

Politechnika Poznańska
Wydział Budowy Maszyn i Zarządzania
Instytut Mechaniki Stosowanej
Zakład Mechaniki Technicznej



**Modelowanie i analiza MES właściwości
dynamicznych materiałów kompozytowych
termicznie optymalnych**

Rozprawa doktorska

Promotor pracy dr hab. Tomasz Stręk, prof. nadzw.

Poznań 2015

Spis treści

Streszczenie	4
Abstract	4
1. Wstęp	5
1.1 Wprowadzenie	5
1.2 Przegląd literatury	10
1.2.1 Zastosowanie algorytmu Nelder-Meada w optymalizacji	10
1.2.2 Zastosowanie algorytmów genetycznych w optymalizacji	11
1.2.3 Zastosowanie algorytmów hybrydowych w optymalizacji	13
1.2.4 Zastosowanie optymalizacji topologii	14
1.2.5 Zastosowanie optymalizacji topologii w zagadnieniach termicznych	15
1.2.6 Problem odwrotny w zagadnieniach termicznych	20
1.3 Motywacja, cel i teza pracy	21
1.4 Układ pracy	22
2. Materiały kompozytowe	26
2.1 Przegląd materiałów kompozytowych	26
2.1.1 Kompozyty wzmacniane cząstkami	28
2.1.2 Kompozyty wzmacniane włóknami	29
2.1.3 Kompozyty strukturalne	30
2.2 Właściwości termiczne i mechaniczne kompozytów	32
2.3 Właściwości efektywne kompozytów	36
2.4 Wybrane kompozyty o specjalnych właściwościach termicznych	39
2.2.1 NTE	39
2.2.2 APG	40
2.2.3 Technologia druku 4D materiałów kompozytowych	40
3. Metody optymalizacyjne	42
3.1 Metody bezgradientowe	44
3.1.1 Metoda sympleksu Nelder-Meada	44
3.1.2 Algorytmy genetyczne	50
3.2 Metody gradientowe	54
3.2.1 Podstawowe metody optymalizacji gradientowej	54
3.2.2 Metoda SNOPT	57

3.3 Minimalizacja funkcji z ograniczeniami i bez ograniczeń	58
4. Optymalizacja topologii i problem odwrotny	61
4.1 Optymalizacja topologii	62
4.1.1 model SIMP	63
4.1.2 model RAMP	65
4.2 Zastosowanie MES w optymalizacji topologii	66
4.3 Wpływ siatki elementów skończonych na rozwiązanie	67
4.4 Regularyzacja	69
5. Modelowanie właściwości termicznych i dynamicznych w materiałach kompozytowych	72
5.1 Właściwości termiczne materiałów	72
5.1.1 Równanie Fouriera	73
5.1.2 Warunki brzegowe	73
5.1.3 Całkowita energia termiczna	74
5.2 Właściwości dynamiczne materiałów	75
5.2.1 Związki konstytutywne - uogólnione prawo Hooke'a	75
5.2.2 Równanie ruchu Navier'a-Cauchy'ego	79
5.2.3 Częstotliwości własne i postacie drgań własnych	80
5.2.4 Całkowita energia odkształcenia	81
6. Wykorzystanie metod bezgradientowych w problemach termicznych	83
6.1 Rekonstrukcja parametrów termicznych w modelu 1D	83
6.1.1 Etap I	83
6.1.2 Etap II	84
6.2 Rekonstrukcja parametrów termicznych dla wymiany ciepła w domenie 2D	86
6.3 Podsumowanie wyników	89
7. Optymalizacja struktury kompozytu	90
7.1 Optymalizacja bez regularyzacji	91
7.1.1 Maksymalizacja i minimalizacja średniej wartości temperatury	91
7.1.1.1 Model kompozytu zdefiniowany na obszarze pierścienia	92
7.1.1.2 Model kompozytu zdefiniowany na obszarze kwadratowym z wyciętym obszarem kwadratowym	93
7.1.1.3 Model kompozytu zdefiniowany na obszarze kwadratowym z zadany	

warunkiem brzegowym Fouriera w postaci parametrycznej	95
7.1.1.4 Porównanie wyników obliczeń	97
7.1.2 Minimalizacja średniej wartości temperatury oraz modułu gradientu temperatury	100
7.1.2.1 Model kompozytu zdefiniowany na obszarze kwadratowym z zadaną gęstością mocy źródła ciepła	101
7.1.2.2 Model kompozytu zdefiniowany na obszarze kwadratowym z zadanymi warunkami brzegowymi Fouriera i Dirichleta	103
7.1.2.3 Porównanie wyników obliczeń	104
7.2 Wpływ regularyzacji na wyniki optymalizacji struktury kompozytu	108
7.3 Wpływ siatki elementów skończonych na wyniki optymalizacji struktury kompozytu	109
7.4 Wpływ parametru kary p metody SIMP na wyniki optymalizacji struktury kompozytu	111
8. Optymalizacja struktury układów typu sandwich	113
8.1 Wpływ przewodności cieplnej na strukturę płyty typu sandwich	114
8.2 Minimalizacja średniej wartości energii termicznej i średniej wartości energii odkształcenia - wariant 1	119
8.2.1 Wyniki obliczeń dla $A_{frac} = 0.2$	121
8.2.2 Wyniki obliczeń dla $A_{frac} = 0.4$	125
8.2.3 Wyniki obliczeń dla $A_{frac} = 0.6$	129
8.3 Minimalizacja średniej wartości energii termicznej i średniej wartości energii odkształcenia - wariant 2	132
8.3.1 Wyniki obliczeń dla $A_{frac} = 0.2$	133
8.3.2 Wyniki obliczeń dla $A_{frac} = 0.4$	134
8.3.3 Wyniki obliczeń dla $A_{frac} = 0.6$	136
9. Właściwości dynamiczne struktur termicznie optymalnych	138
9.1 Wyznaczenie częstości własnych	140
9.2 Odpowiedź układu na wymuszenie harmoniczne i postacię drgań własnych	141
9.3 Właściwości efektywne	148
10. Podsumowanie i wnioski	150
Literatura	154
Załącznik 1	166

Streszczenie

Praca poświęcona jest modelowaniu i analizowaniu właściwości dynamicznych materiałów kompozytowych termicznie optymalnych. Optymalizacja została przeprowadzona dla modeli 1D i 2D o różnych kształtach i z różnymi warunkami brzegowymi. Obliczenia wykonano przy pomocy algorytmów hybrydowych. Dla modelu 1D wykorzystano połączenie algorytmu Nelder-Meada z metodą elementów skończonych, natomiast do analizy modeli 2D użyto połączenia metody optymalizacyjnej SNOPT z metodą elementów skończonych. Wyniki optymalizacji dla modeli 2D płyt kompozytowych typu sandwich zostały porównane z wynikami dla modeli płyt warstwowych. Wszystkie symulacje przeprowadzono w programie COMSOL Multiphysics. W pracy wykazano, że możliwe jest zaprojektowanie struktury kompozytu dwufazowego, którego właściwości takie jak: średnia wartość temperatury, średnia wartość modułu gradientu temperatury, średnia wartość energii odkształcenia, średnia wartość energii termicznej, są lepsze niż w klasycznych kompozytach warstwowych (laminatach). Ponadto po otrzymaniu struktury kompozytu termicznie optymalnego możliwe jest przeprowadzenie analizy jej właściwości dynamicznych takich jak: wyznaczenie częstości własnych, wykreślenie amplitudy drgań własnych oraz wykreślenie postaci drgań własnych dla poszczególnych częstości własnych.

Abstract

The work is devoted to modeling and FEM analysis of dynamic properties of thermally optimal composite materials. The optimization was performed for 1D and 2D models with different shapes and different boundary conditions. A hybrid algorithms were implemented in numerical calculations. In 1D model the Nelder-Mead algorithm and FEM was used, whereas in 2D model the SNOPT and FEM was used. Optimization results for 2D models of composite plate in sandwich type were compared with numerical results for laminates. All simulations were performed in COMSOL Multiphysics. The work shown that it is possible to design a two-phase composite structure, which parameters such as: the average value of temperature, the average magnitude of temperature gradient, the average value of strain energy and the average value of thermal energy are better than in classical layer composite (laminates). Furthermore, after receiving the structure of the thermally optimal composite it is possible to perform the analysis of dynamic properties such as determination of: the eigenfrequency, the frequency response and mode shapes for the particular eigenvalue.

1. Wstęp

1.1 Wprowadzenie

Modelowanie i analizowanie właściwości nowych materiałów kompozytowych jest często trudne i kosztowne. Dużym wsparciem stały się metody obliczeniowe, które znaczenie ułatwiają wyznaczanie właściwości materiałów i dają większe możliwości. Modelowanie numeryczne łączy dziedziny matematyki, fizyki i informatyki do badania zachowań złożonych układów za pomocą symulacji komputerowych. Model obliczeniowy zawiera często wiele zmiennych, które opisują badany układ. Symulacja odbywa się poprzez modyfikowanie wartości tych zmiennych i obserwowanie w jaki sposób te zmiany wpływają na wyniki. Uzyskane wyniki symulacji umożliwiają przewidywanie zachowania się układu rzeczywistego. Główną zaletą modelowania numerycznego jest możliwość uzyskania rozwiązania danego problemu, który w przeciwnym razie należałoby rozwiązać za pomocą metod doświadczalnych. Ponadto symulacja komputerowa bywa jedyną rozsądną alternatywą analizy zjawiska tam, gdzie budowa wiarygodnego modelu analitycznego oraz wykonanie eksperymentu jest niemożliwe lub bardzo trudne [Hee1990], [Tab1996], [Mur2010], [www05], [Kue2009].

Nowoczesne metody numerycznego modelowania materiałów kompozytowych wykorzystują takie dziedziny nauki jak materiałoznawstwo, metody obliczeniowe czy matematykę stosowaną. Angażują coraz bardziej zaawansowane i precyzyjne metody i urządzenia do rozwiązania problemów z zakresu inżynierii praktycznej jak również zagadnień fizycznych. Komercyjne programy obliczeniowe oparte na metodach numerycznych, jak na przykład na Metodzie Elementów Skończonych umożliwiają wizualizację zagadnień fizycznych i mechanicznych oraz wprowadzanie, w postaci losowych zmiennych, zaburzeń (niepewności) do danych wykorzystywanych w symulacjach komputerowych [Kam2004].

Najnowsze techniki komputerowe wspomagają projektowanie, umożliwiają modelowanie różnych materiałów o różnych kształtach oraz optymalizację ich parametrów. W szybki sposób można również modyfikować dane obliczeniowe a następnie porównać wyniki w celu uzyskania najbardziej optymalnego. Mimo że obliczenia bywają czasochłonne, znacznie wpływają na obniżenie kosztów

projektowania, produkcji czy eksploatacji materiału kompozytowego. W związku z powyższym modelowanie numeryczne jest dziś jedną z najbardziej obiecujących i rozwijających się dziedzin inżynierii. Znajduje ono swoje zastosowanie w wielu dziedzinach nauki od medycyny po przemysł wojskowy.

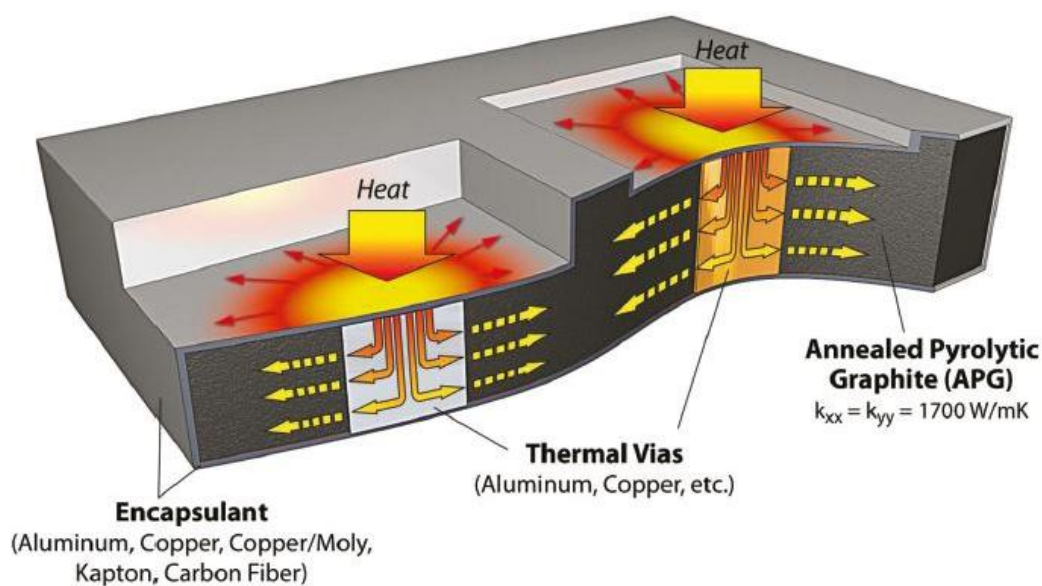
Przykładem może być przemysł transportowy, w którym redukcja wagi pojazdu o 10 procent, dzięki wykorzystaniu nowoczesnych materiałów, zmniejsza zużycie paliwa od 6 do 8 procent. Z tego powodu w Stanach Zjednoczonych w ostatnich latach przeznaczono duże nakłady finansowe na badania i rozwój metali oraz stopów metali [Ced2013].

Innym przykładem jest zastosowania modelowania numerycznego jest zaprojektowanie materii programowalnej. Przy użyciu drukarek 3D wykonywane są przedmioty, których części składowe łączy polimer zmieniający kształt, dzięki reakcji materiałów składowych na ogrzewanie lub chłodzenie. W 2014 roku armia amerykańska przeznaczyła prawie milion dolarów na badania poświęcone stworzeniu dynamicznego kamuflażu przy wykorzystaniu techniki druku 4D. Z materii programowalnej mogłyby powstać np. mundury zapewniające izolację lub chłodzenie w zależności od warunków środowiska oraz od cech biometrycznych użytkownika munduru [Cam2014].

Modelowanie numeryczne stosowane jest również w zagadnieniach medycznych i biomedycznych. Naukowcy opracowują modele mechaniki naczyń krwionośnych, zastawek serca i przepływu krwi. Przygotowane modele służą na przykład do optymalizacji konstrukcji urządzeń implantowanych takich jak sztuczne zastawki serca czy stenty naczyń wieńcowych. Za pomocą metod obliczeniowych opracowywane są narzędzia decyzyjne dla lekarzy, które wspomagają leczenie chorób układu krążenia w oparciu o szczegółową analizę cech każdego pacjenta. Przykład analizy numerycznej pęknięcia blaszek miażdżycowych ludzkiej tętnicy szyjnej wywołanego naprężeniami strukturalnymi został opublikowany przez Tang i współautorów [Tan2009].

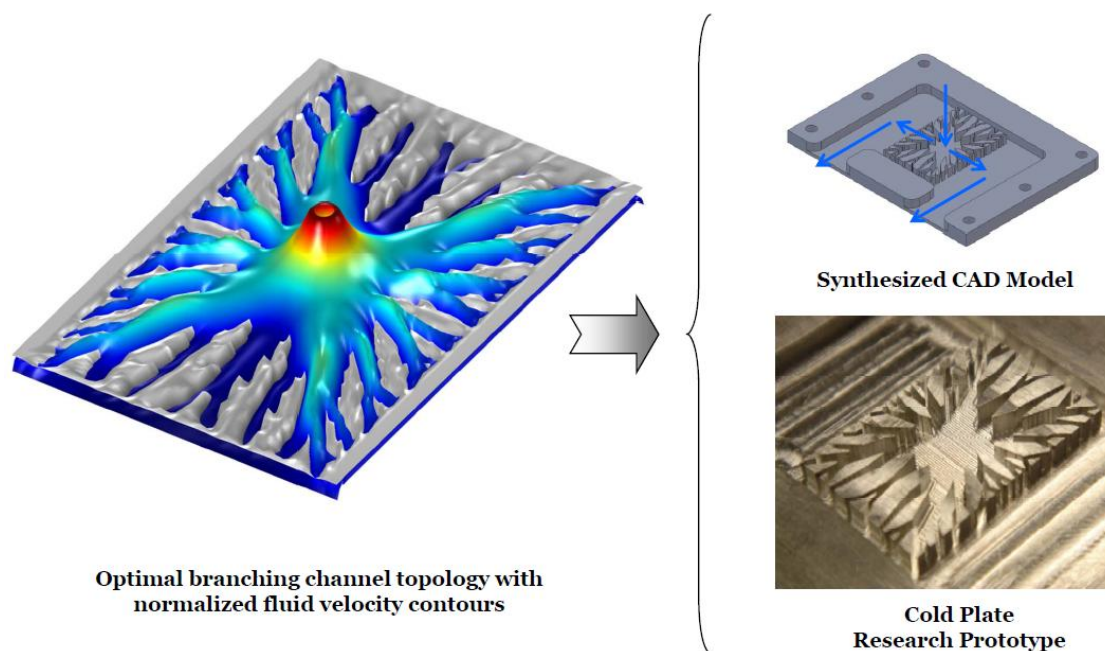
Kolejnym przykładem jest wykorzystanie modelowania numerycznego do projektowania i konstruowania materiałów APG (ang. Annealed Pyrolytic Graphite) – wyżarzany grafit pirolityczny – w postaci struktury obudowanej materiałami takimi jak np. aluminium, miedź i ceramika [Mon2013].

Takie jak i inne kompozyt są wykorzystywane w przemyśle wojskowym i lotniczym, gdzie końcowy produkt musi spełniać określone, restrykcyjne wymogi. Urządzenia termiczne w systemach wojskowych muszą być małe i kompaktowe z uwagi na rygorystyczne ograniczenia masy i objętości. Potrzeby w zakresie konserwacji muszą być ograniczone do minimum. Przykład budowy materiału APG przedstawiono na rysunku 1.1.1. Materiał został bardziej szczegółowo opisany w rozdziale 2.4.2 pracy.



Rys. 1.1.1 Przykład budowy materiału APG [Mon2013]

Metody numerycznego modelowania materiałów kompozytowych są także wykorzystywane w projektowaniu i konstruowaniu optymalnych struktur chłodzenia lub zaawansowanych radiatorów, do regulacji termicznej rosnącej liczby elementów urządzeń elektronicznych stosowanych w instalacji elektrycznej pojazdów hybrydowych Toyoty. Dede i współpracownicy wykonali symulacje i opracowali wielobiegowy, rozgałęziony radiator do chłodzenia urządzeń elektronicznych przy dużym strumieniu ciepła [Ded2012]. Na rysunku 1.1.2 przedstawiono wyniki symulacji w postaci optymalnego rozkładu mikro-kanalików radiatora, model CAD oraz prototyp [Dag2012].



Rys. 1.1.2 Wyniki symulacji w postaci optymalnego rozkładu mikro-kanalików radiatora, model CAD oraz prototyp [Ded2012]

Przedstawione powyżej przykłady oraz podobne stały się inspiracją i motywacją do zaprojektowania dwufazowych kompozytów o optymalnych właściwościach termicznych (tzw. kompozytów termicznie optymalnych) a w dalszej części do analizy ich właściwości. Pierwszym krokiem w badaniach opisywanych w tej rozprawie jest znalezienie kompozytu termicznie optymalnego, czyli takiego, którego właściwości spełniają określoną funkcję celu (kompozyt charakteryzuje się określonymi zadanymi właściwościami). Jego strukturę uzyskuje się przy wykorzystaniu metod optymalizacyjnych. Kompozyt optymalny najczęściej uzyskujemy na drodze minimalizacji lub maksymalizacji zadanej funkcji celu. W przypadku kompozytu optymalnego termicznie mowa jest o właściwościach termicznych. Kolejnym etapem jest analiza właściwości dynamicznych uzyskanego wcześniej kompozytu.

Zaproponowane w rozprawie metody oraz struktury kompozytowe o zadanych właściwościach termicznych lub termiczno-mechanicznych mogą znaleźć zastosowanie przy projektowaniu oraz konstruowaniu wspomnianych już wcześniej zoptymalizowanych urządzeń chłodzących (radiatorów), które znajdują swoje zastosowanie w regulacji termicznej elementów elektronicznych stosowanych w instalacjach elektrycznych [Ded2012].

Innym przykładem zastosowania zaprezentowanych struktur kompozytowych mogą być urządzenia elektroniczne gdzie istotna jest wysoka przewodność cieplna i niska gęstość jak również niski współczynnik rozszerzalności cieplnej [Mon2013].

