002/pssb.200880269.
- [Grima2008b] Grima J.N.; Zammit V.; Gatt R.; Attard D.; Caruana C.; Bray T.G.C. On the role of rotating tetrahedra for generating auxetic behavior in nat and related systems. *Journal of Non-Crystalline Solids* 2008, 354(35-39):4214-4220. doi: 10.1016/j.jnoncrysol.2008.06.081.
- [Grima2013] Grima J.N.; Caruana-Gauci R.; Dudek, M.R.; Wojciechowski K.W.; Gatt R. Smart metamaterials with tunable auxetic and other properties. *Smart Mater. Struct.* 2013, 22, 084016. DOI:10.1088/0964-1726/22/8/084016
- [Gunton1972] Gunton D.D.; Saunders G. A. The young's modulus and poisson's ratio of arsenic, antimony and bismuth. *Journal of Materials Science* 1972, 7(9):1061-1068. doi: 10.1007/BF00550070
- [Ha2016] Ha C.S.; Plesha M.E.; Lakes R.S. Chiral three-dimensional lattices with tunable Poisson's ratio. *Smart Mater. Struct.* 2016, 25, 054005. DOI:10.1088/0964-1726/25/5/054005.
- [Haeri1992] Haeri A.Y.; Weidner D.J.; Parise J.B. Elasticity of cristobalite: a silicon dioxide with a negative poisson's ratio. *Science* 1992, 257:650-652. doi: 10.1126/science.257.5070.650

- [Hall2008] Hall L.J.; Coluci V.R.; Galvao D.S.; Kozlov M.E.; Zhang M.; Dantas S.O.; Baughman R.H. Sign change of poisson's ratio for carbon nanotube sheets. *Science* 2008, 20(5875):504-507. doi: 10.1126/science.1149815.
- [Howell1994] Howell B.; Prendergast P.; Hansen L. Examination of acoustic behavior of negative poisson's ratio materials. *Applied Acoustics* 1994, 43(2):141-148. doi: 10.1016/0003-682X(94)90057-4.
- [Imbalzano2017] Imbalzano G.; Tran P.; Ngo T.D.; Lee P. V. Three-dimensional modeling of auxetic sandwich panels for localised impact resistance. *Journal of Sandwich Structures & Materials* 2017, 19(3), 291-316. doi: 10.1177/1099636215618539.
- [Jacobsen1997] Jacobsen J. B.; Olhoff N.; Ronholt E. Generalized shape optimization of three-dimensional structures using materials with optimum microstructures, Report of Institute of Mechanical Engineering 1997, Aalborg University.
- [Kaminakis2012] Kaminakis N.T.; Stavroulakis G.E. Topology optimization for compliant mechanisms, using evolutionary hybrid algorithms and application to the design of auxetic materials. *Compos. Part B* 2012, 43, 2655–2668. DOI: 10.1016/j.compositesb.2012.03.018
- [Kaminakis2015] Kaminakis N.T.; Drosopoulos G.A.; Stavroulakis G.E. Design and verification of auxetic microstructures using topology optimization and homogenization. *Arch. Appl. Mech.* 2015, 85, 1289–1306. doi:10.1007/s00419-014-0970-7
- [Kirsch1981] Kirsch U. Optimum structural design. McGraw-Hill, Nowy Jork 1981.
- [Kita1999] Kita E.; Tanie H. Topology and shape optimization of continuum structures using GA and BEM, *Struct. and Mult. Optim.* 1999, Vol. 17, s. 130–139.
- [Kleiber1985] Kleiber M. Metoda Elementów Skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum. Biblioteka Mechaniki Stosowanej IPPT PAN. PWN, Warszawa-Poznań 1985.
- [Kutyłowski2004] Kutyłowski R. Optymalizacja topologii kontinuum materialnego. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej Wrocław, 2004.
- [Lakes1987] Lakes R.S. Foam structure with a negative poisson's ratio. *Science* 1987, 235: 1034-1040. doi: 10.1126/science.235.4792.1038.
- [Lakes1993] Lakes R.S.; Elms K.E. Indentability of conventional and negative Poisson's ratio foams. *Journal of Composite Materials* 1993, 27(12):1193-1202. doi: 10.1177/002199839302701203.

- [Lakes2007] Lakes R.S. Cellular solids with tunable positive or negative thermal expansion of unbounded magnitude. *Appl. Phys. Lett.* 2007, 90, 221905. DOI:10.1063/1.2743951
- [Lakes2017] Lakes, R.S. Negative Poisson's Ratio Materials: Auxetic Solids. *Annu. Rev. Mater. Res.* 2017, 47, 1.1–1.19. DOI:10.1146/annurev-matsci-070616-124118
- [Larsen1992] Larsen U.; Sigmund O.; Bouwstra S. Design and fabrication of compliant micromechanisms and structures with negative Poisson's ratio. *J. Microelectromech. Syst.* 1997, 6, 99–106. doi: 10.1109/84.585787.
- [Lautrup2005] Lautrup B. *Physics of Continuous Matter, Exotic and Everyday Phenomena in the Macroscopic World*, IOP, Bristol, 2005.
- [Lees1991] Lees C.; Vincent J.F.; Hillerton J.E. Poisson's ratio in skin. *Bio-Medical Materials and Engineering* 1991, 1(1):19-23. doi: 10.3233/BME-1991-1104.
- [Lewiński1994a] Lewiński T.; Zhou M.; Rozvany G.I.N. Extended exact solutions for least-weight truss layouts – part I: cantilever with a horizontal axis of symmetry, *Int. J. Mech. Sci.* 1994, 36, 375–398. doi: 10.1016/0020-7403(94)90043-4.
- [Lewiński1994b] Lewiński T.; Zhou M.; Rozvany G.I.N., Extended exact solutions for least-weight truss layouts – part II: unsymmetric cantilevers, *Int. J. Mech. Sci.* 1994, 36, 399–419. doi: 10.1016/0020-7403(94)90044-2
- [Li1976] Li Y. The anisotropic behavior of poisson's ratio, young's modulus, and shear modulus in hexagonal materials. *Physica status solidi A* 1976, 38(1):171-175. doi: 10.1002/pssa.2210380119
- [Li2016a] Li, D.; Dong, L.; Lakes R.S. A unit cell structure with tunable Poisson's ratio from positive to negative. *Materials Letters* 2016, 164, 456–459. DOI:10.1016/j.matlet.2015.11.037
- [Li2016b] Li, D.; Maa J.; Dong, L.; Lakes R.S. A bi-material structure with Poisson's ratio tunable from positive to negative via temperature control, *Materials Letters* 2016, 181, 285–288. DOI:10.1016/j.matlet.2016.06.054
- [Lim2015] Lim T.C. *Auxetic Materials and Structures*, Springer Singapore, 2015. doi:10.1007/978-981-287-275-3
- [Liu2012] Liu X.N.; Huang G.L.; Hua G.K. Chiral effect in plane isotropic micropolar elasticity and its application to chiral lattices. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 2012, 60(11):1907-1921, doi: 10.1016/j.jmps.2012.06.008.
- [Love1944] Love A.E.H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Dover Publications, New York (4th ed.), 1944.