Kolejnym przykładem są materiały budowlane takie jak cegły o zwiększonej izolacyjności, które jednocześnie mają zwiększoną wytrzymałość. Bloczki ceramiczne ze zintegrowaną izolacją cieplną wykonaną ze styropianu lub wełny mineralnej pozwalają stworzyć jednowarstwową konstrukcję (mur) o niskim współczynniku przenikania ciepła, dzięki czemu nie wymaga on dodatkowej, kosztownej izolacji [www06], [www07]. Również płyty warstwowe typu sandwich, z rdzeniem w postaci izolatora i okładzinami wykonanymi ze stali zabezpieczonej przed korozją, cieszą się dużym zainteresowaniem ze względu na zadowalający współczynnik ciepła, szybki i łatwy montaż, a także doskonałe właściwości fizyczne [www08]. Na uwagę zasługują również monolityczne kopuły (ang. Monolithic Domes), które są wykonywane z pianki poliuretanowej oraz prętów zbrojeniowych [www09]. Monolityczne kopuły są wykorzystywane między innymi jako obiekty mieszkalne.



Rys. 1.1.3 Monolityczna kopuła przeznaczona do celów mieszkaniowych, plaża Pensacola na Florydzie [www09]

Metody zaproponowane w rozprawie oraz struktury kompozytowe o zadanych właściwościach termicznych lub termiczno-mechanicznych mogą znaleźć zastosowanie również w zagadnieniach odzyskiwania energii. Przykładem są nowoczesne elektrody akumulatorów do odzyskiwania energii w przypadku małych różnic temperatury z wykorzystaniem efektu galwanicznego. Nowoczesne baterie mogą przejmować ciepło odpadowe i przekształcać je w energię elektryczną [Lee2014].

W dalszych podrozdziałach przedstawiono przegląd literatury dotyczący rozważanej w rozprawie tematyki. Ze względu na liczne publikacje znane autorce rozprawy, cytowane i omawiane pozycje literaturowe nie wyczerpują analizowanego problemu.

1.2 Przegląd literatury

W literaturze można znaleźć wiele przykładów metod optymalizacji, które umożliwiają ich zastosowanie w projektowaniu materiałów oraz konstrukcji o zadanych właściwościach. W tym celu wykorzystuje się algorytmy optymalizacyjne, jak np. algorytm Neldera-Meada [Nel1965], [Kus2009], algorytmy genetyczne (ang. Genetic Algorithms - GA) [Gol1998], [Siv2008], algorytmy ewolucji różnicowej (ang. Differential Evolution Algorithms - DE) [Ara2004], [Mic2003], programowanie kwadratowe (ang. Quadratic Programming - QP) [Fin1980], [Fle2000] i wiele innych.

1.2.1 Zastosowanie algorytmu Neldera-Meada w optymalizacji

Algorytm Neldera–Meada, który szczegółowo zostanie omówiony w podrozdziale 3.1.1, jest wykorzystywany do optymalizacji wielkoskalowej, optymalizacji bez ograniczeń lub wyznaczania parametrów. Mimo że został opublikowany w 1965 roku [Nel1965], nadal jest jednym z najpopularniejszych algorytmów stosowanych w optymalizacji bez ograniczeń [Pri2002], [Bur2005]. Jest często ulepszany lub modyfikowany na potrzeby konkretnego problemu obliczeniowego lub w celu zwiększenia zbieżności obliczeniowej [Pha2011], [Bur2005], [Han2009].

W artykule Luersen i współautorów [Lue2004a] przedstawiono zastosowanie algorytmu Neldera–Meada m.in. do wyznaczania optymalnej orientacji włókien wzmacniających osnowę w kompozycie warstwowym. Na potrzeby obliczeń

maksymalizowano siłę powodującą wyboczenie. Kolejny przykład wyznaczania optymalnej orientacji włókien wzmacniających osnowę w kompozycie warstwowym został przedstawiony w publikacji Luersen i współautorzy [Lue2004b], gdzie maksymalizowano sztywność wzdłużną E_x z ograniczeniami w postaci współczynnika Poissona i modułu Kirchhoffa.

Metodę hybrydową polegającą na połączeniu algorytmu Nelder-Meada z metodą elementów skończonych wykorzystaną do optymalizacji wielu zagadnień opisano w pracy Nienartowicz i współautora [Nie2012b]. Jako przykład zostały przedstawione wyniki symulacji wyznaczania parametrów termicznych dla jednowymiarowego zagadnienia (odcinka o długości 1 [m]) o zdefiniowanych warunkach brzegowych oraz dla osiowo symetrycznego modelu 2-D z wykorzystaniem materiału FGM (ang. functionally graded materials). W takich przypadkach metoda obliczeniowa może być skuteczną alternatywą do eksperymentalnego wyznaczania parametrów termicznych kompozytów, które jest drogie i czasochłonne.

Artykuł Hossein Ghiasi i współautorów [Hos2007] przedstawia zastosowanie ulepszonej metody optymalizacji globalnej przy wykorzystaniu algorytmu Nelder-Meada (ang. GBNM - Globalized Bounded Nelder-Mead) do optymalizacji wspornika w kształcie litery "Z" wykonanego z 16-warstwowego kompozytu strukturalnego. Autorzy porównali wyniki obliczeń z metodą przedstawioną w publikacjach Luersen i współautorów [Lue2004a] i [Lue2004b] oraz z wynikami optymalizacji za pomocą algorytmu ewolucyjnego wykazując, że zaproponowana przez nich metoda jest bardziej wydajna.

1.2.2 Zastosowanie algorytmów genetycznych w optymalizacji

Kolejną metodą często wykorzystywaną w optymalizacji są algorytmy genetyczne. Najpopularniejszą formą ich realizacji jest zapisanie kodu algorytmu genetycznego za pomocą liczb binarnych. Istnieją jednak problemy obliczeniowe, które korzystniej jest zakodować za pomocą liczb rzeczywistych (RGA – ang. real genetic algorithm) lub dziesiętnych. Nieustanny rozwój algorytmów genetycznych ma znaczący wpływ na wzrost ich efektywności [Gol1998], [Siv2008], [Mic2003].

W artykule Herrera i współautora [Her2000] zastosowano dodatkową, wewnętrzną pętlę w algorytmie genetycznym zakodowanym na liczbach rzeczywistych

i wykorzystano kontrolę wielkości kroku mutacji. Zaproponowana metoda zwiększyła niezawodność i dokładność algorytmu zapobiegając przedwczesnej zbieżności do optimum lokalnego.

Próbie poprawy wskaźnika konwergencji podjęto również w pracy Chen i współautorów [Che1999]. Algorytm genetyczny typu RGA wykorzystano do zoptymalizowania problemu nieliniowego mapowania. W tym celu wprowadzono dwa dodatkowe operatory genetyczne: operator zorientowanej mutacji oraz operator imigracji.

Algorytmy genetyczne są również stosowane do optymalizowania funkcji wielu zmiennych (w tym również parametrów materiałowych).

Zastosowanie algorytmu genetycznego do maksymalizacji sztywności płyty wykonanej z kompozytu warstwowego zostało zaprezentowane w publikacji Potgieter i współautora [Pot1998]. Za pomocą liczb rzeczywistych zakodowano zmienne odpowiadające orientacji włókien w kompozycie. Wyniki porównano z wynikami uzyskanymi z optymalizacji innymi metodami np. metodą algorytmu genetycznego zakodowanego za pomocą liczb binarnych.

Przewidywanie niepowodzenia korporacji stało się ważnym tematem badań w zakresie rachunkowości i finansów w ciągu ostatnich trzech dekad. Zastosowanie algorytmu genetycznego na liczbach rzeczywistych do optymalizacji parametrów maszyny wektorów nośnych może pomóc przewidzieć bankructwo korporacji [Wu2007]. W artykule podjęto próbę optymalizacji parametru regularyzacji C i parametru funkcji jądra σ , które muszą być starannie dobrane, aby utworzyć wydajny model maszyny wektorów nośnych (SVM). W tym celu połączono algorytm genetyczny z modelem SVM, dzięki czemu optymalne parametry C i σ , są wyznaczone automatycznie.

W artykule Bessaou i współautora [Bes2001] za pomocą algorytmu genetycznego zakodowanego liczbami rzeczywistymi zoptymalizowano funkcję wielu zmiennych. Uzyskane wyniki porównano z wynikami dla 7 innych algorytmów stosowanych w optymalizacji.

Algorytmy genetyczne mogą służyć do oszacowania parametrów kinetycznych i energetycznych w modelach chemicznych [Bal2000]. W tym celu zastosowano algorytm hybrydowy, uzyskany w wyniku połączenia algorytmu genetycznego

zakodowanego na liczbach dziesiętnych z metodą lokalnej zbieżności. Algorytm genetyczny wykrywa najbardziej odpowiednie strefy w przestrzeni parametrów, natomiast metoda lokalnej zbieżności szybko ustala względne minimum w strefie.

Artykuł Orantka i współautora [Ora2006] jest poświęcony zastosowaniu obliczeń ewolucyjnych w zagadnieniach optymalizacji i identyfikacji w niepewnych warunkach losowych. Algorytm jest oparty na stochastycznej reprezentacji danych. Chromosomy są reprezentowane przez wielowymiarowe wektory losowe składające się z losowych genów w postaci niezależnych losowych zmiennych z funkcją gęstości prawdopodobieństwa Gaussa.

1.2.3 Zastosowanie algorytmów hybrydowych w optymalizacji

W literaturze występują również metody łączenia ze sobą algorytmów, które nazywamy algorytmami hybrydowymi. Przykład połączenia algorytmu Neldera–Meada z algorytmem genetycznym został zaprezentowany przez Mase [Mas2009], który wykorzystał tę metodę do optymalizacji warunku brzegowego zapisanego w postaci operatora p-Laplacea. Obliczenia zostały wykonane przy użyciu metody elementów skończonych, a wyniki porównano z innymi metodami obliczeniowymi.

W artykule Burczyńskiego i współautora [Bur1999] zaproponowano połączenie algorytmów genetycznych z gradientowymi w jeden algorytm hybrydowy, a wyniki badań porównano z wynikami dla algorytmu genetycznego. Testy obliczeniowe wykazały, że zaproponowany algorytm jest zbieżny do optimum globalnego w bardzo szybki sposób dzięki operatorowi gradientowemu, a otrzymane wyniki są dokładniejsze.

Połączenie algorytmu genetycznego (GA) z algorytmem roju cząstek (PSO) omówiono w pracy Koa i współautora [Kao2008]. Dzięki tej technice nowe pokolenie jest generowane nie tylko za pomocą operacji krzyżowania i mutacji, typowych dla algorytmów genetycznych, ale także przy wykorzystaniu metody roju cząstek. Wyniki zostały porównane z wynikami uzyskanymi za pomocą czterech innych metod obliczeniowych, co wykazało, że połączenie GA z PSO daje lepsze rezultaty.

Algorytmy ewolucji różnicowej (DE) również są stosowane do optymalizacji funkcji wielu zmiennych. Przykład zastosowania został omówiony w publikacji Nienartowicz i współautora [Nie2012a]. Za pomocą algorytmu zminimalizowano

funkcję testową Rosenbrocka. Algorytm DE posłużył również do identyfikacji parametrów mechanicznych układu.

W artykule Długosza i współautora [Dłu2007] zaprezentowano optymalizację wielokryterialną wykonaną za pomocą algorytmów ewolucyjnych. Wykorzystany algorytm jest oparty na zasadzie Paterno i zastosowano go do optymalizacji radiatorów ciepła stosowanych do rozpraszania ciepła z urządzeń elektrycznych. Za pomocą metody elementów skończonych rozwiązano zagadnienie brzegowe dla termosprężystości.

1.2.4 Zastosowanie optymalizacji topologii

Bardzo ważnym problemem optymalizacyjnym jest poszukiwanie informacji na temat topologii, kształtu i rozmiaru rozważanej struktury. W celu znalezienia optymalnego rozłożenia materiału w danym obszarze stosuje się optymalizację topologii, która jest skuteczną metodą optymalizacji strukturalnej, łączącą metody numeryczne, zwykle metodę elementów skończonych (MES) z algorytmem optymalizacji.

W artykule Dede [Ded2009] wykorzystano połączenie metody ruchomych asymptot (ang. method of moving asymptotes -MMA) z MES do optymalizacji topologii. Zaawansowane konstrukcje urządzeń elektrycznych na etapie projektowania wymagają symulacji i optymalizacji z uwzględnieniem wielu procesów fizycznych. Autor uwzględnił procesy fizyczne takie jak: przewodzenie ciepła, konwekcja - dyfuzja oraz przepływ płynu opisany równaniem Naviera - Stokesa. Określenie optymalnej struktury materiału zostało wykonane dla modeli 2D i 3D.

Optymalizację topologii można również zastosować do projektowania płyt chłodzących. Przykładem jest projektowanie i tworzenie zoptymalizowanych struktur chłodzących, lub zaawansowanych radiatorów, do regulacji termicznej coraz większej liczby elementów elektronicznych stosowanych w instalacji elektrycznej pojazdów hybrydowych Toyoty [Dag2012]. Płyty z optymalnie zaprojektowanymi, równo rozgałęzionymi kanałami, równomiernie odprowadzają większość ciepła przy mniejszym spadku ciśnienia.

Artykuł Bendsoe i współautorów [Ben2005] przedstawia przegląd ostatnich osiągnięć w dziedzinie optymalizacji topologii. Opisane zagadnienia konstrukcyjne

obejmują kompozyty strukturalne (laminaty), projektowanie modeli obciążonych ciśnieniem, projektowanie przepływu płynów, projektowanie zagadnień akustycznych itp. Do obliczeń użyto MES w połączeniu z algorytmem optymalizacyjnym rozwiązującym problem programowania matematycznego. W celu opisanie relacji między gęstością i sztywnością materiału wykorzystano model SIMP (ang. Solid Isotropic Material with Penalization).

Metoda objętości skończonych (ang. finite volume method - FVM) została wykorzystana do optymalizacji topologii w zagadnieniach przewodzenia ciepła w publikacji Gersborg-Hansen i współautorów [Han2006]. Autorzy przedstawili zastosowanie FVM w zagadnieniach niehomogenicznego rozkładu materiałów, dla których średnia arytmetyczna i harmoniczna zostały wykorzystane do wyznaczenia unikalnej wartości przewodnictwa na granicach elementów.

W artykule Paulino i współautora [Pau2005] przedstawiono przykład zastosowania optymalizacji topologii w projektowaniu struktury materiału gradientowego (ang. functionally graded materials - FGM). Autorzy zaprezentowali rozkład materiału za pomocą "gradientu elementów skończonych" (ang. graded finite elements), dzięki czemu uzyskano ciągłą zmianę właściwości materiału, które są interpolowane wewnątrz elementów skończonych, za pomocą funkcji kształtu. W obliczeniach wykorzystano model SIMP.

Dwa inne przykłady optymalizacji topologii w materiałach gradientowych przedstawiono w publikacji Silvy i współautora [Sil2005]. Pierwszy dotyczył projektowania obszaru wykonanego z materiału FGM, w którym właściwości zmieniają się w pewnym kierunku zgodnie z określonym prawem. Prowadzi to do uzyskania struktury o asymetrycznych właściwościach sztywności. Drugim zagadnieniem było znalezienie optymalnego kierunku gradacji materiału w projektowanym obszarze.

1.2.5 Zastosowanie optymalizacji topologii w zagadnieniach termicznych

Obecnie największymi wyzwaniami w inżynierii cieplnej są: minimalizacja ciepła generowanego przez zaawansowane i coraz bardziej zminiaturyzowane urządzenia elektroniczne oraz odprowadzanie ciepła z układu. W tym celu również

można zastosować optymalizację topologii. Istnieje wiele przykładów badań nad analizą termiczną nowoczesnych materiałów.

Konstruowanie nowoczesnych materiałów jest wspierane przez symulacje i optymalizacje układów dla różnych procesów fizycznych, jak na przykład wymiana ciepła. W artykułach Nienartowicz i współautora [Nie2013a], [Nie2013b], [Nie2014a] omówiono optymalizację topologii, którą wykorzystano do optymalizacji średniej wartości temperatury i średniej wartości modułu gradientu temperatury w dwufazowym materiale kompozytowym. Kompozyt składał się z dwóch materiałów o różnych wartościach przewodności cieplnej. Zastosowano warunki brzegowe w postaci zadanej: izolacji termicznej, strumienia ciepła oraz temperatury. Symulacje zostały wykonane dla różnych kształtów w analizowanych modelach. Rozkład materiału w domenie został zamodelowany za pomocą modelu SIMP. Obliczenia wykonano przy wykorzystaniu metody elementów skończonych połączonej z algorytmem optymalizacyjnym SNOPT (ang. Sparse Nonlinear OPTimizer).

W publikacji Rao i współautora [Rao2012] przedstawiono analizę termiczną panelu typu sandwich (konstrukcja warstwowa składająca się z rdzenia połączonego z warstwami zewnętrznymi w postaci cienkich płyt) z rdzeniem w kształcie plastra miodu (o nazwie przemysłowej Inconel 617). Obliczenia wykonano dla dwóch rodzajów nagrzewnia powierzchniowego: panelu typu sandwich z rdzeniem w kształcie sześciokątnego plastra miodu oraz dla panelu typu sandwich z rdzeniem w kształcie czworokątnego plastra miodu. W celu znalezienia optymalnego rozkładu naprężeń, zarówno w warstwach powierzchniowych, jak i w rdzeniu panelu wykorzystano metodę elementów skończonych. Autorzy porównali wyniki efektywnej wymiany ciepła dla rdzeni w kształcie sześciokątnego i czworokątnego plastra miodu.

Optymalizacja kształtu wymienników ciepła pod obciążeniem termomechanicznym została opisana przez Długosza i współautorów [Dłu2006]. W celu znalezienia rozwiązania użyto ewolucyjnego algorytmu optymalizacyjnego. Wartość funkcji dopasowania została wyliczona za pomocą metody elementów skończonych. W celu zmniejszenia liczby parametrów projektowych w algorytmie ewolucyjnym kształt struktury został zamodelowany za pomocą krzywych Beziera.

W pracy Queheillalt i współautorów [Que2008] przedstawiono projekt wielofunkcyjnego kompozytu warstwowego typu sandwich. Rdzeń płyty został

zbudowany z krzyżowych elementów wykonanych ze stopu aluminium, które umożliwiają łatwe odprowadzenie pary lub płynów w kierunku poprzecznym, wewnątrz rdzenia. Każdy element rdzenia został pokryty warstwą niklu. W kolejnym kroku z wielofunkcyjnej płyty wykonano model rurki cieplnej. Zamodelowana rurka została wyprodukowana i zbadana eksperymentalnie, co potwierdziło jej korzystne właściwości termiczne wyznaczone w badaniach oraz symulacji (porównano odpowiedzi termiczne dla wyników uzyskanych z obliczeń za pomocą metody różnic skończonych i z wynikami z eksperymentu).

Nowa metoda, eksperymentalnego wyznaczania rozkładu strumienia ciepła przyłożonego za pomocą palnika po stronie parownika, została opisana przez Carbajal i współautorów [Car2006]. Rozkład strumienia ciepła został zamodelowany przy pomocy funkcji prawdopodobieństwa i danych eksperymentalnych. Badania zostały przeprowadzone dla płaskiej rurki cieplnej wykonanej z kompozytu warstwowego z rdzeniem zbudowanym z krzyżowych elementów wykonanych ze stopu aluminium pokrytych warstwą niklu. W obliczeniach numerycznych wykorzystano metodę objętości skończonych.

Inny przykład analizy termicznej struktury wykonanej z nowoczesnych materiałów przedstawili Tian i współautorzy w pracy [Tia2007]. W pracy przedstawiono wyniki badań teoretycznych i eksperymentalnych wykonanych dla wymiennika krzyżowego wykonanego z kompozytu strukturalnego z rdzeniem w postaci okresowej włóknistej struktury komórkowej. Wymiennik został poddany wymuszonej konwekcji ze środkiem chłodzącym zarówno w postaci powietrza jak i wody. Dla obu przypadków zmierzono opór przepływu oraz szybkość wymiany ciepła uwzględniając rozkład komórek, ułamek objętościowy porów oraz właściwości materiałowe (wysoka przewodność cieplna miedzi i niska przewodność cieplna stali nierdzewnej).

W artykule Wen i współautorów [Wen2006] przedstawiono wyniki analizy numerycznej i eksperymentalnej wykonanej dla przepływu ciepła i spadku ciśnienia w płycie warstwowej z metalowym rdzeniem w kształcie plastra miodu. Jedna płaszczyzna płyty została podgrzana za pomocą stałego strumienia ciepła i ochłodzona wymuszoną konwekcją. Analiza została przeprowadzona dla sześciu próbek wykonanych z dwóch materiałów o różnych wartościach przewodności cieplnej (stal

nierdzewna i miedź). Zbadano również wpływ kształtu komórek wykorzystując do tego celu próbki z rdzeniem w kształcie komórek kwadratowych, w kształcie rombu, w kształcie trapezu oraz w kształcie sześciokątnym.