- [Łukasiak2014] Łukasiak P. Two-phase isotropic composites with prescribed bulk and shear moduli. In *Recent Advances in Computational Mechanics*, Łodygowski, T., Rakowski, J., Litewka, P., Eds.; Taylor & Francis Group: London, UK; pp. 213–222, 2014.
- [Maute1995] Maute K.; Ramm E. Adaptive topology optimization. *Advances in Structural Optimization*, *Struct. Optim.* 1995, 10, 100–112. doi: 10.1007/BF01743537
- [Master1996] Masters E.G.; Evans K.E. Models for the elastic deformation of honeycombs. *Composite Structures* 1996, 35(4):403-422. doi: 10.1016/S0263-8223(96)00054-2
- [Milton1992] Milton G.W. Composite materials with poisson's ratio close to -1. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 1992, 40(5): 1105-1137. doi: 10.1016/0022-5096(92)90063-8
- [Nowak2017] Nowak M. Projektowanie konstrukcji o wysokiej sztywności z zastosowaniem optymalizacji strukturalnej. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 2017.
- [Olhoff1998] Olhoff N.; Ronholt E.; Scheel J. Topology optimization of three dimensional structures using optimum microstructures, *Struct. Optim.* 1998, 16, 1–18. doi: 10.1007/BF01213995
- [Park2015] Park D.; Lee J.; Romo A. Poisson's Ratio Material Distributions. In *Emerging Experience in Past, Present and Future of Digital Architecture*, Proceedings of the 20th International Conference of the Association for Computer-Aided Architectural Design Research in Asia 725-44, 2015.
- [Prall1996] Prall D.; Lakes R.S. Properties of a chiral honeycomb with a poisson's ratio of $\nu = -1$. *International Journal of Molecular Sciences* 1996, 39(3):305-314. doi: 10.1016/S0020-7403(96)00025-2
- [Rasburn2001] Rasburn J.; Mullarkey P.G.; Evans K.E.; Alderson A.; Ameer-Beg S.; Perrie W. Auxetic structures for variable permeability systems. *AIChE Journal* 2001, 47(11):2623-2626. doi: 10.1002/aic.690471125.
- [Rozvany1995] Rozvany G.I.N. w: Herskovits, What is meaningful in topology design? An engineer's viewpoint, *Advances in Structural Optimization*, Kluwer Academic Publishers 1995, 149–188.
- [Rozvany2001a] Rozvany G.I.N. Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics, *Struct. and Mult. Optim* 2001, 21, 90–108. doi: 10.1007/s001580050

- [Rozvany2001b] Rozvany G.I.N., Stress ratio and compliance based methods in topology optimization – a critical review, *Struct. and Mult. Optim.* 2001, Vol. 21, s. 109–119. doi: 10.1007/s001580050175
- [Rozvany2001c] Rozvany G.I.N.; Querin O. M. Present limitations and possible improvements of SERA (Sequential Element Rejections and Admissions) methods in topology optimization. *World Congress on Structural and Multidis-ciplinary Optimization* (Dalian, Chiny, 4–8.06.2001 – Book of abstracts 2001, s. 48–49.
- [Rusiński2000] Rusiński E.; Czmochowski J.; Smolnicki T.. *Zaawansowana metoda elementów skończonych w konstrukcjach nośnych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2000.
- [Scarpa2004] Scarpa F.; Ciffo L.G.; Yates J.R. Dynamic properties of high structural integrity auxetic open cell foam. *Smart Materials and Structures* 2004, 13(1): 49-56. doi: 10.1088/0964-1726/13/1/006
- [Schwerdtfeger2011] Schwerdtfeger J.; Wein F.; Leugering G.; Singer R.F.; Körner C.; Stingl M.; Schury F. Design of auxetic structures via mathematical optimization. *Adv. Mater.* 2011, 23, 2650–2654. doi: 10.1002/adma.201004090
- [Sigmund2000] Sigmund O. A new class of extremal composites. *J. Mech. Phys. Solids* 2000, 48, 397–428. doi: 10.1016/S0022-5096(99)00034-4
- [Shadrivov2015] Shadrivov I.V.; Lapine M.; Kivshar, Y.S. (eds.). *Nonlinear, Tunable and Active Metamaterials*, Nonlinear, Tunable and Active Metamaterials 2015, Springer International Publishing, Switzerland. DOI: 10.1007/978-3-319-08386-5
- [Spadoni2011] Spadoni A.; Ruzzene M. Elasto-static micropolar behavior of a chiral auxetic lattice. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 2011, 60:156-171. doi: 10.1016/j.jmps.2011.09.012.
- [Stavroulakis2005] Stavroulakis G.E. Auxetic behaviour: Appearance and engineering applications. *Physica Status Solidi B* 2005, 242, 3, 710–720, doi:10.1002/pssb.200460388.
- [Strek2016] Strek T.; Jopek H.; Idczak E. Computational design two-phase auxetic structures. *Phys. Status Solidi B* 2016, 253, 1387–1394. doi:10.1002/pssb.20160012
- [Strek2017a] Strek T.; Idczak E. Minimization of Poisson's ratio in anti-tetra-chiral two-phase structure. *IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.* 2017, 248, 012006. doi: 10.1088/1757-899X/248/1/012006