Tian i współautorzy w pracy [Tia2004] zbadali eksperymentalnie wydajność termiczno-hydrauliczną radiatora pod wpływem konwekcji wymuszonej. Radiator wykonano z kompozytu warstwowego składającego się z rdzenia w postaci kratownicy z wbudowanymi rurkami cieplnymi. Kratownica została wykonana ze stali nierdzewnej, a rdzeń połączono w sposób adhezyjny z płytami wykonanymi z miedzi. Wyniki dla spadku ciśnienia i przepływu ciepła, otrzymane w sposób eksperymentalny dla funkcji liczby Reynoldsa zależnej od wybranej wartości wchodzącego strumienia ciepła, porównano z wynikami otrzymanymi dla struktury typu sandwich z rdzeniem wykonanym z metalowych włókien ciągłych tkanych.

W artykule Kasen i współautorów [Kas2009] przedstawiono metody wyznaczania strumienia ciepła, temperatury i naprężeń termicznych w pojazdach "hypersonic" z ostrą krawędzią natarcia, które są wyposażone w zintegrowaną płaską rurkę cieplną. Obliczenia zostały wykonane przy użyciu metody elementów skończonych.

Metoda wyznaczania efektywnej przewodności cieplnej i oporności elektrycznej w tkaninach, przy wykorzystaniu metody elementów skończonych została opisana w publikacji Siddiquia i współautora [Sid2013]. Wykorzystując SEM (ang. scanning electron microscope) powtarzająca się jednostka komórki tkaniny była analizowana stosując różne warunki brzegowe. Uzyskane wartości przewodzenia cieplnego i oporności elektrycznej badanej tkaniny porównano z danymi eksperymentalnymi. Przeanalizowano wpływ przewodności cieplnej włókna zależnej od temperatury oraz udział objętościowy włókien na przewodność cieplną tkaniny.

W pracy Leung i współautorów [Leu2013] zaprezentowano modelowanie analityczne i charakterystykę przewodnictwa cieplnego w kompozycie przewodzącym ciepło, który został wypełniony cząstkami sferycznymi. Autorzy opisali potencjalne rozwiązania w dziedzinie rozwoju nowoczesnych kompozytów polimerowych, które posiadają wysoką przewodność cieplną oraz wysoką oporność elektryczną. Na potrzeby badań zaprojektowano analizator przewodności cieplnej, który mierzył przewodność cieplną kompozytu posiadającego heterogeniczną strukturę. W kolejnym kroku

stworzono model analityczny, który wykorzystano do symulowania wpływu zawartości cząstek sferycznych na przewodność cieplną kompozytu.

Komputerowa symulacja przepływu ciepła przez ciecz ferromagnetyczną została przedstawiona w pracy Jopka i współautora [Jop2007]. Obliczenia przeprowadzono w programie COMSOL z wykorzystaniem modułu CFD, do którego wprowadzono zmiany umożliwiające symulację przepływu w kanale między dwoma równoległymi, płaskimi płytami. Płyn ferromagnetyczny poddano działaniu magnetycznego dipola, którego źródło umieszczono poniżej kanału.

Metoda elementów skończonych została użyta do analizy stacjonarnego zagadnienia przewodzenia ciepła i naprężeń termicznych w kompozycie strukturalnym w pracy Yang i współautorów [Yan2011]. Kompozyt o nazwie EFBF składał się z trzech warstw. Pierwsza warstwa była wykonana z metalu (Ti-6Al-4V), druga z materiału gradientowego FGM, a trzecia z materiału ceramicznego (ZrO₂).

W pracy Jopka i współautora [Jop2011] zaprezentowano połączenie metody elementów skończonych z algorytmem genetycznym (FEM-GA), którą wykorzystano do wyznaczania rozkładu włókien w kompozycie o maksymalnej, minimalnej lub wymaganej wartości przewodności cieplnej.

Modelowanie i analiza MES właściwości dynamicznych dwufazowego kompozytu termicznie optymalnego zostały przedstawione w artykule Nienartowicz i współautora [Nie2014b]. Symulacje wykonano dla modeli 2D. W pierwszym etapie przeprowadzono minimalizację średniej wartości energii termicznej. Następnie wykonano analizę właściwości dynamicznych struktur zoptymalizowanych ze względu na właściwości termiczne. Obliczenia umożliwiły wyznaczenie częstości własnych oraz postaci drgań własnych badanej struktury. Parametry badanej struktury zostały zamodelowane za pomocą schematu interpolacyjnego SIMP. Do optymalizacji wykorzystano algorytm SNOPT połączony z metodą elementów skończonych.

Połączenie algorytmu SNOPT z metodą elementów skończonych posłużyło również do optymalizacji kompozytu dwufazowego typu sandwich w publikacji Nienartowicz i współautora [Nie2014c]. Wykonano trzy różne rodzaje optymalizacji. Pierwszy polegał na minimalizacji średniej wartości energii termicznej, drugi dotyczył minimalizacji średniej wartości energii odkształcenia, a trzeci polegał na minimalizacji średniej wartości energii termicznej i energii odkształcenia jednocześnie.

1.2.6 Problem odwrotny w zagadnieniach termicznych

Przedstawione w powyższych rozdziałach przykłady zmuszały często do rozwiązania problemu odwrotnego, który polega na przekształceniu zaobserwowanych pomiarów w informację na temat obiektu fizycznego. Przykładem problemu odwrotnego może być rekonstrukcja właściwości termicznych modelu na podstawie znanych wartości temperatury wewnątrz modelu. Poniżej przedstawiono inne przykłady rozwiązywania problemu odwrotnego w zagadnieniach przepływu ciepła.

Problem odwrotny polegający na wyznaczeniu wartości przewodności cieplnej z nieliniowego równania ciepła został omówiony w pracy Lorenzi [Lor1987]. Z matematycznego punktu widzenia w opisanym przypadku należało traktować warunki brzegowe i warunki początkowe na tym samym poziomie, dlatego rozwiązywane zagadnienie było zależne od predefiniowanych warunków brzegowo-początkowych. Metoda została porównana z dwiema innymi metodami rozwiązywania zagadnienia.

Artykuł Mejias i współautorów [Mej1999] opisuje problem odwrotny identyfikacji trzech komponentów przewodności cieplnej k_1 , k_2 i k_3 w ortotropowym materiale zdefiniowanym w obszarze o kształcie sześcianu. Do obliczeń wykorzystano dwie wersje metody Levenberga - Marquarda oraz cztery różne wersje metody gradientu sprzężonego. Wybrane techniki zostały ze sobą porównane pod względem: redukcji funkcji celu, liczby iteracji, czasu CPU oraz dokładności oszacowanych parametrów.

Identyfikację nieliniowego współczynnika przewodności cieplnej przy użyciu metod gradientowych przedstawiono w pracy Borukhova i współautora [Bor2005]. Uwagę poświęcono problemowi odwrotnemu dla zagadnienia przewodzenia ciepła do wyznaczenia nieliniowego współczynnika $\lambda(T)$ bez jego skończenie wymiarowej aproksymacji.

Materiały gradientowe (FGM) charakteryzują się przestrzennie zróżnicowaną mikrostrukturą faz składowych i stopniową zmianą efektywnych właściwości w całym materiale. W związku z tym trudno jest określić ich właściwości. W publikacji Yin i współautorów [Yin2005] zaproponowano wielozakresową metodę modelowania, za pomocą której można wyznaczyć efektywną przewodność cieplną w dwufazowym, kompozytowym materiale gradientowym wzmocnianym cząstkami.

W artykule Guellal i współautorów [Gue2011] rozwiązano problem odwrotny przy użyciu metody gradientu sprzężonego. Obliczenia wykonano dla równania przewodzenia ciepła w jednowymiarowym, niehomogenicznym układzie ze zmienną przewodnością cieplną. W rezultacie wyznaczono wartość przewodności cieplnej w modelu wykonanym z materiału FGM.

Artykuł Majchrzaka i współautorów [Maj2007] opisuje połączenie metody gradientowej i metody elementów brzegowych oraz jej wykorzystanie do rozwiązania parametrycznego problemu odwrotnego. Autorzy znając pole temperatury rozważanej domeny wyznaczyli przewodność cieplną zależną od temperatury. Rozważano niestacjonarny przypadek dla problemu 1D.

Wyznaczanie kontaktowego oporu cieplnego w jednokierunkowo wzmocnionym kompozycie jest rozważane w artykule Mierzwiczak i współautora [Mie2013]. Tak sformułowane zagadnienie jest traktowane jako problem odwrotny przewodzenia ciepła w materiale niehomogenicznym. Przewodność cieplna włókien i osnowy oraz ułożenie włókien były znane.

1.3 Motywacja, cel i teza pracy

Motywacja

Liczne projekty struktur kompozytów, płyt kompozytowych oraz paneli wielowarstwowych otrzymuje się przy wykorzystaniu metod optymalizacyjnych. Optymalizacja efektywnych właściwości tych struktur jest zagadnieniem złożonym i możliwym do wykonania jedynie z wykorzystaniem modelowania i obliczeń komputerowych. Struktury kompozytów gwarantujące pewne właściwości kompozytu (np. termiczne) nie muszą gwarantować innych właściwości kompozytu (np. mechanicznych) w wymaganych zakresach. Optymalizacja kilku właściwości kompozytów jednocześnie wymaga zastosowania optymalizacji wielokryterialnej. W przypadku zastosowania optymalizacji jednej tylko właściwości, konieczne jest zbadanie wpływu zmian struktury na inne właściwości.

Cele pracy

1. Zastosowanie projektowania obliczeniowego do uzyskania kompozytu lub struktury o wskazanych właściwościach termicznych. Wykazanie korzystniejszych właściwości

zaprojektowanych kompozytów w porównaniu z często wykorzystywanymi kompozytami warstwowymi jakimi są laminaty

2. Analiza właściwości dynamicznych kompozytu optymalnego termicznie. Porównanie właściwości dynamicznych kompozytów optymalnych termicznie z właściwościami laminatów.

3. Propozycja struktury płyty warstwowej z warstwą środkową wykonaną z kompozytu dwufazowego. Struktura ta pozwala uzyskać minimalną termiczną energię wewnętrzną przy zadanych warunkach brzegowych.

Teza pracy

Możliwe jest zaprojektowanie struktury kompozytu dwufazowego, którego właściwości takie jak: średnia wartość temperatury, średnia wartość modułu gradientu temperatury, średnia wartość energii odkształcenia, średnia wartość energii termicznej, są lepsze niż w klasycznych kompozytach warstwowym (laminatach). Dodatkowo po otrzymaniu struktury kompozytu termicznie optymalnego istnieje możliwość analizowania jej właściwości dynamicznych takich jak: wyznaczenie częstości własnych, wykreślenie amplitudy drgań własnych oraz wykreślenie postaci drgań własnych dla poszczególnych częstości własnych.

1.4 Układ pracy

W pracy przedstawiono modelowanie i analizę właściwości dynamicznych kompozytu optymalnego termicznie. W celu uzyskania kompozytu optymalnego termicznie wykonano szereg optymalizacji jego właściwości takich jak: średnia wartość temperatury, średnia wartość modułu gradientu temperatury, średnia wartość energii termicznej oraz średnia wartość energii odkształcenia. Optymalizację przeprowadzono dla modeli 1D i 2D o różnych kształtach i z różnymi warunkami brzegowymi. Obliczenia wykonano przy pomocy algorytmów hybrydowych. Dla modelu 1D wykorzystano połączenie algorytmu Nelder-Meada z metodą elementów skończonych, natomiast do analizy modeli 2D użyto połączenia metody optymalizacyjnej SNOPT z metodą elementów skończonych. Wyniki optymalizacji dla modeli 2D płyt kompozytowych typu sandwich zostały porównane z wynikami dla modeli płyt

warstwowych. Wszystkie symulacje przeprowadzono w programie COMSOL Multiphysics.

Praca składa się z dziesięciu rozdziałów, przeglądu literatury oraz załącznika z kodem programu obliczeniowego napisanym przez autorkę.

Rozdział drugi zawiera przegląd materiałów kompozytowych. Omówione są również właściwości termiczne i mechaniczne popularnych materiałów kompozytowych oraz sposób wyznaczania właściwości efektywnych kompozytów. Ponadto przedstawiono przykłady nowoczesnych kompozytów o specjalnych właściwościach termicznych.

W rozdziale trzecim przedstawiono podział metod optymalizacyjnych. Omówiono metody optymalizacyjne bezgradientowe i gradientowe. Szczegółowo opisano metodę sympleksu Nelder-Meada oraz metodę SNOPT, które wykorzystano do wykonania obliczeń optymalizacyjnych. W rozdziale tym opisano również minimalizację funkcji z ograniczeniami i bez ograniczeń.

Czwarty rozdział porusza tematykę optymalizacji topologii i problemu odwrotnego. W rozdziale przedstawiono przykłady schematów interpolacyjnych, za pomocą których można opisać właściwości materiałów. Omówione zostały modele schematów interpolacyjnych SIMP i RAMP. Dodatkowo przedstawione zostało zastosowanie MES w optymalizacji topologii. Opisano również wpływ siatki elementów skończonych oraz regularyzacji na wyniki optymalizacji.

Rozdział piąty zawiera teoretyczne podstawy modelowania właściwości termicznych i dynamicznych w materiałach kompozytowych. Omówiono w nim właściwości termiczne materiałów, równanie Fouriera, warunki brzegowe stosowane w zagadnieniach termicznych oraz wyznaczanie całkowitej energii termicznej. Następnie przedstawiono właściwości dynamiczne materiałów. Zaprezentowano związki konstytutywne (uogólnione prawo Hooke'a). Opisano równanie ruchu i obciążenia harmoniczne, częstotliwości własne i postacie drgań własnych oraz wyznaczanie całkowitej energii odkształcenia.

W rozdziale szóstym zaprezentowano wyniki numeryczne obliczeń wykonanych za pomocą metody hybrydowej polegającą na połączeniu algorytmu Nelder-Meada z metodą elementów skończonych, która może być wykorzystana w optymalizacji. Jako przykład zostały przedstawione wyniki symulacji wyznaczania parametrów termicznych

dla jednowymiarowego odcinka o jednostkowej długości ze zdefiniowanymi warunkami brzegowymi oraz osiowo symetrycznego modelu 2D, wykonanego z materiału FGM. Przedstawiona metoda obliczeniowa może być skuteczną alternatywą eksperymentalnego wyznaczania parametrów termicznych w strukturach kompozytowych.

Rozdział siódmy zawiera wyniki obliczeń, które zostały przeprowadzone przy wykorzystaniu metody elementów skończonych oraz metody optymalizacyjnej SNOPT z zastosowanym modelem SIMP. Celem obliczeń była optymalizacja średniej wartości temperatury, średniej wartości modułu gradientu temperatury i średniej wartości energii termicznej w modelu 2D kompozytu. Kompozyt składał się z dwóch różnych materiałów (z różnymi współczynnikami przewodności cieplnej). Rozważanymi materiałami były bizmut i mosiądz (stop 70% miedzi i 30% cynku). Każda z symulacji została przeprowadzona dla dwuwymiarowych modeli o różnych kształtach oraz z różnymi warunkami brzegowymi. Część powierzchni obszaru wykorzystanej do rozkładu drugiego materiału została określona za pomocą współczynnika A_{frac} , który przyjmuje odpowiednio wartości 0.1 lub 0.2 i 0.4.

Kolejny etap badań zaprezentowano w rozdziale ósmym. Celem badań numerycznych była minimalizacja energii termicznej i mechanicznej w płytach typu sandwich. Pierwszy wariant obliczeniowy dotyczył wpływu ilorazu przewodności cieplnej pierwszego materiału do przewodności cieplnej drugiego materiału. Drugi wariant obliczeniowy polegał na przeprowadzeniu obliczeń w przypadku, gdy optymalizowana jest całkowita energia termiczna albo całkowita energia odkształcenia oraz w przypadku, gdy optymalizowane są obie energie jednocześnie.

Otrzymane wyniki zostały porównane z wynikami uzyskanymi dla laminatów o takim samym udziale objętościowym materiałów jak w przypadku płyt typu sandwich.

Ostatni etap badań przedstawiono w rozdziale dziewiątym. Była nim analiza właściwości dynamicznych struktur termicznie optymalnych. Do obliczeń wykorzystano model płyty warstwowej typu sandwich, wykonanej ze stali i pianki poliuretanowej. W pierwszym kroku wykonano optymalizację struktury 2D, która pozwoliła uzyskać płytę kompozytową termicznie optymalną. W drugim kroku przeprowadzono analizę właściwości dynamicznych otrzymanej płyty. W celu zweryfikowania poprawności obliczeń wykonano również symulacje dla trzech

rodzajów płyt warstwowych. W rozdziale zamieszczono zestawienie wyników średniej wartości energii termicznej oraz wyznaczone częstości własne dla wszystkich płyt.

W kolejnym rozdziale przedstawiono podsumowanie oraz wnioski, a po nich wykorzystaną w rozprawie bibliografię. Praca zawiera ponadto załącznik z kodem programu wykorzystanym w obliczeniach, które posłużyły do uzyskania wyników zaprezentowanych w pracy w rozdziale szóstym. Kod programu zawiera stosowany algorytm hybrydowy łączący algorytm Nelder-Meada z metodą elementów skończonych. Kod został opracowany przez Autorkę rozprawy.

2. Materiały kompozytowe

2.1 Przegląd materiałów kompozytowych

Zarówno w literaturze światowej jak i krajowej trudno jest znaleźć jednoznaczną definicję materiałów kompozytowych. Wynika to z faktu, że do tej grupy materiałów zalicza się różne materiały złożone. Według encyklopedii PWN z 2000r.:

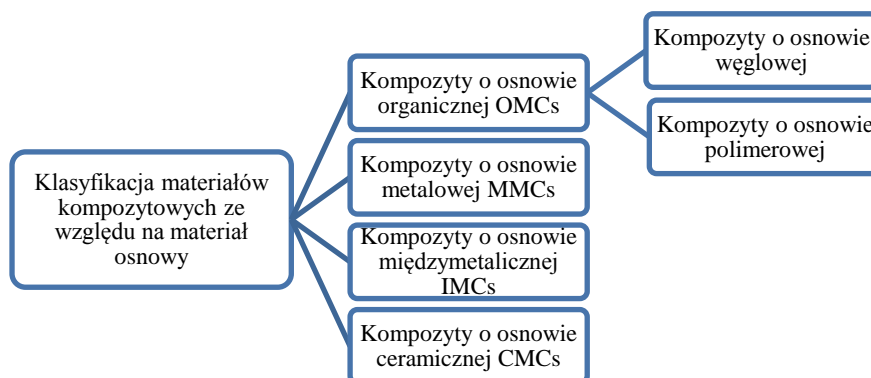
„kompozyt [łac. compositus ‘złożony’], materiał utworzony z co najmniej 2 komponentów (faz) o różnych właściwościach w taki sposób, że ma właściwości lepsze i/lub właściwości nowe (dodatkowe) w stosunku do komponentów wziętych osobno lub wynikających z prostego sumowania ich właściwości”.

Składniki materiałów kompozytowych nie rozpuszczają się w sobie, nie łączą się w inne elementy, ale oddziałują wspólnie, dzięki temu zachowują swoją tożsamość. Materiały kompozytowe zawierają najczęściej włókna lub cząsteczki faz i są sztywniejsze oraz bardziej wytrzymałe niż faza ciągła osnowy. Elementy wzmacniające zapewniają często dobrą przewodność cieplną, elektryczną oraz niższy współczynnik rozszerzalności cieplnej, a także dobrą odporność na zużycie. Istnieją również wyjątki jak np. polimery modyfikowane kauczukiem, w których faza nieciągła jest bardziej podatna i bardziej rozciągliwa niż sam polimer, co skutkuje zwiększeniem udarności. Innym przykładem są druty stalowe, które mogą być stosowane do wzmacniania żeliwa szarego w bębnach hamulcowych samochodów ciężarowych lub ciągników.

Materiały kompozytowe, jako materiały konstrukcyjne mają obecnie bardzo szerokie zastosowanie w wielu dziedzinach techniki. Są stosowane nie tylko w celu zapewnienia odpowiednich właściwości mechanicznych, ale również elektrycznych, trybologicznych, cieplnych, elektrycznych itp. W budownictwie wykorzystuje się pustaki ceramiczne, pustaki wypełniane wełną mineralną, płyty izolacyjne z rdzeniem z pianki poliuretanowej, beton, żelbet. Kolejnym przykładem jest przemysł lotniczy i astronautyka gdzie z kompozytów wykonane są elementy samolotów oraz raket i satelit. W produkcji części maszyn materiały kompozytowe używane są do wykonania np. obudowy silników maszyn, obudowy złącz kablowych. Również do produkcji sprzętu sportowego takiego jak: ramy rowerów, rakiety tenisowe, łodzie, narty, baseny ogrodowe powszechnie stosuje się kompozyty. Innym przykładem jest przemysł samochodowy, w którym elementy takie jak: karoseria, zderzaki samochodowe,

nadkola, spojlerzy czy błotniki mogą być wykonane z nowoczesnych materiałów. Materiały kompozytowe stosowane są również w medycynie do wytwarzania implantów.