- [Strek2017b] Strek T.; Jopek H.; Idczak E.; Wojciechowski K.W. Computational Modelling of Structures with Non-Intuitive Behaviour. *Materials* 2017, 10, 1386. doi:10.3390/ma10121386
- [Svanberg1987] Svanberg K. The Method of Moving Asymptotes – a new method for structural optimization. *International Journal for numerical methods in engineering* 1987, Vol. 24, 359-373. doi: 10.1002/nme.1620240207
- [Svanberg2013] Svanberg, K. MMA and GCMMA – Fortran versions; KTH, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 2013.
- [Theocaris1997] Theocaris P.S.; Stavroulakis G.E.; Panagiotopoulos P.D. Negative Poisson's ratios in composites with star-shaped inclusions: a numerical homogenization approach. *Archive of Applied Mechanics* 1997, 67(4):274-286. doi: 10.1007/s004190050
- [Thomsen1992] Thomsen J. Topology optimization of structures composed of one or two materials. *Struct. Optim.* 1992, 5, 108–115. doi: 10.1007/BF01744703
- [Xie1997] Xie Y.M.; Steven G.P. *Evolutionary Structural Optimization*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.
- [Webber2008] Webber R.S.; Alderson K.L.; Evans K.E. A novel fabrication route for auxetic polyethylene part 2: mechanical properties. *Polymer Engineering & Science* 2008, 48(7):1351-1358. doi: 10.1002/pen.21110
- [Williams1982] Williams J.L.; Lewis J.L. Properties and an anisotropic model of cancellous bone from the proximal tibial epiphysis. *Journal of Biomechanical Engineering* 1982, 104(1):50-56. doi: 10.1115/1.3138303
- [Wojciechowski1989a] Wojciechowski K. W. Two-dimensional isotropic system with a negative Poisson ratio. *Physics Letters A* 1989, 137.1-2 (1989): 60-64, doi: 10.1016/0375-9601(89)90971-7.
- [Wojciechowski1989b] Wojciechowski K. W.; Brańka A. C. Negative Poisson ratio in a two-dimensional “isotropic” solid, *Physical Review A* 1989, 40.12, 7222, doi: 10.1103/PhysRevA.40.7222
- [Wojciechowski2003] Wojciechowski K. W. Remarks on “Poisson ratio beyond the limits of the elasticity theory”. *Journal of the Physical Society of Japan* 2003, 72.7, 1819-1820, doi: 10.1143/JPSJ.72.1819.
- [Wojciechowski2014] Wojciechowski K. W.; Pozniak A. A. Poisson's ratio of rectangular anti-chiral structures with size dispersion of circular nodes. *physica status solidi (b)* 2014, 251.2, 367-374, doi: 10.1002/pssb.201384256.

[www1] <http://www.haute-innovation.com/de/magazin/smart-materials/active-auxetic-anpassbare-materialien-fuer-koerperbekleidung.html>dostęp: 19.11.2017.

[www2]

https://campus.minesdouai.fr/pluginfile.php/19034/mod_resource/content/0/CH2_en_mai_2013/co/ch2_5_2_en.htmldostęp: 19.11.2017.

[Yeganeh-Haeri1992] Yeganeh-Haeri A.; Donald J.; Weidner D.J.; Parise J.B. Elasticity of α -Cristobalite: A Silicon Dioxide with a Negative Poisson's Ratio, Science 1992, 31, Vol. 257, Issue 5070, pp. 650-652, doi: 10.1126/science.257.5070.650.

[Zienkiewicz1991] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method. McGraw-Hill, UK, 1991.