Kompozyty można sklasyfikować na dwa sposoby. Pierwszy sposób to klasyfikacja ze względu na materiał osnowy, tak jak to zaprezentowano na rysunku 2.1.1. Drugi sposób, jak pokazano na rysunku 2.1.2, uwzględnia cechy geometryczne elementów wzmacniających, które mogą być wytwarzane z różnych materiałów [Dob2006].



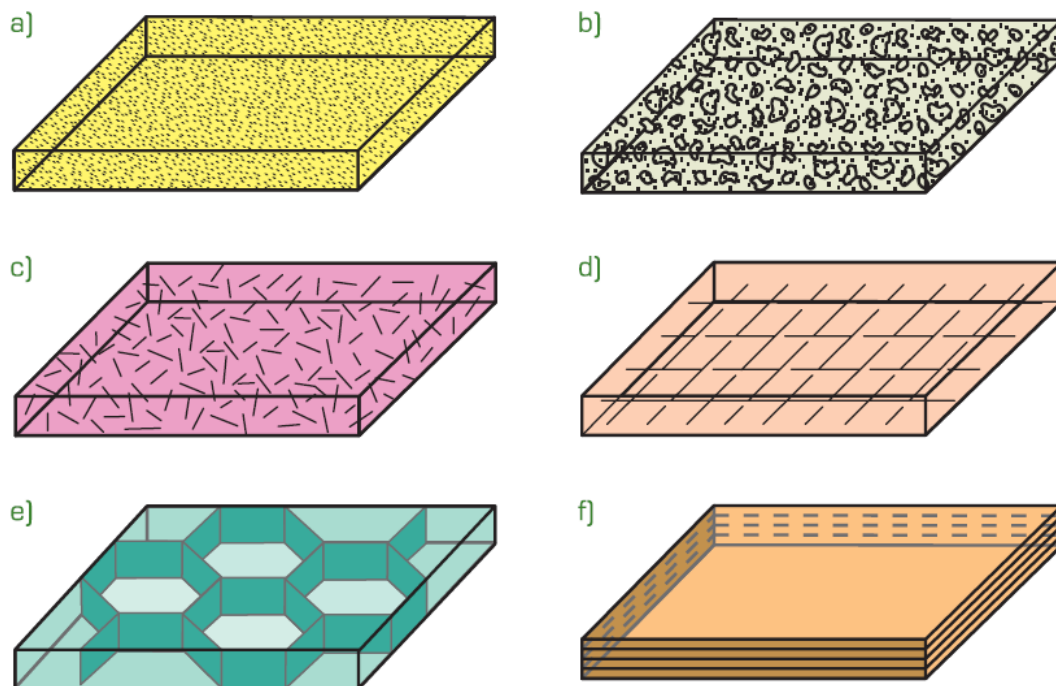
Rys. 2.1.1 Klasyfikacja materiałów kompozytowych ze względu na materiał osnowy [Dob2006]



Rys. 2.1.2 Klasyfikacja materiałów kompozytowych ze względu na rodzaj składników wzmacniających [Dob2006]

Własności materiałów kompozytowych można kształtować przez zmianę udziału, wielkości, kształtu, rozkładu i orientacji elementów wzmacniających. Można wyróżnić

kilka podstawowych rodzajów elementów wzmacniających materiały kompozytowe takich jak cząstki dyspersyjne, płatki, włókna nieciągłe, włókna ciągłe w postaci tkaniny, szkielety, warstwy (jak przedstawiono na rysunku 2.3).



Rys. 2.1.3 Przykłady rodzajów elementów wzmacniających materiały kompozytowe wzmacniane: a) cząstkami dyspersyjnymi, b) płatkami, c) włóknami nieciągłymi, d) włóknami ciągłymi w postaci tkaniny, e) szkieletowo, f) warstwowo (w laminatach) [Dob2006]

Na potrzeby pracy w dalszej części omówione będą materiały kompozytowe z różnymi składnikami wzmacniającymi.

2.1.1 Kompozyty wzmacniane cząstkami

Jak przedstawiono na rysunku 2.1.2 można wyróżnić dwa rodzaje kompozytów wzmacnianych cząstkami: utwardzane dyspersyjnie i wzmacniane dużymi cząstkami.

Pierwsze z nich są materiałami kompozytowymi, o osnowie metalowej, które mogą zawierać cząstki dyspersoidów, zwykle tlenków metali, o średnicy 10-250 [nm]. Cząstki rozmieszczone w osnowie mają wpływ na umocnienie osnowy, nawet jeśli nie są z nią koherentne, oraz zablokowanie ruchu dyslokacji. Cząstki nie mogą rozpuszczać się w osnowie, chociaż niewielka rozpuszczalność ma wpływ na poprawę przyczepności osnowy i dyspersoidów. Najczęstszą technologią wytwarzania

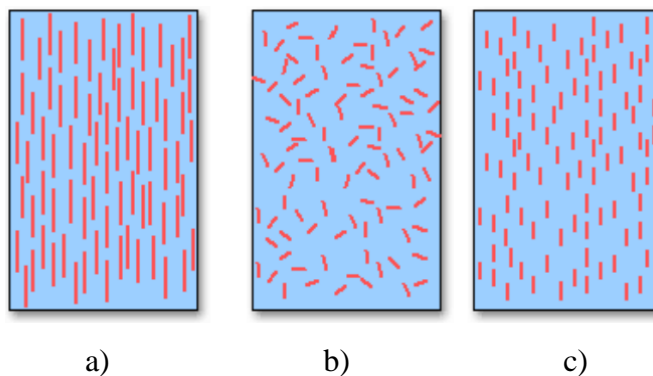
materiałów kompozytowych utwardzanych dyspersyjnie o osnowie metalowej jest metalurgia proszków.

Drugim przykładem są kompozyty wzmacniane dużymi cząstkami. W związku z relatywnie dużym rozmiarem cząstek wzmacniających i brakiem ich koherencji z metalową osnową, w przypadku tej grupy materiałów kompozytowych nie może nastąpić utwardzanie wydzielinowe (które występuje również w pozostałych grupach polimerowych materiałów z osnową ceramiczną lub organiczną). W przypadku tych materiałów uzyskuje się kombinację właściwości użytkowych, które są wynikiem oddziaływania osnowy jak i również rozmieszczonych w niej cząstek drugiej fazy. Cząstki te gwarantują często zwiększenie właściwości wytrzymałościowych.

Przykładem takich materiałów są cermetale, węgliki spiekane, inne spiekane materiały narzędziowe jak również materiały polimerowe, w których zastosowano wypełniacze np. wulkanizowany kauczuk wypełniony proszkiem z sadzy.

2.1.2 Kompozyty wzmacniane włóknami

Kompozyty wzmacniane są różnymi rodzajami włókien, takimi jak tkaniny, włókna ciągłe oraz włókna nieciągłe, w których wyróżnić można włókna zorientowane i rozmieszczone przypadkowo. Na rysunku 2.1.2.1 przedstawiono różnicę w rozkładzie włókien ciągłych, nieciągłych zorientowanych i nieciągłych rozmieszczonych przypadkowo w osnowie. Wzmacnianie kompozytu włóknami zapewnia zwiększenie wytrzymałości statycznej i zmęczeniowej oraz sztywności dzięki wprowadzeniu do miękkiej, ciągliwej osnowy włókien sztywnych, wytrzymałych ale zazwyczaj kruchych.



Rys. 2.1.2.1 Rozkład włókien: a) ciągłych, b) nieciągłych rozmieszczonych przypadkowo, c) nieciągłych zorientowanych rozmieszczonych w osnowie [www02]

W przemyśle stosuje się wiele materiałów wzmacniających. Pręty stalowe stosowane są do wytwarzania żelbetonu. W lotnictwie stosowane są powszechnie włókna szklane w osnowie polimerowej. Do wzmacniania materiałów kompozytowych z osnową polimerową, metalową, ceramiczną a nawet o składzie odpowiadającym fazom międzymetalicznym wykorzystuje się włókna węglowe, polimerowe, borowe i ceramiczne.

2.1.3 Kompozyty strukturalne

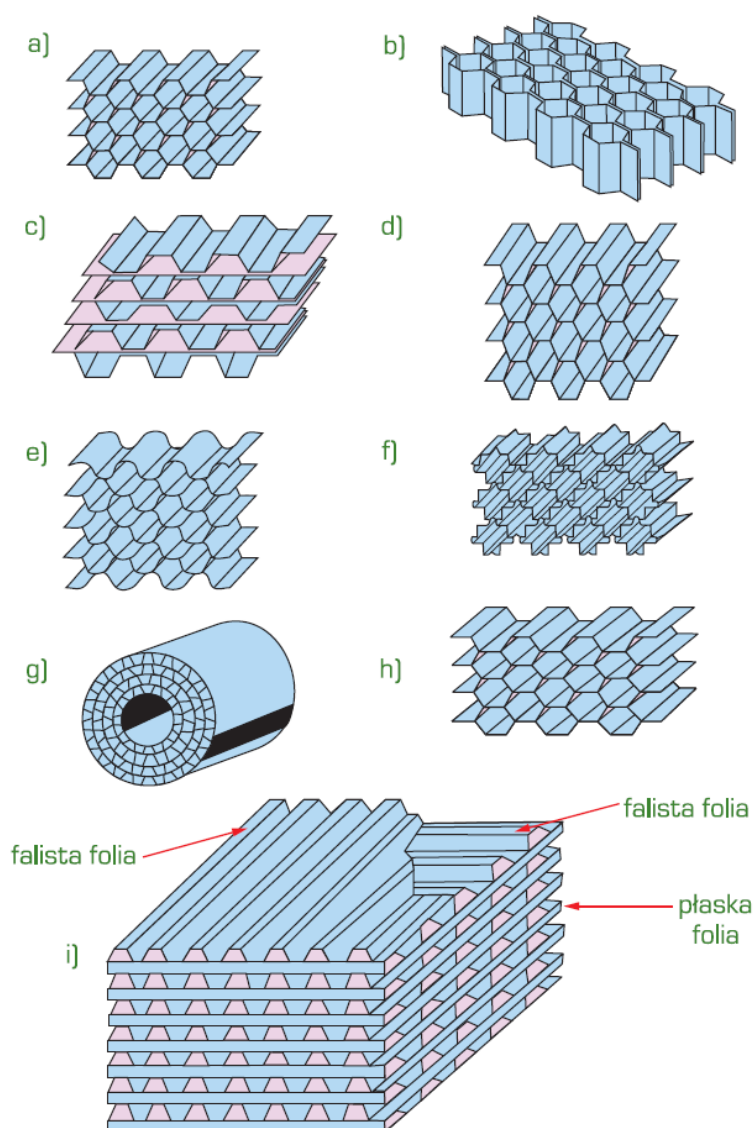
Wśród kompozytów strukturalnych wyróżnia się materiały kompozytowe warstwowe oraz materiały kompozytowe z rdzeniem z materiałów lekkich, nazywane również strukturami typu "sandwich".

Materiały kompozytowe warstwowe są najczęściej stosowanymi kompozytami konstrukcyjnymi. Ich wytwarzanie polega na połączeniu ze sobą kilku lub wielu warstw dwuwymiarowych płyt lub paneli, które posiadają wysokie właściwości izotropowe, uprzywilejowane w każdej z płyt składowych w jednym kierunku. Do wytwarzania kompozytów warstwowych używa się np. tkanin, dzianin lub naprzemianległych układów włókien ciągłych, które są wykorzystywane w materiałach kompozytowych łączonych odpowiednim materiałem osnowy. Osnową może być materiał polimerowy lub materiał utworzony przez odpowiednie ułożenie, połączenie i utwardzenie preimpregnatów [Dob2006]. Przykładami materiałów kompozytowych warstwowych są m.in. laminaty, bimetale, plater, grube warstwy ochronne oraz bardzo cienkie pokrycia.

Do wytwarzania kompozytów warstwowych stosuje się [Dob2006]:

- Łączenie adhezyjne – najczęściej do materiałów o osnowie polimerowej,
- Łączenie odkształceniowe (głównie walcowanie na gorąco, ale także i na zimno) – dla większości metalowych materiałów kompozytowych warstwowych,
- Łączenie lub platerowanie wybuchowe – do dużych płyt,
- Współosiowe wyciskanie - stosuje się w przypadku materiałów, które znacznie różnią się twardością, temperaturą topnienia lub mięknięcia,
- Lutowanie,
- Proces FFF (ang. foil-fibre-foil) – dla laminatów z osnową metalową.

Odrębną grupę kompozytów strukturalnych stanowią materiały kompozytowe z rdzeniem w kształcie plastra miodu lub wykonane z pianek wytworzonych z materiałów polimerowych, ceramicznych lub metalowych. W literaturze światowej ta grupa kompozytów występuje pod nazwą struktury sandwich'owe lub kompozyty typu sandwich (ang. sandwich – structured composites) [Car2010], [Zen1997], [Vin1999], [Fag2001], [Mag2012]. Na rysunku 2.1.3.1 przedstawiono przykłady układu komórek w rdzeniach o kształcie plastra miodu w materiałach kompozytowych warstwowych [Kin2001], [Dob2006], [Mag2013].

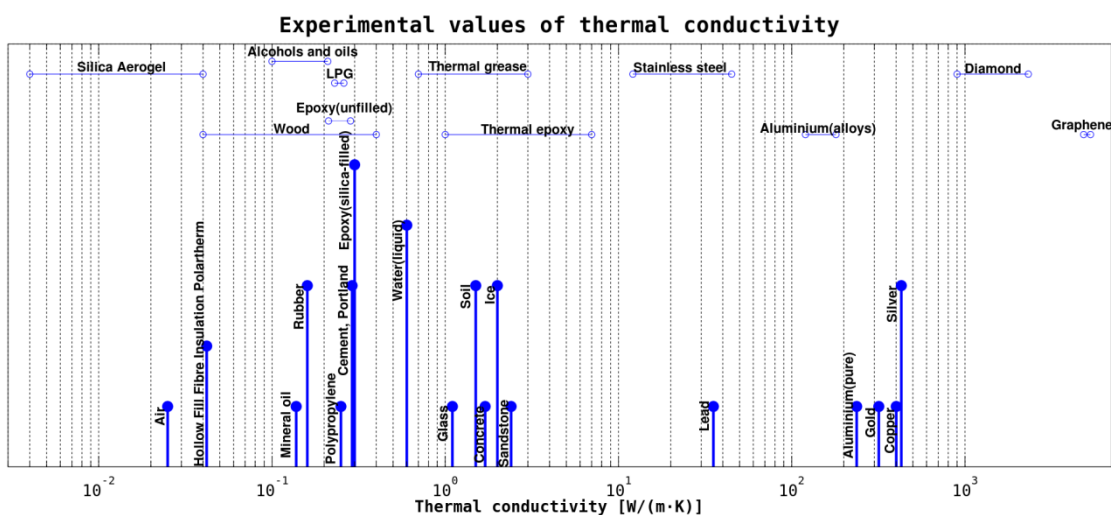


Rys. 2.1.3.1 Układy komórek w rdzeniach o kształcie plastra miodu w materiałach kompozytowych warstwowych [Dob2006]: a) i b) heksagonalny, c) heksagonalny wzmocniony, d) heksagonalny rozciągnięty, e) giętki, f) podwójny giętki, g) rurowy, h) wydłużony, i) krzyżowy

Struktury typu "sandwich", stosowane są w przemyśle, gdy potrzebny jest materiał konstrukcyjny o wysokiej sztywności ale posiadający niską masę. Lekką i silną konstrukcję uzyskuje się przez połączenie dwóch powłok o wysokiej wytrzymałości z lekkim rdzeniem. Powłoki zewnętrzne są odporne na naprężenia rozciągające i ściskające. Wykonywane są najczęściej z aluminium, tytanu, stali lub polimerów wzmacnianych włóknami. Rdzeń natomiast jest odporny na naprężenia ścinające i zazwyczaj wykonuje się go z pianki polimerowej lub plastrów metalu lub polimeru.

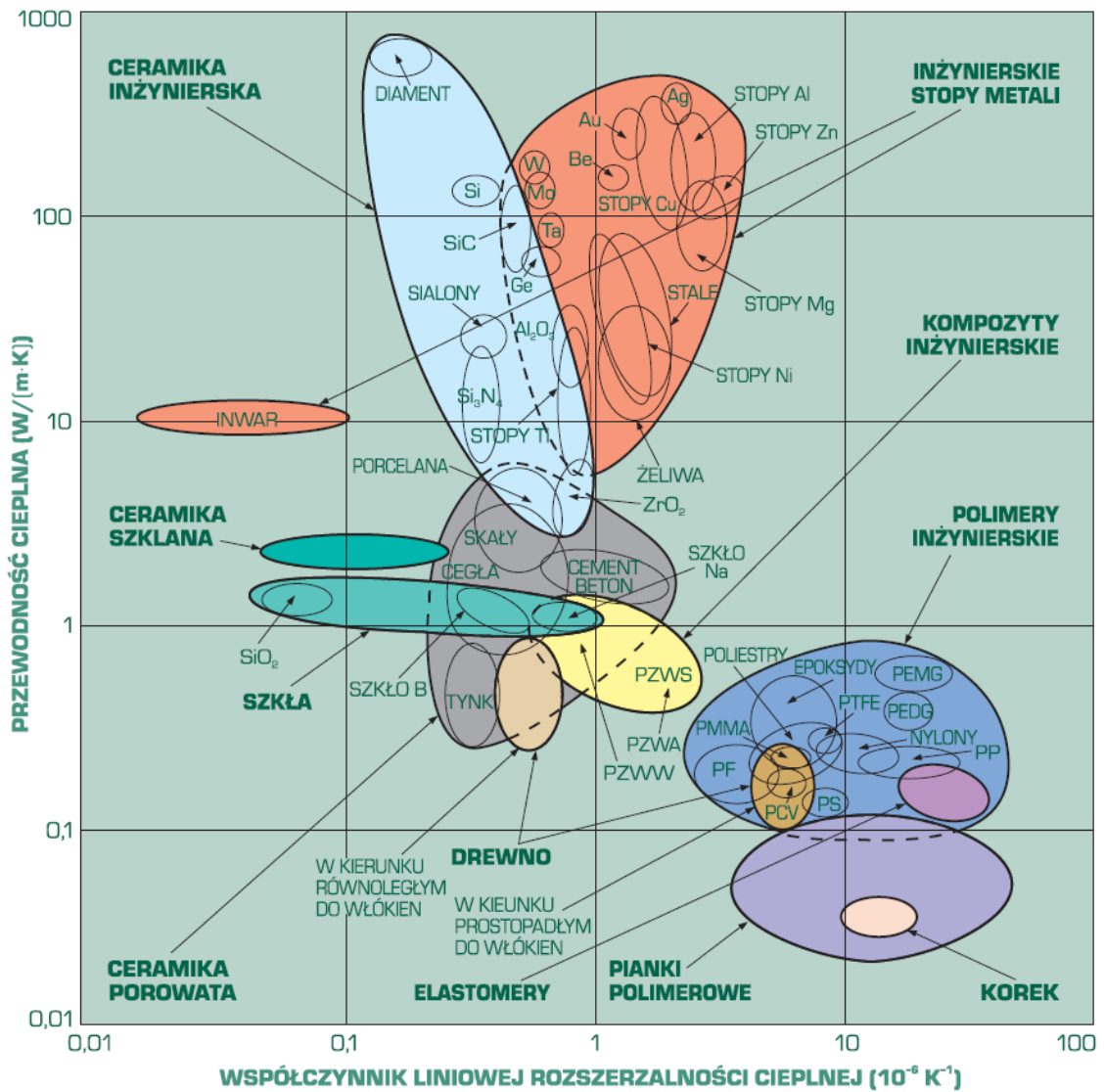
2.2 Właściwości termiczne i mechaniczne kompozytów

Jak już wcześniej wspomniano właściwości termiczne i mechaniczne kompozytów znacznie różnią się od właściwości poszczególnych materiałów, z których są wykonane. Na poniższych rysunkach zaprezentowano zakresy wartości właściwości termicznych i mechanicznych niektórych materiałów. Na rysunku 2.2.1 przedstawiono przewodność cieplną popularnych materiałów. Przykładem materiału o jednej z najniższych przewodności cieplnej (izolatorem) jest żel silikonowy, którego typowy współczynnik przewodności cieplnej $k \approx 0,017$ [W/mK]. Natomiast jednym z najlepiej przewodzących materiałów jest grafen o współczynniku przewodności cieplnej od $k = 4840 \pm 440$ [W/mK] do $k = 5300 \pm 480$ [W/mK].



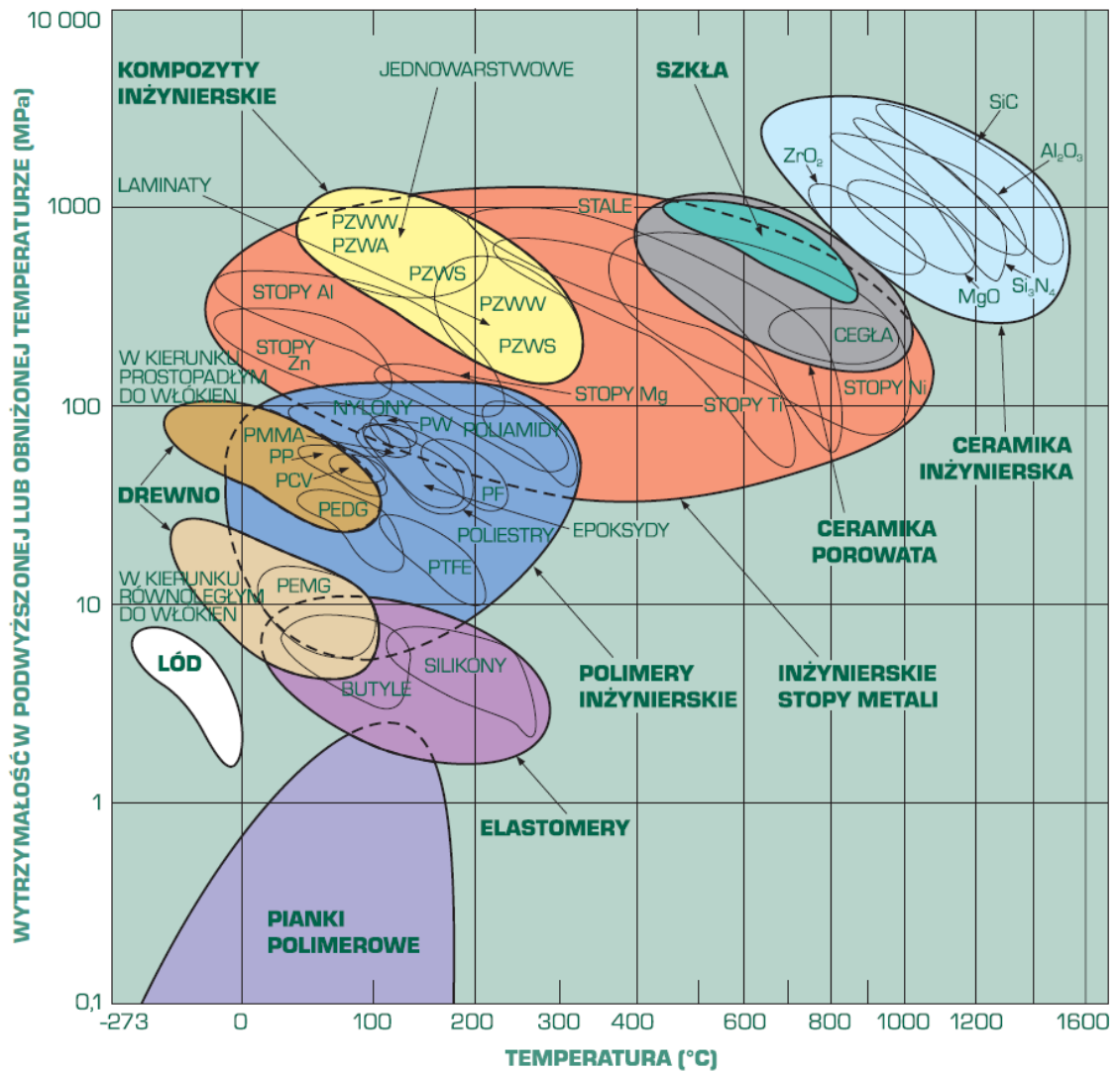
Rys. 2.2.1 Przewodność cieplna materiałów [www04]

Rysunek 2.2.2 pokazuje zależność przewodności cieplnej od współczynnika rozszerzalności cieplnej dla różnych materiałów.



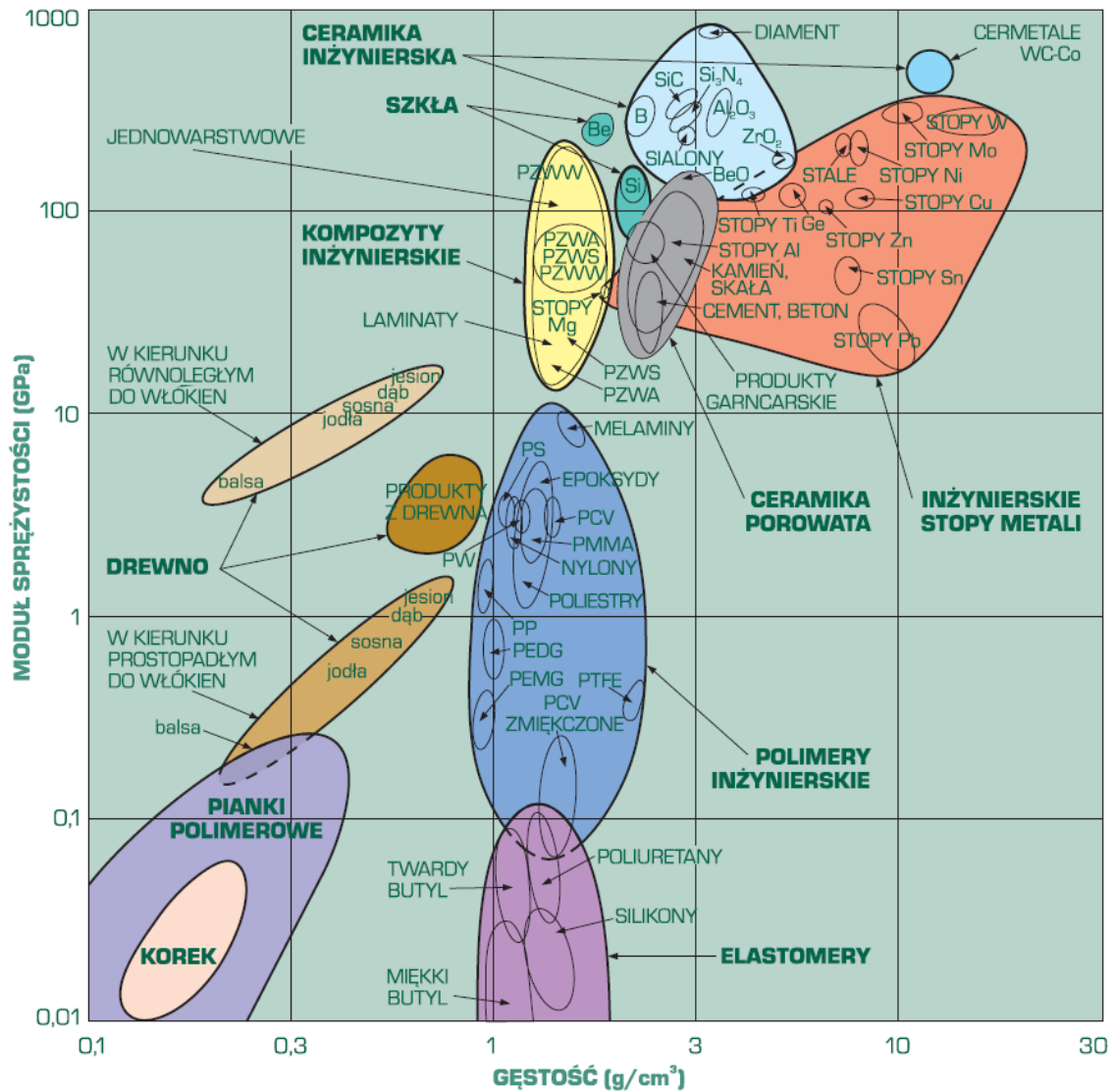
Rys. 2.2.2 Zależność przewodności cieplnej od współczynnika rozszerzalności cieplnej [Dob2006]

Na rysunku 2.2.3 pokazano zależność wytrzymałości od temperatury dla niektórych materiałów stosowanych w zagadnieniach technicznych.



Rys. 2.2.3 Zależność wytrzymałości w podwyższonej lub obniżonej temperaturze od temperatury [Dob2006]

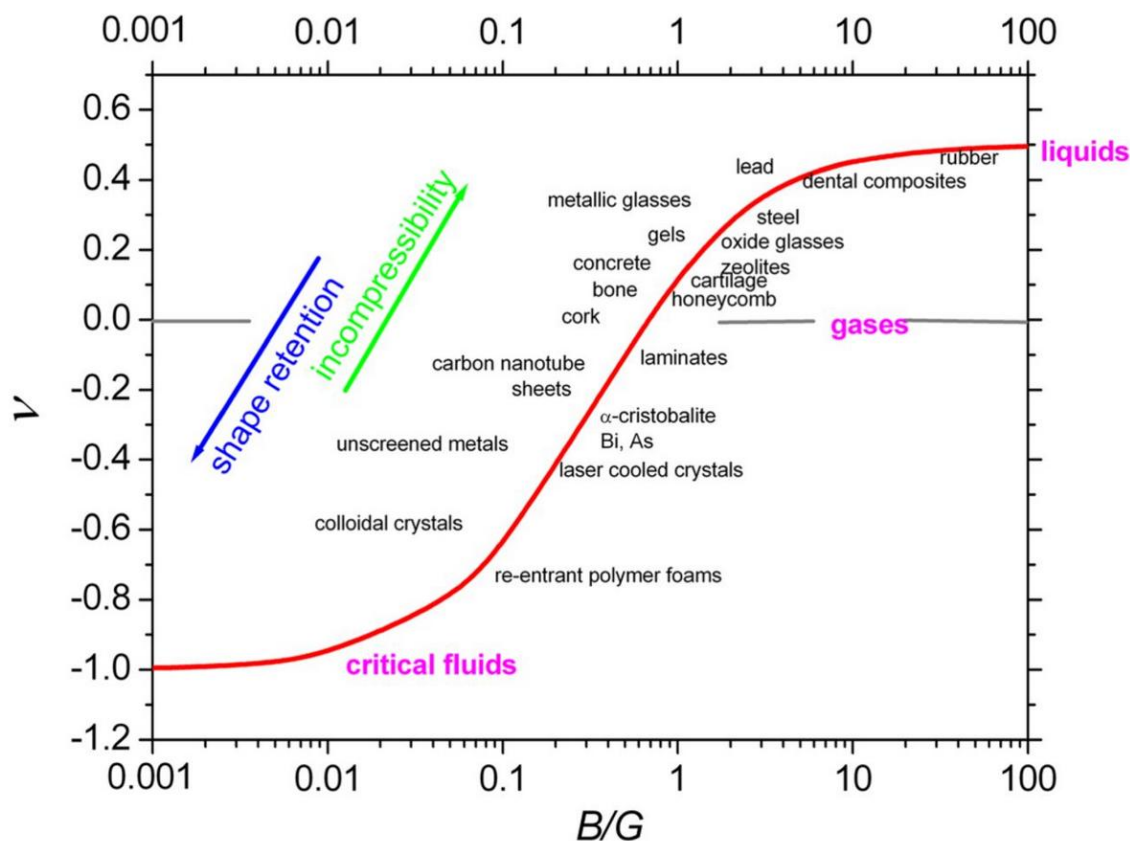
Moduł sprężystości i jego zależność od gęstości materiału zaprezentowano na rysunku 2.2.4.



Rys. 2.2.4 Zależność modułu sprężystości od gęstości materiału [Dob2006]

Wyżej zaprezentowane rysunki: 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4 zostały opracowane wg danych M. F. Ashby'ego i opublikowane w książce Dobrzańskiego [Dob2006].

Rysunek 2.2.5 przedstawia zależność współczynnika Poissona od ilorazu współczynnika sprężystości objętościowej i modułu sprężystości poprzecznej (B/G).



Rys. 2.2.5 Zależność współczynnika Poissona od ilorazu współczynnika sprężystości objętościowej i modułu sprężystości poprzecznej (B/G) [Gre2013]

2.3 Właściwości efektywne kompozytów

Wartość każdej właściwości kompozytu, wykonanego z dwóch lub więcej materiałów, wynika z kilku czynników. Najważniejszym czynnikiem są wartości określonych właściwości każdego materiału, z którego składa się kompozyt. Kolejnym czynnikiem, który wpływa na właściwość wynikową kompozytu jest jego struktura geometryczna. Przedstawione powyżej właściwość wynikowe kompozytu są nazywane właściwościami efektywnymi kompozytów. Najważniejszym spośród wszystkich czynników środowiskowych jest temperatura, która wpływa na zachowanie materiału kompozytowego. Jest to spowodowane głównie faktem, że kompozyty są czułe na zmiany temperatury i mają niski współczynnik efektywnej przewodności cieplnej.

Zdolność wyznaczania właściwości materiałów kompozytowych jest niezbędna w praktycznym wykorzystaniu kompozytów. Aby spełnić konkretne wymagania konstrukcyjne należy w odpowiedni sposób dobrać materiały. Przykładem jest przemysł lotniczy gdzie materiały kompozytowe spełniają wymagania takie jak: wysoka wytrzymałość, niska masa, nieskomplikowany proces produkcyjny, niskie koszty, wysoka trwałość. Ponadto w zastosowaniach transportu ciepła niezbędna jest znajomość przewodności cieplnej. W przemyśle komputerowym i elektronicznym ciepło wytwarzane przez nowoczesne podzespoły elektroniczne jest większe i bardziej skoncentrowane, czego przyczyną jest szybsze taktowanie procesora, większa moc i zredukowany rozmiar urządzeń. W związku z tym niezbędne w tym przypadku staje się wprowadzenie układów odprowadzających ciepło wykonanych z kompozytów o wysokiej przewodności cieplnej [Sul2006].

W celu wyznaczenia efektywnych parametrów wieloskładnikowego kompozytu stosuje się powszechnie regułę mieszanin [McC1985], [Web2003]:

$$\lambda_{eff} = \sum_{i=1}^n \lambda_i V_i \quad \text{Model Voigt'a} \quad (2.3.1)$$

oraz odwrotną regułę mieszanin:

$$\lambda_{eff} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{V_i}{\lambda_i} \right)^{-1} \quad \text{Model Reuss'a}, \quad (2.3.2)$$

gdzie λ_{eff} jest efektywnym parametrem, natomiast λ_i oraz V_i są odpowiednio parametrem i ułamkiem objętościowym i -tego składnika kompozytu jak np. żywicy, włókna, pustki.

Kolejnym modelem służącym do wyznaczania efektywnych parametrów jest model geometryczny [Ott1981], [Web2003]:

$$\lambda_{eff} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{V_i}. \quad (2.3.3)$$

Z powyższego równania można otrzymać zależności, które umożliwiają wyznaczenie np. efektywnej przewodności cieplnej. W ramach tej zależności skonsolidowane mogą być kształty wzmocnienia począwszy od płatków, przez cząstki oraz włókna krótkie [McC1985].

Maksymalna wartość całkowita danej własności dwufazowego kompozytu odpowiada średniej arytmetycznej [Kim2001]:

$$\lambda_{eff} = \lambda_{max} = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2. \quad (2.3.4)$$

Natomiast minimalna wartość całkowita danej własności dwufazowego kompozytu może być zapisana w postaci zależności [Kim2001]:

$$\frac{1}{\lambda_{eff}} = \frac{1}{\lambda_{max}} = \frac{V_1}{\lambda_1} + \frac{V_2}{\lambda_2}. \quad (2.3.5)$$

Reguły mieszanin pozwalają w matematyczny sposób wyrazić właściwości kompozytu, które są zależne od właściwości, ilości oraz rozmieszczenia poszczególnych składników kompozytu. W przypadku kompozytów wzmacnianych włóknami ułożonymi jednokierunkowo maksymalne właściwości kompozytu są w kierunku włókien, a minimalne właściwości w kierunku poprzecznym, co można wyznaczyć odpowiednio za pomocą wzorów 2.3.4 i 2.3.5.

Efektywna przewodność cieplna w materiale kompozytowym zależy od przyjętej geometrii. W celu obliczenia efektywnej przewodności cieplnej, np. w kompozytach wzmacnianych włóknami, należy rozwiązać równanie transportu energii dla temperatury i pola strumienia ciepła. Dla stacjonarnego zagadnienia przewodzenia ciepła bez zmiany fazy, bez konwekcji i bez oporu termicznego, należy rozwiązać serię równań Poissona ze względu na ograniczenia ciągłe takie jak temperatura i strumień ciepła między fazami [Wan2008]. Po obliczeniu pola temperatury można wyznaczyć efektywną przewodność cieplną za pomocą wzoru:

$$k_{eff} = \frac{L \int |\mathbf{q}| dA}{\Delta T \int dA}, \quad (2.3.6)$$

gdzie \mathbf{q} jest strumieniem ciepła dla stacjonarnego zagadnienia przewodzenia ciepła przepływającym przez przekrój dA przy różnicy temperatur ΔT na długości L .

W materiałach kompozytowych, których składniki różnią się właściwościami mechanicznymi, efektywny współczynnik Poissona można zapisać jako ujemny stosunek średnich odkształceń poprzecznych do średnich odkształceń wzdłużnych. W układzie współrzędnych kartezjańskich efektywny współczynnik Poissona można zapisać za pomocą formuły [Gib1999] [Gib2011]:

$$\nu_{eff} = -\frac{\bar{\epsilon}_x}{\bar{\epsilon}_y}. \quad (2.3.7)$$

Natomiast efektywny moduł Younga jest stosunkiem średnich naprężeń wzdłużnych do średnich odkształceń wzdłużnych, co można zapisać w postaci formuły [Gib2011]:

$$E_{eff} = \frac{\bar{\sigma}_y}{\bar{\varepsilon}_y}. \quad (2.3.8)$$

Dla powyższych wzorów zakłada się kierunek działania siły zgodny z osią "y". Kierunkiem poprzecznym jest wówczas kierunek osi "x".

Średnia wartość naprężeń ma postać:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{A} \int_A \sigma dA, \quad (2.3.9)$$

a średnią wartość odkształceń można zapisać za pomocą wzoru:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{A} \int_A \varepsilon dA. \quad (2.3.10)$$

2.4 Wybrane kompozyty o specjalnych właściwościach termicznych

Ze względu na tematykę rozprawy na szczególną uwagę zasługują materiały o specjalnych właściwościach termicznych. Są one powszechnie stosowane w przemyśle wojskowym i lotniczym, gdzie końcowy produkt musi spełniać określone, restrykcyjne wymogi. Urządzenia termiczne w systemach wojskowych muszą być małe i kompaktowe z uwagi na rygorystyczne ograniczenia masy i objętości. Potrzeby w zakresie konserwacji muszą być ograniczone do minimum. Poniżej krótko omówione będą tylko niektóre przykłady materiałów o specjalnych właściwościach termicznych.

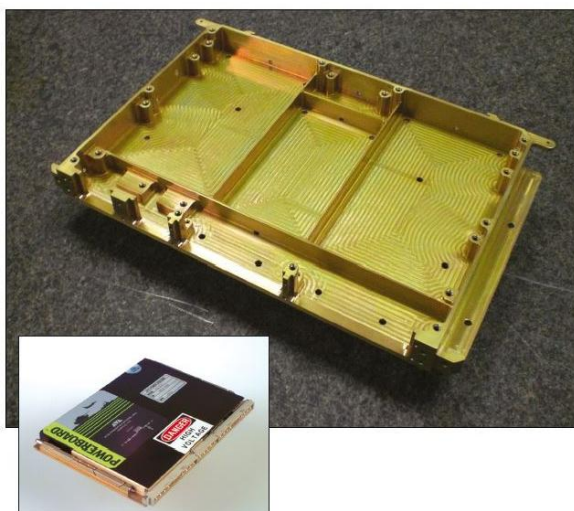
2.4.1 NTE

Rozszerzalność cieplna jest podstawową właściwością ciał stałych. Większość materiałów posiada dodatni współczynnik rozszerzalności cieplnej. Istnieją jednak materiały NTE (ang. Negative Thermal Expansion) o ujemnym współczynniku rozszerzalności cieplnej. Charakteryzują się tym, że kurczą się gdy są podgrzewane i rozszerzają gdy są chłodzone. Badania nad materiałami NTE umożliwiły regulację wartości rozszerzalności cieplnej, tak aby uzyskać konkretną wartość, zazwyczaj zero, poprzez odpowiednie formowanie materiału kompozytowego. Przykładem materiału NTE jest ZrW₂O₈, który kurczy się w sposób ciągły w zakresie temperatur 0.3 – 1050 [K]. Można wyróżnić trzy kategorie mechanizmów działania NTE: sieci elastyczne,

kurczenie się promienia atomowego oraz efekt „magnetovolume” polegający na zmianie objętości ze względu na zmianę amplitudy momentu magnetycznego w metalu magnetycznym [Tak2012], [Gri2006], [Yan2011].

2.4.2 APG

APG (ang. Annealed Pyrolytic Graphite) czyli wyżarzany grafit pirolityczny. Występuje w postaci obudowanej materiałami takimi jak np. aluminium, miedź, ceramika, kompozyty i jest wykorzystywany w przemyśle wojskowym. Cechuje go wysoka przewodność cieplna i niska gęstość. Jego dodatkową cechą jest współczynnik rozszerzalności cieplnej, który może być dobierany w zależności od potrzeb i jest zależny od materiału obudowy [Mon2013]. Na rysunku 2.4.2.1 przedstawiono przykład materiału APG w obudowie aluminiowej stosowany do zasilania podwozia w lotnictwie.

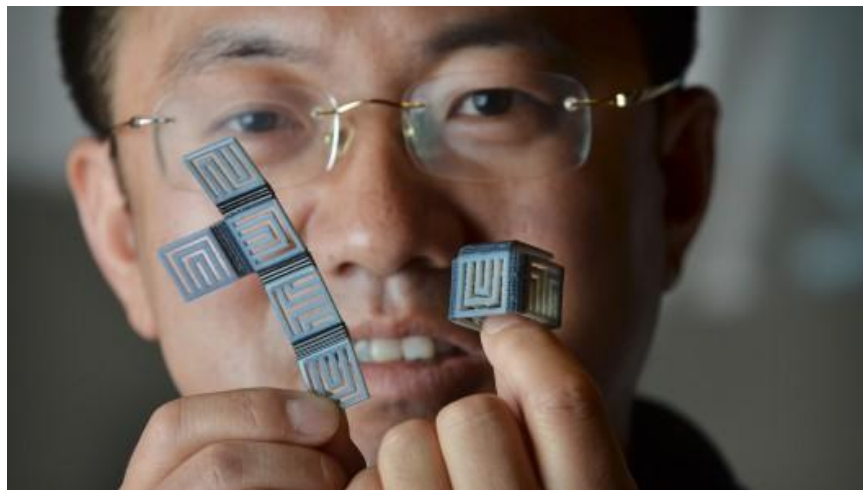


Rys. 2.4.2.1 Przykład materiału APG w obudowie aluminiowej [Mon2013]

2.4.3 Technologia druku 4D materiałów kompozytowych

Technologia druku 4D materiałów kompozytowych polega na drukowaniu na drukarkach 3D przedmiotów wykonanych z materiałów kompozytowych, które umożliwiają tzw. „self-assembly”. W tym celu wykorzystywane są włókna polimerowe z pamięcią kształtu. Orientacja i położenie włókien w kompozycie określa stopień wpływu na pamięć kształtu (składanie, zwijanie, rozciąganie lub skręcanie). Kształt można również kontrolować przez ogrzewanie lub chłodzenie materiału

kompozytowego [www03]. Na rysunku 2.4.3.1 przedstawiono prosty przykład modelu wykonanego z polimerów z pamięcią kształtu, który wydrukowano na drukarce 3D.



Rys. 2.4.3.1 Przykład modelu wykonanego z polimerów z pamięcią kształtu, który wydrukowano na drukarce 3D [www03]

3. Metody optymalizacyjne

Optymalizacja jest działem matematyki, która umożliwia znalezienie najlepszego, ze względu na wybrane kryterium, rozwiązania danego problemu przy uwzględnieniu określonych ograniczeń. Najlepsze rozwiązanie to takie, które daje najmniejszą lub największą (minimum lub maksimum) wartość pewnego wyrażenia nazywanego funkcją celu. Według słownika PWN z 2014r. optymalizacja to:

"poszukiwanie za pomocą metod matematycznych najlepszego, ze względu na wybrane kryterium, rozwiązania danego zagadnienia gospodarczego, przy uwzględnieniu określonych ograniczeń."

Już w czasach starożytnych Euklides (III wiek p. n. e.) zajmował się poszukiwaniem najkrótszej drogi łączącej dwa punkty. Na przełomie XVIII i XIX w. Gauss opracował pierwszą technikę optymalizacyjną tzw. metodę największego spadku. Od początku drugiej połowy XX w. nastąpił rozkwit teorii optymalizacji, związany z dynamicznym rozwojem technik komputerowych i metod numerycznych [Fle2000], [Kus2009].

Celem optymalizacji jest wyznaczenie najlepszego (optymalnego) rozwiązania z punktu widzenia określonego kryterium, spełniającego określone uwarunkowania i ograniczenia. W matematyce termin optymalizacja odnosi się do problemu znalezienia ekstremum (minimum lub maksimum) zadanej funkcji celu. W przypadku złożonych funkcji celu lub optymalizacji wielokryterialnej proces optymalizacji jest długotrwały. Metody optymalizacji umożliwiają bardziej efektywne znalezienie "optimum". Stosując odpowiednie algorytmy możliwe jest, na drodze analitycznej lub numerycznej, wyznaczenie rozwiązań optymalnych bez konieczności analizowania wszystkich możliwych wariantów.

Poszukiwanie rozwiązań optymalnych jest związane z następującymi zadaniami [Kus2009]:

- dobór (opracowanie) modelu matematycznego analizowanego procesu,
- zdefiniowanie funkcji celu optymalizacji (funkcjonału jakości, kryterium optymalizacji, kryterium jakości itp.)
- poszukiwanie optymalnego rozwiązania z zastosowaniem jednej z metod optymalizacji.

Zadaniem optymalizacji (programowania matematycznego) jest poszukiwanie takiego elementu $\mathbf{x}_{\text{opt}} \in X_d$, że

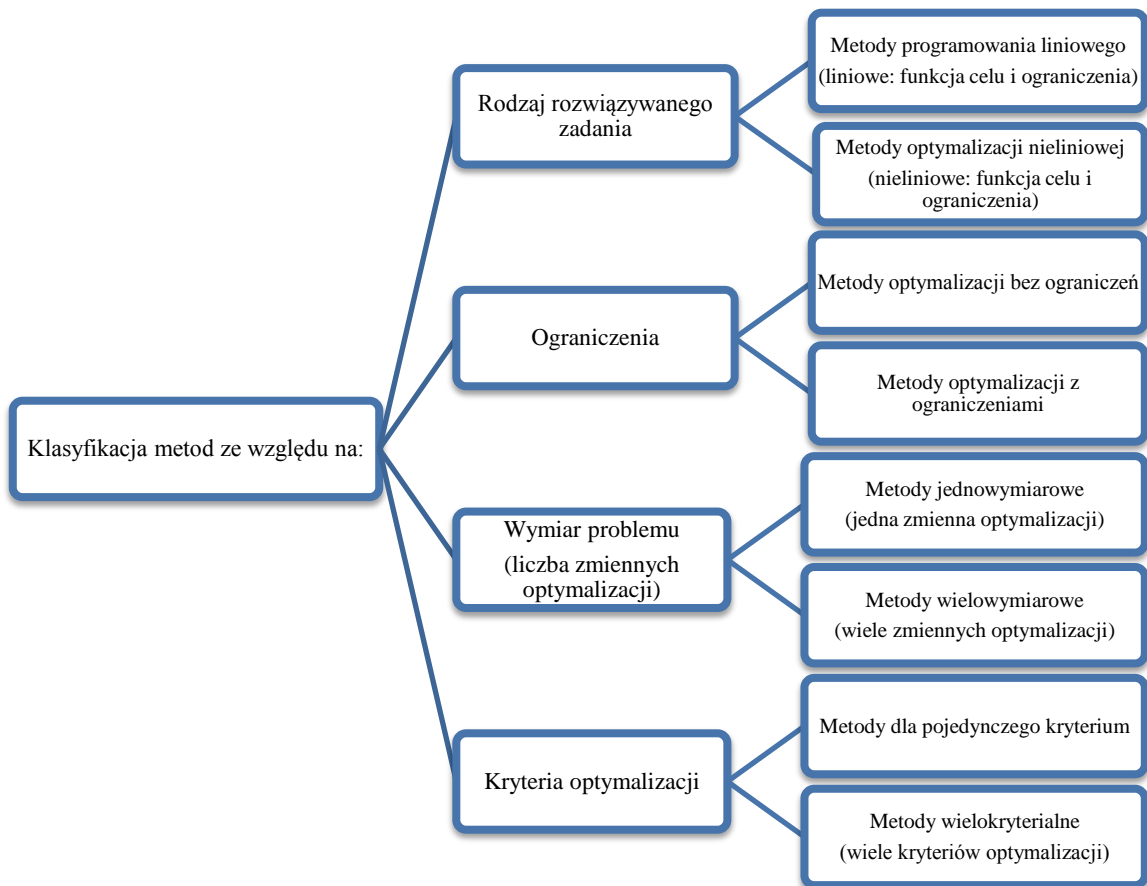
$$f(\mathbf{x}_{\text{opt}}) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in X_d \text{ (minimalizacja, } \mathbf{x}_{\text{min}} = \mathbf{x}_{\text{opt}})$$

lub

$$f(\mathbf{x}_{\text{opt}}) \geq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in X_d \text{ (maksymalizacja, } \mathbf{x}_{\text{max}} = \mathbf{x}_{\text{opt}}).$$

Zakładając, że funkcja celu $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ oraz zbiór $X_d \subset \mathbb{R}^n$ [Bon1997].

Istnieje wiele sposobów klasyfikacji metod optymalizacji [Bon1997], [Wei2009], [Kus2009], [Aro2004]. Głównym z nich jest podział metod ze względu na rodzaj analizowanego zadania. Na rysunku 3.1 przedstawiono przykład klasyfikacji metod optymalizacji wg [Kus2009].



Rys. 3.1 Klasyfikacja metod optymalizacji [Kus2009]

W dalszym opracowaniu będą omówione metody bezgradientowe, gradientowe oraz optymalizacji z ograniczeniami.

3.1 Metody bezgradientowe

Metody bezgradientowe nazywane są również metodami bezpośredniego szukania, ponieważ znalezienie optymalnego rozwiązania jest oparte jedynie na znajomości funkcji celu. Mogą być stosowane we wszystkich zadaniach optymalizacji, w których funkcja celu jest opisana skomplikowanymi zależnościami i trudno jest w sposób analityczny wyznaczyć pochodne. Metody te są również wykorzystywane w przypadku gdy nie ma możliwości opisanie funkcji celu za pomocą wzorów matematycznych. Przykładami metod bezgradientowych są metody optymalizacji wielowymiarowej takie jak: metoda Hooke'a - Jeevesa, metoda Rosenbrocka, metoda sympleks Nelder-Meada, metoda Powella jak również metody niedeterministyczne np. algorytm genetyczny i algorytm ewolucyjny [Kus2009].

W dalszej części podrozdziału omówione będą dwie metody: sympleksu Nelder-Meada oraz algorytmy genetyczne.

3.1.1 Metoda sympleksu Nelder-Meada

W metodzie Nelder-Meada poszukiwanie rozwiązania optymalnego funkcji n zmiennych rozpoczyna się od wybrania $n+1$ punktów stanowiących wierzchołki startowego sympleksu, w odróżnieniu od innych metod optymalizacji wielowymiarowej, w których poszukiwanie rozwiązania optymalnego rozpoczyna się z jednego wybranego punktu startowego. Definicję sympleksu można przedstawić w następujący sposób [Kus2009], [Aro2004]:

„Sympleksem n - wymiarowym o $n+1$ wierzchołkach $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ nazywamy najmniejszy zbiór wypukły zawierający te punkty, przy czym zbiór $\{p_j - p_0 : 1 \leq j \leq n\}$ musi składać się z wektorów liniowo zależnych.”

Jak przedstawiono na rysunku 3.1.1.1a, w przestrzeni dwuwymiarowej sympleksem jest dowolny trójkąt. Natomiast w przestrzeni trójwymiarowej sympleksem będzie dowolny czworościan.

Pierwszy algorytm typu sympleks został zdefiniowany przez Spandley'a w 1962. Następnie w 1965 Nelder i Mead ulepszyli tę metodę dodając do niej operacje geometryczne takie jak: odbicie, ekspansję, zawężenie i redukcję. W ten sposób wierzchołek, w którym wartość funkcji celu była największa („najgorszy wektor”) zostaje zastąpiony przez inny - „lepszy”. Dzięki temu sympleks coraz bardziej zbliża się

do minimum lokalnego badanej funkcji. Korzystając z operacji, które przyspieszają proces optymalizacji, sympleks deformuje się w taki sposób, aby jak najlepiej przystosować się do funkcji celu [Nel1965].

Poszukiwanie minimum funkcji celu musi być poprzedzone analizą, w wyniku której wierzchołki, w których funkcja celu przyjmuje najmniejszą i największą wartość, zostaną oznaczone w następujący sposób [Kus2009]:

- p_{\min} – wierzchołek, w którym funkcja celu przyjmuje najmniejszą wartość:

$$f(p_{\min}) \leq f(p_i) \text{ dla dowolnego } 0 \leq i \leq n, \quad (3.1.1.1)$$

- p_{\max} – wierzchołek, w którym funkcja celu przyjmuje największą wartość:

$$f(p_{\max}) \geq f(p_i) \text{ dla dowolnego } 0 \leq i \leq n, \quad (3.1.1.2)$$

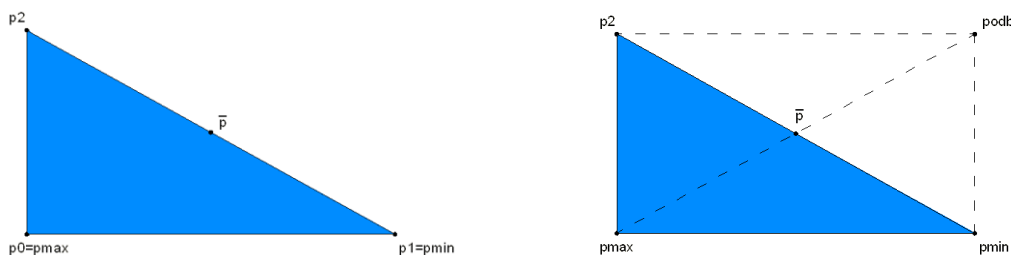
- \bar{p} – środek ciężkości wierzchołków sympleksu z wyłączeniem wierzchołka p_{\max} :

$$\bar{p} = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i \neq \max} p_i \right). \quad (3.1.1.3)$$

Po wyznaczeniu punktów p_{\min} , \bar{p} , p_{\max} , można rozpocząć procedurę minimalizacji funkcji celu. W każdej iteracji można wyróżnić następujące etapy: odbicie, ekspansja, zawężenie oraz redukcję. Wszystkie etapy zostały szczegółowo opisane w publikacjach [Nel1965], [Kus2009] i [Wei2009].

Odbicie – polega na wyznaczeniu punktu, który jest symetrycznym obrazem punktu p_{\max} względem punktu \bar{p} . Nowy punkt jest oznaczany, jako p_{odb} (Rys. 3.1.1.1b), a jego współrzędne są wyznaczone według zależności:

$$p_{\text{odb}} = \bar{p} + \alpha \cdot (\bar{p} - p_{\max}). \quad (3.1.1.4)$$



Rys. 3.1.1.1 (a) Sympleks początkowy z wierzchołkami p_0, p_1, p_2 , gdzie $(f(p_0) > f(p_2) > f(p_1))$, (b) Sympleks: etap odbicia

Wartość współczynnika odbicia α zawiera się w przedziale $\alpha \in (0,1]$, zazwyczaj jednak przyjmuje się $\alpha = 1$.

Po etapie odbicia, w zależności od wartości funkcji celu w punkcie $f(p_{\text{odb}})$, należy rozważyć kilka wykluczających się przypadków (3.1.1.5), (3.1.1.6) i (3.1.1.7), które wyznaczają kierunek dalszych poszukiwań w danej iteracji:

$$f(p_{\text{min}}) \leq f(p_{\text{odb}}) < f(p_{\text{max}}), \quad (3.1.1.5)$$

$$f(p_{\text{odb}}) < f(p_{\text{min}}), \quad (3.1.1.6)$$

$$f(p_{\text{max}}) \leq f(p_{\text{odb}}), \quad (3.1.1.7)$$

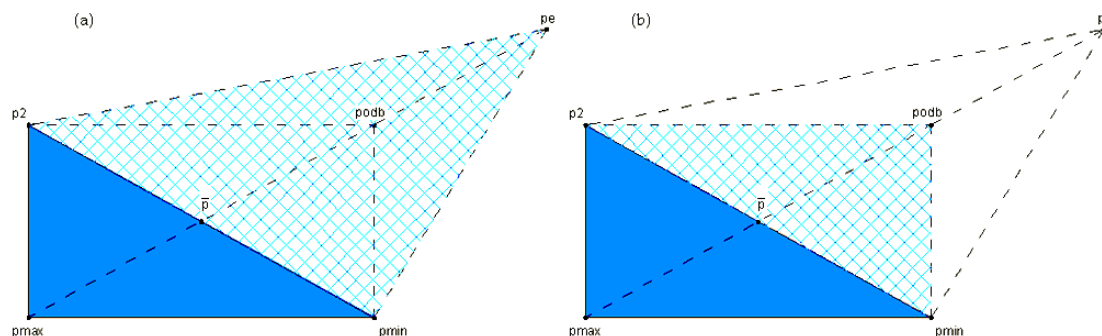
Jeśli w obliczonym punkcie p_{odb} funkcja celu przyjmuje wartość (3.1.1.5) wtedy odbicie jest akceptowalne. Nowy sympleks zostaje utworzony przez zastąpienie wierzchołka p_{max} wierzchołkiem p_{odb} . Następnie indeksy min, max oraz położenie punktu \bar{p} zostają zaktualizowane i jeśli warunek stopu, który będzie opisany później, nie jest spełniony rozpoczyna się nowa iteracja od nowego odbicia.

Ekspansja – Zakładamy, że po każdym odbiciu jest spełniona nierówność (3.1.1.6) co oznacza, że wierzchołek, który został znaleziony podczas odbicia jest lepszy niż punkt p_{min} (jest bliższy minimum funkcji celu f). Sugeruje to dalsze poszukiwania minimum w tym kierunku. Z tego powodu nie akceptujemy odbicia i kontynuujemy obliczenia wykonując ekspansję (Rys. 3.1.1.2). Nowy punkt jest wyznaczany i oznaczany jako p_e :

$$p_e = \bar{p} + \gamma \cdot (p_{\text{odb}} - \bar{p}), \quad (3.1.1.8)$$

gdzie $\gamma > 1$ jest współczynnikiem ekspansji (zazwyczaj $\gamma = 2$). Następnie wartość funkcji celu w nowym punkcie jest obliczana $f(p_e)$ i:

- jeżeli $f(p_{\text{odb}}) < f(p_{\text{min}})$ to ekspansja jest udana, nowy sympleks jest tworzony w taki sposób, że p_{max} zostaje zastąpione przez p_e (nowy sympleks składa się z wierzchołków p_e, p_2, p_{min} – Rys. 3.1.1.2a); następnie min i max oraz położenie punktu \bar{p} są aktualizowane. Po sprawdzeniu warunku stopu może rozpocząć się nowa iteracja;
- w przeciwnym razie, gdy $f(p_e) \geq f(p_{\text{odb}})$, p_{max} jest zastępowane przez p_{odb} (nowy sympleks składa się z wierzchołków $p_{\text{odb}}, p_2, p_{\text{min}}$ – Rys. 3.1.1.2b) następnie postępujemy jak poprzednio (indeksy są aktualizowane, sprawdzany jest warunek stopu i może rozpocząć się kolejna iteracja)



Rys. 3.1.1.2 Etapy ekspansji: udana (a), nieudana (b) (nowo utworzony sympleks jest zakreskowany)

Zawężenie - Odbicie nie może być zaakceptowane również w przypadku, gdy $f(p_{odb}) \geq f(p_{max})$, nierówność (3.1.1.7). W takiej sytuacji odbywa się zawężenie sympleksu, którego nowy wierzchołek jest obliczany według zależności

$$p_z = \bar{p} + \beta \cdot (p_{max} - \bar{p}), \quad (3.1.1.9)$$

gdzie współczynnik zwężenia β przyjmuje wartość $\beta \in (0,1)$, zazwyczaj $\beta=0.5$ (Rys. 3.1.1.3a).

Jeżeli punkt p_z prowadzi do poprawy, to znaczy $f(p_z) < f(p_{max})$, to punkt p_{max} jest zastępowany przez punkt p_z i nowy sympleks zostaje utworzony (składa się z wierzchołków p_z, p_2, p_{min}). Następnie aktualizowane są indeksy. Po sprawdzeniu warunku stopu może rozpocząć się nowa iteracja.

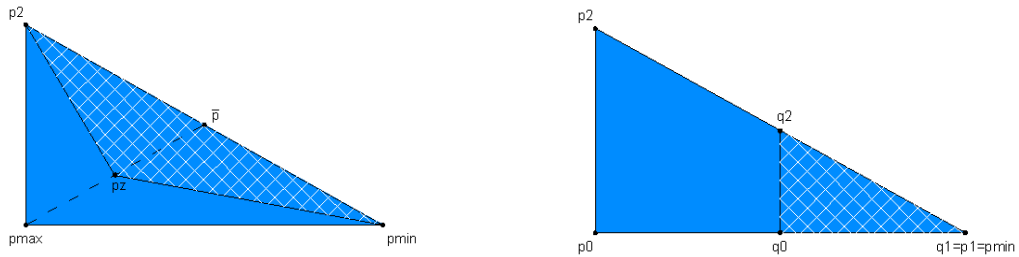
Redukcja - Ten etap występuje w przypadku, gdy po wykonaniu zawężenia jest spełniona nierówność (3.1.1.10):

$$f(p_z) \geq f(p_{max}). \quad (3.1.1.10)$$

W tej sytuacji punkt p_{min} pozostaje niezmienny, a cały sympleks ulega redukcji według wzoru (3.1.1.11):

$$p_i \leftarrow \delta \cdot (p_i + p_{min}), \quad i=0, 1, \dots, n, \quad i \neq min, \quad (3.1.1.11)$$

gdzie $\delta \in (0,1)$ jest współczynnikiem redukcji i zazwyczaj przyjmuje wartość $\delta = 0,5$ (Rys. 3.1.1.3b). Sympleks, który powstał z nowo otrzymanych punktów p_0, \dots, p_n , zostaje użyty do następnej iteracji (jeśli warunek stopu nie został wypełniony).



Rys. 3.1.1.3 (a) Etap zwężenia (jeśli zawężenie się powiodło to do dalszych obliczeń jest przyjmowany zakreskowany sympleks), (b) Etap redukcji (nowo utworzony sympleks jest zakreskowany)

Na potrzeby artykułu użyto dwóch warunków stopu. Pierwszy zatrzymuje obliczenia, gdy bezwzględna wartość różnicy między $f(p_{\min})$ i $f(p_{\max})$ jest mniejsza niż dokładność rozwiązania:

$$\text{abs}(f(p_{\min}) - f(p_{\max})) < \varepsilon. \quad (3.1.1.12)$$

Drugi warunek stopu zatrzymuje obliczenia, gdy liczba iteracji przekroczy maksymalną założoną liczbę iteracji

$$\text{step} > \text{maxstep}. \quad (3.1.1.13)$$

Poniżej przedstawiono algorytm Neldera-Meada [Kus2009]:

Dane wejściowe:

Sympleks początkowy z wierzchołkami: p_0, p_1, \dots, p_n ,

Współczynniki:

α – odbicie,

β – zawężenie,

γ – ekspansja,

δ – redukcja,

ε – dokładność rozwiązania,

maxstep – maksymalna liczba iteracji.

1: Repeat

2: oblicz wartość funkcji w wierzchołkach sympleksu: p_0, p_1, \dots, p_n

3: znajdź p_{\min}, p_{\max} ($\min \neq \max$)

4: $\bar{p} = \frac{1}{n} \cdot (\sum_{i \neq \max} p_i)$

5: $p_{\text{odb}} = \bar{p} + \alpha \cdot (\bar{p} - p_{\max})$

6: if $f(p_{\text{odb}}) < f(p_{\min})$ then

7: $p_e = \bar{p} + \gamma \cdot (p_{\text{odb}} - \bar{p})$

8: if $f(p_e) < f(p_{\text{odb}})$ then

9: $p_{\max} = p_e$ ▶ ekspansja

10: else

11: $p_{\max} = p_{\text{odb}}$ ▶ odbicie

12: end if

13: else

14: if $f(p_{\min}) \leq f(p_{\text{odb}}) < f(p_{\max})$ then

15: $p_{\max} = p_{\text{odb}}$

```
16: else
17:    $p_z = \bar{p} + \beta \cdot (p_{\max} - \bar{p})$ 
18:   if  $f(p_z) \geq f(p_{\max})$  then
19:     for  $i=0$  to  $n$  do
20:       if  $i \neq \min$  then
21:          $p_i = \delta \cdot (p_i + p_{\min})$       ► redukcja
22:       end if
23:     end for
24:   else
25:      $p_{\max} = p_z$       ► zawężenie
26:   end if
27: end if
28: end if
29: until  $\text{abs}(f(p_{\min}) - f(p_{\max})) < \varepsilon$  or  $\text{step} > \text{maxstep}$       ► warunki stopu
30: return  $x^* = p_{\min}$       ► przybliżone rozwiązanie
```

W literaturze można znaleźć wiele przykładów zagadnień, w których zaimplementowano algorytm Neldera-Meada. Jednym z przykładów jest wykorzystanie algorytmu w postaci GBNM (Globalized Bounded Nelder-Mead) w optymalizacji inżynierskiej. W artykule Luersen i współautora [Lue2004a] opisano globalne podejście do optymalizacji rzeczywistej przy użyciu procedury restartu. Algorytm w postaci GBNM może być stosowany dla funkcji nieciągłych, niewypukłych. W celu przyspieszenia poszukiwania globalnego wynaleziono procedurę ulepszonych restartu. Procedura ta została następnie ulepszona i wykorzystana w artykule [Hos2007] do optymalizacji wspornika wykonanego z kompozytu. W badaniach wykorzystano jednowymiarową adaptacyjną funkcję prawdopodobieństwa oraz nieliniowe ograniczenia. Dzięki temu metoda ta stała się bardziej wydajna niż algorytm ewolucyjny, co potwierdziły badania. W artykule [Nan2009] można znaleźć analizę porównawczą algorytmu Neldera-Meada z restartami lokalnymi. Metoda Neldera-Meada została wykorzystana również w celu skutecznego wykrywania wielokrotności minimów globalnych.

3.1.2 Algorytmy genetyczne

Algorytmy genetyczne są grupą metod, które wykorzystują czynnik losowy. Znajdują swoje zastosowanie m. in. w optymalizacji i są zaliczane do grupy metod niedeterministycznych. Algorytmy genetyczne zostały rozwinięte przez Johna Hollanda, który opublikował metodę w 1975 r [Gol1998].

Ich działanie jest oparte na mechanizmach doboru naturalnego oraz dziedziczności. Czerpiąc z teorii ewolucji algorytmy genetyczne wykorzystują fakt, że największe prawdopodobieństwo przeżycia mają jednostki o najwyższym stopniu przystosowania. Ich potomstwo w głównej mierze kształtuje następne generacje osobników. Nowy zespół sztucznych organizmów (w postaci ciągów bitów) powstaje w każdym pokoleniu i jest utworzony z połączenia fragmentów najlepiej przystosowanych przedstawicieli poprzedniego pokolenia. Nowa część składowa jest sporadycznie wypróbowywana. Mimo tego, że algorytmy genetyczne zawierają element losowości nie sprowadzają się one do przypadkowego błędzenia. Znajomość przeszłego doświadczenia jest wykorzystywana do określenia nowego obszaru poszukiwań zakładając podwyższoną wydajność.

W algorytmach genetycznych wykorzystywana jest terminologia zaczerpnięta z genetyki. Poniżej omówione będą podstawowe elementy takie jak: chromosom, gen, populacja, funkcja przystosowania [Siv2008], [Kus2009], [Ara2004], [Mic2003].

Chromosom - obiekt reprezentujący zmienne optymalizacji. Jest zbudowany z uporządkowanego ciągu genów o określonej długości (o skończonej liczbie genów). Sposób kodowania jest dowolny, ale powinien jak najlepiej odpowiadać rozważanemu problemowi. Najczęściej zmienne optymalizacji są kodowane w sposób binarny, przyjmując wartości 0 i 1.

Gen - to pojedynczy element chromosomu.

Populacja - jest zbiorem chromosomów. Podczas całej procedury optymalizacyjnej liczebność populacji jest stała, z góry określona. Algorytm genetyczny, podczas działania, modyfikuje populację zgodnie z pewnym przyjętym ogólnie schematem. Tworząc nową populację stosuje się mechanizmy podobne do tych, które można zaobserwować w przyrodzie. Nowe osobniki są potomkami pary rodzicielskiej pochodzącej od populacji z wcześniejszej iteracji. Dzięki temu dziedziczą

pewne cechy rodziców z poprzedniej populacji oraz nabywają nowych cech, co jest skutkiem działania czynnika losowego.

Funkcja przystosowania - funkcja, która opisuje środowisko. Jest ona powiązana z funkcją celu analizowanego zadania optymalizacji. Wartości funkcji przystosowania pozwalają ocenić przystosowanie poszczególnych chromosomów. Jest to bardzo istotna procedura, ponieważ główną ideą algorytmów genetycznych jest aby populacje chromosomów w kolejnych iteracjach były lepiej przystosowane niż populacje wcześniejsze.

Na rysunku 3.1.2.1 przedstawiono schemat działania algorytmu genetycznego. Działanie algorytmu rozpoczyna się od inicjacji, która polega na ustaleniu: pierwszej populacji, podstawowych parametrów algorytmu, zasad kodowania i obliczeniu funkcji przystosowania oraz zakodowaniu pierwszej iteracji. W każdej kolejnej iteracji populacja jest modyfikowana za pomocą operacji takich jak: selekcja, krzyżowanie i mutacja. Poniżej krótko omówiono każdą z nich [Kus2009], [Siv2008].

Ustalenie podstawowych parametrów algorytmu - Ustalenie liczebności n rozważanej populacji chromosomów oraz ich długości l , która odpowiada liczbie genów w chromosomie.

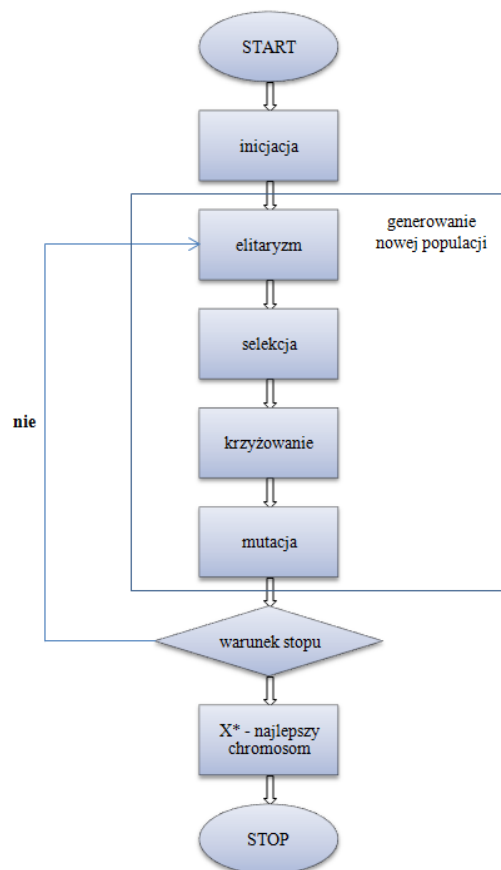
Kodowanie - Najczęściej wykorzystywane jest kodowanie binarne, które polega na reprezentacji elementów zbioru rozwiązań dopuszczalnych za pomocą ciągów zer i jedynek. Sposób, w którym chromosomu są złożone z ciągów 0 i 1 jest wygodny ponieważ daje możliwość np. łatwiejszego przeprowadzenia etapu krzyżowania.

Ustalenie pierwszej populacji - populację startową P_0 złożoną z n osobników (n chromosomów, które reprezentują tych osobników) generuje się w sposób losowy. W populacji mogą wielokrotnie występować osobnicy o tym samym chromosomie, a ich kolejność jest dowolna.

Obliczanie funkcji przystosowania - Zakładając, że funkcja celu f jest określona w pewnym zbiorze X takim, że $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ mamy do dyspozycji zbiór chromosomów:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{ch(x) : x \in S\} \\ &= \{a_1 a_2 \dots a_l : a_j \in \{0,1\} \text{ dla } j = 1 \dots, l\},\end{aligned}$$

gdzie: $ch(x)$ - chromosom identyfikujący punkt $x \in X$, S - zbiór ustalonych reprezentantów zbiór rozwiązań dopuszczalnych X .



Rys. 3.1.2.1 Ogólny schemat działania algorytmów genetycznych [Kus2009]

Funkcja przystosowania może być odpowiednikiem funkcji celu $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, co można zapisać w formie:

$$F(ch(x)) = f(x) \text{ - w przypadku maksymalizacji}$$

oraz

$$F(ch(x)) = -f(x) \text{ - w przypadku minimalizacji}$$

Kolejnym etapem obliczeń jest wygenerowanie nowej populacji P_i w iteracji i . W tym celu losowana jest para rodzicielska składająca się z przedstawicieli wcześniejszej populacji P_{i-1} . W kolejnym kroku wykorzystując operacje: selekcji, krzyżowania i mutacji tworzony jest potomek. Cały proces jest powtarzany n razy aż do uzyskania n potomków.

Selekcja - w tym etapie wybierana jest najlepsza para rodzicielska dla procesu krzyżowania, czyli taka która jest najlepiej przystosowana. Istotny wpływ na wybór pary rodzicielskiej ma wartość funkcji przystosowania. Im większa wartość tym większa szansa na przetrwanie. Jedną z najprostszych metod selekcji jest metoda

ruletki. Polega ona na przypisaniu poszczególnym osobnikom wycinka "koła ruletki" o różnych polach których wielkość jest proporcjonalna do wartości ich funkcji przystosowania. Dzięki temu szansa wylosowania osobników lepiej przystosowanych wzrasta.

Krzyżowanie - jego celem jest przekazanie cech pary rodzicielskiej (wybranej podczas selekcji) ich potomkom. W tym celu dokonuje się zmiany genów pomiędzy chromosomami pochodzącymi od pary rodzicielskiej. Istnieje wiele metod krzyżowania i mają one wpływ na działanie algorytmu. Jedną z podstawowych metod jest krzyżowanie jednopunktowe, które polega na wyborze losowej liczby $k \in \{1, \dots, l - 1\}$ będącej punktem krzyżowania. W kolejnym etapie tworzone są dwa nowe chromosomy, które powstają ze sklejenia dwóch fragmentów każdego chromosomów rodzicielskich. Poniżej zaprezentowano przykład krzyżowania jednopunktowego:

chromosom rodzica A : 0011|0101110
chromosom rodzica B : 1011|0000111

potomek A' : 0011|0000111
potomek B' : 1011|0101110

gdzie symbol | oznacza punkt krzyżowania k , w przedstawionym przykładzie $k=4$.

Mutacja - polega na całkowitej losowej zmianie genów potomka, który został utworzony na drodze krzyżowania. W trakcie tej operacji ustala się, które geny w rozważanym chromosomie będą mutowane. W przypadku gdy zachodzi mutacja dla danego genu a'_j to jego bit jest zamieniany na przeciwny, a pozostałe geny pozostają bez zmian. Dzięki tej operacji w populacji P_i mogą znaleźć się osobniki o chromosomach, których nie dałoby się uzyskać na drodze samego krzyżowania.

Algorytm kończy swoją pracę w przypadku gdy maksymalna liczba iteracji zostanie przekroczona lub jeśli zmiany wartości funkcji przystosowania w dla osobnika najlepiej przystosowanego w populacji są niewielkie podczas kilku kolejnych iteracji.

Podobnie jak algorytmy genetyczne również algorytmy ewolucyjne są wzorowane na biologicznej ewolucji. Dzięki temu dobrze sprawdzają się w zagadnieniach optymalizacji. Począwszy od lat 60. niezależnie od siebie algorytmy ewolucyjne były rozwijane przez Lewrance'a J. Fogel'a na zachodnim wybrzeżu Stanów Zjednoczonych oraz przez Hans'a-Paul'a Schwefel'a i Ingo'a Rechenberg'a w Niemczech [Kus2009], [Ara2004]. Algorytm ewolucyjny został wykorzystany przez autorkę rozprawy w pracy Nienartowicz i współautora [Nie2012a].

3.2 Metody gradientowe

W przeciwieństwie do metod bezgradientowych wykorzystują one znajomość funkcji celu oraz jej gradient lub wielkość z nim związaną. Dlatego też funkcja celu musi być określona i różniczkowalna w całej przestrzeni \mathbb{R}^n . W procesie minimalizacji metody gradientowe analizują wartości, jak również trendy wzrostu funkcji celu. Kierunek największego wzrostu funkcji celu wskazuje gradient $\nabla f(\mathbf{x})$, natomiast kierunek największego spadku skazuje wektor $-\nabla f(\mathbf{x})$ [Kus2009], [Fle2000].

Strategię metod gradientowych można ogólnie przedstawić w dwóch etapach:

- 1) Określenie kierunku poszukiwania minimum \mathbf{d}_i przy zastosowaniu gradientu funkcji celu i/lub wielkości z nim związanych. Zazwyczaj, w przypadku opisywanych metod, przy ustalaniu kierunku \mathbf{d}_i wykorzystywany jest fakt, że wektor gradientu opisuje kierunek największego wzrostu funkcji celu.
- 2) Dobór kroku h_i o odpowiedniej długości, który należy wykonać zgodnie ze znalezionym uprzednio kierunkiem szukania \mathbf{d}_i . W tym celu wykorzystuje się metody stało krokowe (krok jest stały w każdej iteracji) oraz zmiennie krokowe.

Metody gradientowe są zazwyczaj szybciej zbieżne niż metody bezgradientowe. Jednak nie mogą być one stosowane w przypadku, gdy nie można określić gradientu funkcji celu. W przypadku bardziej złożonych zadań optymalizacyjnych, w których brakuje analitycznego opisu funkcji celu, gradient jest obliczany przy pomocy metod numerycznych, co jest bardzo pracochłonne.

W pierwszym podrozdziale omówione będą krótko podstawowe metody optymalizacji gradientowej, takie jak: metoda największego spadku, metoda gradientów sprzężonych, metoda Newtona oraz metody quasi-newtonowskie. Natomiast w drugim podrozdziale omówiony będzie algorytm SQP.

3.2.1 Podstawowe metody optymalizacji gradientowej

Istnieje wiele metod optymalizacyjnych wykorzystujących gradient funkcji celu lub jego wartości. Poniżej będą przedstawione tylko niektóre z nich [Fle2000], [Kus2009].

- 1) **Metoda największego spadku** - jedna z najprostszych metod optymalizacji. Jej algorytm wynika z definicji gradientu i jego właściwości. Kierunek, w którym wartości

funkcji maleją najszybciej wyznacza wektor $-\nabla f(\mathbf{x})$, co można zapisać za pomocą wyważenia:

$$\mathbf{d}_i = -\nabla f(\mathbf{x}_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2.1.1)$$

Nawiązując do wcześniej opisanej ogólnej strategii metod gradientowych ciąg punktów przybliżających do minimum zapisujemy wzorem:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - h_i \nabla f(\mathbf{x}_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2.1.2)$$

długość kroku h_i można określić przy pomocy metody stałokrokowej lub zmiennokrokowej.

2) Metoda gradientów sprzężonych - jest najskuteczniejsza w problemach, w których przedmiotem analizy jest funkcja celu będąca formą kwadratową, przyjmującą postać:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c, \quad (3.2.1.3)$$

gdzie \mathbf{A} - macierz dodatnio określona i symetryczna ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$).

Najpopularniejszą metodą w tej grupie jest metoda Fletcher'a-Reeves'a, w której kierunek poszukiwania wyznacza się według zasady:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_0 &= -\nabla f(\mathbf{x}_0), \\ \mathbf{d}_{i+1} &= -\nabla f(\mathbf{x}_{i+1}) + \beta_{i+1} \mathbf{d}_i, \end{aligned} \quad (3.2.1.4)$$

gdzie

$$\beta_{i+1} = \frac{\nabla f(\mathbf{x}_{i+1})^T \nabla f(\mathbf{x}_{i+1})}{\nabla f(\mathbf{x}_i)^T \nabla f(\mathbf{x}_i)} = \frac{(\|\nabla f(\mathbf{x}_{i+1})\|_2)^2}{(\|\nabla f(\mathbf{x}_i)\|_2)^2}. \quad (3.2.1.5)$$

Powyższe wzory wynikają z procesu optymalizacji funkcji celu zadanej w postaci formy kwadratowej.

3) Metoda Newtona - podobnie jak metoda gradientów sprzężonych jest ona szczególnie skuteczna gdy mamy do czynienia z funkcją celu postaci (3.2.1.3). W celu jej zastosowania należy założyć, że hesjan (pochodna cząstkowa drugiego rzędu) jest określony w każdym punkcie.

W tej metodzie kierunek poszukiwań wyznacza się według wzoru:

$$\mathbf{d}_i = -\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}_i) \nabla f(\mathbf{x}_i), \quad (3.2.1.6)$$

gdzie $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ jest hesjanem funkcji f w punkcie \mathbf{x} , a $\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x})$ jest macierzą odwrotną hesjanu. Metoda działa poprawnie w przypadku gdy hesjan jest macierzą nieosobliwą. Należy zwrócić również uwagę, że oprócz standardowych warunków stopu w metodzie wykorzystywane są jeszcze dwa warunki:

a) gdy hesjan jest macierzą nieodwracalną

b) gdy gradient $\nabla f(\mathbf{x}_i) = \mathbf{0}$.

4) Metody quasi-newtonowskie - są nazywane również metodami zmiennej metryki. Różnią się od metody Newtona tym, że zamiast hesjanu i jego odwrotności stosuje się ich aproksymacje, wykorzystując informacje o wektorze gradientu w kolejnych krokach. Metoda znajduje swoje zastosowanie w przypadkach gdy obliczanie macierzy hesjanu i jego odwrotności jest skomplikowane i czasochłonne.

W celu wyznaczenia kierunku optymalizacji korzystamy ze wzoru:

$$\mathbf{d}_i = -\mathbf{V}_i \nabla f(\mathbf{x}_i), \quad (3.2.1.7)$$

gdzie \mathbf{V}_i jest dodatnio określoną macierzą kwadratową, która stanowi przybliżenie odwrotności hesjanu funkcji celu. Poniżej przedstawiono dwie metody wyznaczania macierzy \mathbf{V}_i .

a) Metoda Davidon'a-Fletcher'a-Powell'a (DFP)

W tej metodzie w pierwszej iteracji przyjmuje się, że macierz \mathbf{V}_0 jest macierzą jednostkową \mathbf{I} , a w kolejnych iteracjach jest określona za pomocą następującego wzoru:

$$\mathbf{V}_{i+1} = \mathbf{V}_i + \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i, \quad (3.2.1.8)$$

gdzie macierze \mathbf{A}_i oraz \mathbf{B}_i są obliczane w następujący sposób:

$$\mathbf{A}_i = \frac{\mathbf{a}_i(\mathbf{a}_i)^T}{(\mathbf{a}_i)^T \mathbf{s}_i}, \quad \mathbf{B}_i = \frac{\mathbf{V}_i \mathbf{s}_i (\mathbf{s}_i)^T \mathbf{V}_i}{(\mathbf{s}_i)^T \mathbf{V}_i \mathbf{s}_i}, \quad (3.2.1.9)$$

zakładając, że:

$$\mathbf{s}_i = \nabla f(\mathbf{x}_i) - \nabla f(\mathbf{x}_{i-1}), \quad \mathbf{a}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}. \quad (3.2.1.10)$$

b) Metoda Broyden'a-Fletcher'a-Goldfarb'a-Shanno (BFGS)

W tej metodzie macierz \mathbf{V}_i jest obliczana przy użyciu wzoru:

$$\mathbf{V}_{i+1} = \mathbf{V}_i + (1 + \mathbf{C}_i) \mathbf{A}_i + \mathbf{D}_i, \quad (3.2.1.11)$$

gdzie:

$$\mathbf{A}_i = \frac{\mathbf{a}_i(\mathbf{a}_i)^T}{(\mathbf{a}_i)^T \mathbf{s}_i}, \quad (3.2.1.13)$$

$$\mathbf{C}_i = \frac{(\mathbf{s}_i)^T \mathbf{V}_i \mathbf{s}_i}{(\mathbf{a}_i)^T \mathbf{s}_i}, \quad (3.2.1.14)$$

$$\mathbf{D}_i = -\frac{\mathbf{a}_i (\mathbf{s}_i)^T \mathbf{V}_i + \mathbf{V}_i \mathbf{s}_i (\mathbf{a}_i)^T}{(\mathbf{a}_i)^T \mathbf{s}_i}, \quad (3.2.1.15)$$

\mathbf{s}_i oraz \mathbf{a}_i są wyznaczane jak we wzorze 3.2.1.10.

3.2.2 Metoda SNOPT

SNOPT (ang. Sparse Nonlinear OPTimizer) jest gradientowym algorytmem optymalizacyjnym, którego kod został napisany przez P. E. Gill'a, W. Murray'a i M. A. Saunders'a [Gil1982]. Wykorzystując ten algorytm funkcja celu może przyjąć dowolną formę, a ograniczenia mogą być zastosowane dowolne. SNOPT jest algorytmem uniwersalnym, wykorzystywanym do optymalizacji z ograniczeniami. Minimalizuje funkcje liniowe i nieliniowe z ograniczeniami nałożonymi na zmienne. Jest odpowiedni do programowania liniowego oraz kwadratowego i optymalizacji z ograniczeniami liniowymi jak również do programowania nieliniowego. SNOPT wykorzystuje algorytm sekwencyjnego programowania kwadratowego SQP.

Metoda SQP rozwiązuje ciąg podproblemów optymalizacyjnych. Każdy z nich optymalizuje model kwadratowy funkcji celu przy zlinearyzowanych warunkach ograniczających.

Problem minimalizacji funkcji nieliniowej z nieliniowymi ograniczeniami możemy rozpisać w postaci [Fle2000], [Bri1999], [Bog1995]:

$$\begin{aligned} \text{Minimalizacja} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{z ograniczeniami} \quad & h_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, K \\ & g_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = 1, \dots, J \end{aligned} \quad (3.2.2.1)$$

Rozwinięcie funkcji w szereg Taylora wokół punktu $\bar{\mathbf{x}}$:

$$\begin{aligned} f(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{d}) &= f(\bar{\mathbf{x}}) + [\nabla f(\bar{\mathbf{x}})]^T \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \nabla^2 f(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{d} + \dots \\ h_k(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{d}) &= h_k(\bar{\mathbf{x}}) + [\nabla h_k(\bar{\mathbf{x}})]^T \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \nabla^2 h_k(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{d} + \dots \\ g_j(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{d}) &= g_j(\bar{\mathbf{x}}) + [\nabla g_j(\bar{\mathbf{x}})]^T \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \nabla^2 g_j(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{d} + \dots \end{aligned} \quad (3.2.2.2)$$

Programowanie kwadratowe jest rodzajem programowania nieliniowego, w którym ograniczenia są liniowe. Natomiast funkcja celu jest sumą formy liniowej i formy kwadratowej [Fin1980]. Zadanie programowania kwadratowego ze zlinearyzowanymi ograniczeniami [Fle2000], [Bri1999]:

$$\begin{aligned} \text{Minimalizacja} \quad & f(\mathbf{x}) + [\nabla f(\bar{\mathbf{x}})]^T \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \nabla^2 f(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{d} \\ \text{z ograniczeniami} \quad & h_k(\bar{\mathbf{x}}) + [\nabla h_k(\bar{\mathbf{x}})]^T \mathbf{d} = 0, \quad k = 1, \dots, K \\ & g_j(\bar{\mathbf{x}}) + [\nabla g_j(\bar{\mathbf{x}})]^T \mathbf{d} \leq 0, \quad j = 1, \dots, J \end{aligned} \quad (3.2.2.3)$$

Dla \mathbf{X}_i zagadnienie QP ma postać:

$$\begin{aligned} \text{Minimalizacja} \quad & [\nabla f(\mathbf{X}_i)]^T \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \nabla^2 f(\mathbf{X}_i) \mathbf{d} \\ \text{z ograniczeniami} \quad & [\nabla h_k(\mathbf{X}_i)]^T \mathbf{d} = -h_k(\mathbf{X}_i), \quad k = 1, \dots, K \\ & [\nabla g_j(\mathbf{X}_i)]^T \mathbf{d} \leq -g_j(\mathbf{X}_i), \quad j = 1, \dots, J \end{aligned} \tag{3.2.2.4}$$

Algorytm metody SQP [Bri1999]:

Krok 0: Przyjmujemy: $i=0$ i \mathbf{X}_0

Krok 1: Zdefiniowanie problemu QP dla \mathbf{X}_i .

Krok 2: Wyznaczenie optymalnego kierunku poszukiwania minimum \mathbf{d}_i dla zagadnienia QP z kroku 1.

Krok 3: Jeżeli $\mathbf{d}_i \approx \mathbf{0}$ wtedy STOP;

w przeciwnym razie $\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{X}_i + \mathbf{d}_i$

$i=i+1$, powrót do kroku 1.

SNOPT jest implementacją algorytmu SQP, który wykorzystuje macierz rzadką (Jacobian ograniczeń) i zachowuje ograniczoną pamięć quasi-Newton'owskiej aproksymacji H_k Hessianu funkcji Lagrange'a. Podproblemy QP są rozwiązywane za pomocą metody kontrolującej bezwładność zredukowanego Hessianu, która pozwala zmiennym przyjmować postać zlinearyzowaną zarówno w funkcji celu jak i w funkcjach ograniczeń.

Jeśli problem jest bez ograniczeń, metoda redukuje się do metody Newtona znajdowania zerowego gradientu. Jeśli natomiast problem ma tylko ograniczenia w postaci równości, wtedy metoda jest równoważna zastosowaniu metody Newtona do warunków optymalizacji pierwszego rzędu dla danego problemu.

3.3 Minimalizacja funkcji z ograniczeniami i bez ograniczeń

Rzeczywiste problemy optymalizacyjne (np. w przemyśle) wymagają uwzględnienia różnych ograniczeń, które są zapisywane w postaci zależności matematycznych. Ograniczenia te zawężają zbiór rozwiązań dopuszczalnych i muszą być uwzględnione w całym procesie minimalizacji (maksymalizacji) funkcji celu. Definicja zbioru rozwiązań dopuszczalnych [Kus2009]:

"Zbiór rozwiązań dopuszczalnych $X_d \subset X$ jest to zbiór punktów $\mathbf{x} \in X$, które bierzemy pod uwagę w procesie optymalizacji. Zazwyczaj definiujemy go przez podanie pewnych warunków (ograniczeń), które musi spełniać wektor $\mathbf{x} \in X$, aby należeć do zbioru X_d , np.:

$$g_i(\mathbf{x}) < 0 \quad \text{dla } i = 1, \dots, k, \quad (3.3.1)$$

$$h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{dla } j = 1, \dots, m. \quad (3.3.2)$$

Jeżeli nie określono żadnych ograniczeń, to przyjmujemy, że $X_d = X$. W tej sytuacji gdy $X_d = X = \mathbb{R}^n$, mówimy o optymalizacji bez ograniczeń. W przeciwnym razie (tzn. gdy $X_d \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz $X_d \neq \mathbb{R}^n$) mamy do czynienia z optymalizacją z ograniczeniami."

Przy minimalizacji funkcji celu:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.3.3)$$

przy ograniczeniach jak w powyższej definicji, gdzie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, g_i i h_j są pewnymi funkcjami ograniczającymi zbiór poszukiwań. Zazwyczaj zakłada się, że wszystkie funkcje są przynajmniej ciągłe.

Rozwiązywanie zadań optymalizacji z ograniczeniami ogólnie polega na przeformułowaniu analizowanego zadania tak, aby otrzymać problem stowarzyszony nie zawierający, w sposób jawny, ograniczeń. Należy jednak zwrócić uwagę, aby rozwiązania nowo postawionego problemu były również rozwiązaniami optymalnymi wyjściowej funkcji celu z ograniczonym zbiorem rozwiązań dopuszczalnych. Poniżej zostanie omówiona analityczna metoda - Metoda Lagrange'a - służąca do rozwiązywania problemów minimalizacji funkcji celu z ograniczeniami.

Metoda Lagrange'a polega na wprowadzeniu tzw. funkcji Lagrange'a, którą można opisać wzorem [Kus2009]:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T [b_1 - h_1(\mathbf{x}), \dots, b_m - h_m(\mathbf{x})]^T, \quad (3.3.4)$$

gdzie:

$f(\mathbf{x})$ funkcja celu, która będzie minimalizowana,

$\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, λ_j dla $j = 1, 2, \dots, m$ nazywane są mnożnikami Lagrange'a,

h_j zadane ograniczenie takie, że:

$$h_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{ ma postać} \quad (3.3.5)$$

$$h_j(\mathbf{x}) = b_j \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, m,$$

gdzie b_j są stałymi wartościami granicznymi.

Funkcja zapisana wzorem (3.3.4) (funkcja Lagrange'a) opisuje problem optymalizacyjny bez ograniczeń stowarzyszony z problemem optymalizacji funkcji celu, która jest ograniczona równaniami (3.3.5). W celu znalezienia rozwiązania tego problemu optymalizacji wykorzystuje się twierdzenie Lagrange'a [Kus2009]:

"Jeżeli funkcja Lagrange'a L określona równaniem 3.3.4 ma ciągle pochodne cząstkowe, a $\mathbf{x}^ \in \mathbb{R}^n$ jest rozwiązaniem optymalnym problemu 3.3.3 z ograniczeniami 3.3.5, to istnieje wektor $\boldsymbol{\lambda}^*$ taki, że wszystkie pochodne cząstkowe funkcji Lagrange'a L w punkcie $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ są równe zeru"*

Dzięki powyższemu twierdzeniu można sprowadzić poszukiwane minimum funkcji celu z ograniczeniami do rozwiązań, w których pochodna funkcji Lagrange'a zeruje się. W celu rozwiązania problemu optymalizacyjnego można zatem rozpocząć od poszukiwania wektorów $\boldsymbol{\lambda}$ i \mathbf{x} , które spełniają poniższy warunek [Kus2009]:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{x}}(L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})) &= 0, \\ \nabla_{\boldsymbol{\lambda}}(L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})) &= 0.\end{aligned}\tag{3.3.6}$$

Metoda Lagrange'a pozwala sprowadzić problem optymalizacji z ograniczeniami do rozwiązania problemu stowarzyszonego bez ograniczeń. Taka modyfikacja powoduje jednak wzrost liczby zmiennych optymalizacji.

4. Optymalizacja topologii i problem odwrotny

Celem optymalizacji topologii jest znalezienie optymalnego rozplanowana struktury w określonym obszarze. Dane są jedynie parametry takie jak na przykład siły przyłożone do modelu, podpory, objętość struktury oraz ewentualnie dodatkowe ograniczenia konstrukcyjne jak np. rozmieszczenie i wielkość otworów w badanym modelu. Wymiary, kształt i sposób połączenia struktury nie są znane w tego rodzaju problemach [Ben2003]. W optymalizacji topologii struktur lub materiałów, właściwości są sparametryzowane i przedstawiane najczęściej interpolacją funkcji gęstości. Na rysunkach natomiast przedstawia się właściwości danych materiałów w odcieniach szarości (ang. grey-scale). Czarny kolor oznacza pierwszy materiał, a biały pustkę lub drugi materiał w zależności od tego czy struktura jest jedno- czy dwufazowa. Pośrednie kolory mogą oznaczać fazę przejściową. Taka reprezentacja geometryczna struktury jest podobna do renderowania obrazu w odcieniach szarości, w postaci dyskretnej odpowiadającej grafice rastrowej.

Problemem odwrotnym nazywamy przekształcenie zaobserwowanych pomiarów w informację na temat obiektu fizycznego. Pojęcie problemu odwrotnego dotyczy również rekonstrukcji brakujących informacji w celu oszacowania obciążenia (jego źródeł lub przyczyn) lub wyznaczenia wartości parametrów modelu. W zagadnieniach przepływu ciepła problemy odwrotne odnoszą się do wyznaczania termo - fizycznych właściwości modelu, warunków brzegowych, warunków początkowych etc. na podstawie znanych wartości temperatury wewnątrz modelu oraz innych danych. Przykłady rozwiązywania problemów odwrotnych można znaleźć w [Bla2013], [Bec2009], [Gon2013].

Próbując rozwiązać problem odwrotny należy upewnić się czy zagadnienie jest dobrze sformułowane (ang. well-posed). Co oznacza sprawdzenie czy model fizyczny opisuje zagadnienie w sposób czysto fizyczny i czy jest zgodny z prawami fizyki. Warunki brzegowe nie mogą się wzajemnie wykluczać. Ilość warunków brzegowych nie może być zbyt mała lub zbyt duża. W zagadnieniach przepływu ciepła niezależnych od czasu strumienie ciepła i wewnętrzne źródła ciepła muszą się równoważyć. Zazwyczaj problemy odwrotne są źle sformułowane (ang. ill-posed). Klasycznym przykładem problemu odwrotnego, źle sformułowanego, jest rekonstrukcja temperatury

przy znanej temperaturze i strumieniu ciepła na fragmencie brzegu rozwiązywanego obszaru.

W wielu zastosowaniach optymalna topologia konstrukcji powinna składać się wyłącznie z makroskopowej kombinacji materiału i pustki (ang. void), co oznacza, że sparametryzowana funkcja gęstości przyjmuje wartości '0-1'. Uzyskana w ten sposób optymalna topologia jest nazywana konstrukcją czarno-białą (ang. black-and-white design). Przykład przedstawiono na rysunku 4.1. Niestety ta klasa optymalnych problemów projektowych jest zaliczana do problemów odwrotnych źle sformułowanych.



Rys. 4.1 Przykład konstrukcji czarno-białej [Str2013]

4.1 Optymalizacja topologii

Rozwiązanie w postaci czarno-białej grafiki rastrowej można uzyskać ograniczając przestrzeń rozwiązań dopuszczalnych poprzez parametryzację konstrukcji. Najczęściej stosowanym podejściem jest zastąpienie zmiennych mających wartości całkowite na zmienne w postaci ciągłej oraz wprowadzenie parametru kary, który steruje rozwiązaniem w taki sposób aby otrzymać wartości '0-1'. Kluczowym elementem tych metod jest wprowadzenie funkcji interpolacji, która wyraża różne wielkości fizyczne np. sztywność materiału, przewodność cieplną itp. w zależności od zmiennych w postaci ciągłej [Ben2003].

Istnieje wiele przykładów schematów interpolacyjnych typu materiał-pustka dla właściwości materiałów izotropowych. Przykładem są: model SIMP, model RAMP, model Hashin'a-Shtrikman'a, schemat Reuss'a-Voigt'a itp. Na potrzeby pracy omówione zostaną jedynie pierwsze dwa modele.

4.1.1 model SIMP

Model SIMP (ang. Solid Isotropic Material with Penalization) jest schematem interpolacyjnym stosowanym w celu zamodelowania właściwości materiałów izotropowych [Ben2003]. lub kompozytów dwu- lub wielofazowych. Zakłada się przy tym, że każdy z materiałów wchodzących w skład kompozytu jest materiałem izotropowym. Jednocześnie jednym z „materiałów” w szczególnym przypadku może być „pustka” (często jest to powietrze). Model SIMP typu materiał – pustka „ang. material – void” jest najczęściej stosowany przy rozwiązywaniu problemów optymalizacyjnych w zagadnieniach mechaniki ciała stałego lub też konstrukcji. W literaturze [Zha2014], [Str2013], [San2014], [Hua2010] rozwiązywane są liczne problemy optymalizacji topologii konstrukcji. Jako przykład można tu wymienić optymalizację konstrukcji polegającą na maksymalizacji jej sztywności przy jednoczesnej minimalizacji jej ciężaru bądź przy danym jej ciężarze [Bri2013a], [Bri2013a].

Za pomocą tego modelu można zapisać różne właściwości materiałów i w różnej postaci zależnej od tego czy rozważany model składa się z jednego lub dwóch materiałów lub dwóch materiałów i pustki itp.

Innym przykładem zastosowania schematu interpolacyjnego SIMP może być optymalizacja topologii materiału kompozytowego dwu-fazowego, dla którego przewodność cieplną można zapisać w postaci funkcji rosnącej (wypukłej) (4.1.1.1a) lub malejącej (wklęsłej) (4.1.1.1b):

$$k(r) = k_1 + (k_2 - k_1)r^p, \quad p > 1, \quad k_1 < k_2, \quad (4.1.1.1a)$$

$$k(r) = k_2 + (k_1 - k_2)r^p, \quad p > 1, \quad k_1 < k_2, \quad (4.1.1.1b)$$

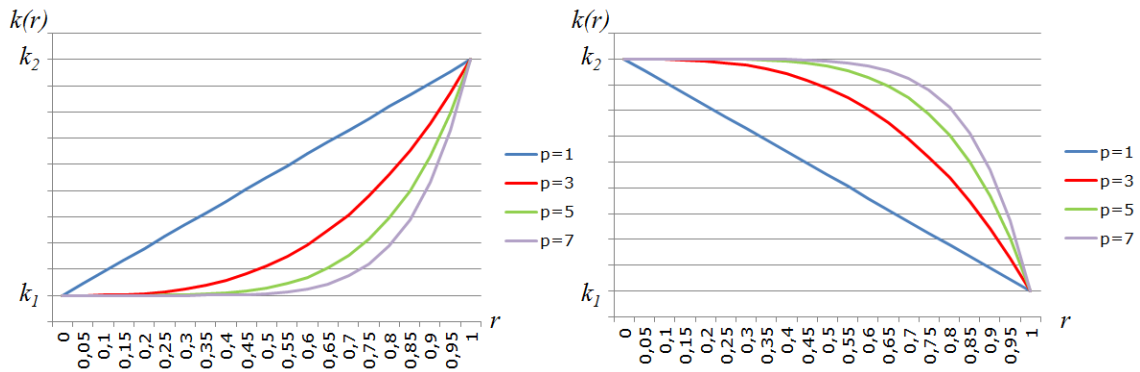
gdzie p jest parametrem kary, r jest zmienną kontrolną, natomiast k_1 i k_2 są wartościami przewodności cieplnej odpowiednio dla pierwszego i drugiego materiału. Analogicznie dla rozważanego modelu materiału można zapisać schematy interpolacyjne dla współczynnika Poissona, modułu Younga czy gęstości.

W rozważanym przykładzie zmienna kontrolna wiąże się z parametrem przewodności cieplnej materiału izotropowego i jest interpolowana od 0 (pierwszy materiał) do 1 (drugi materiał) wykorzystując "schemat kary", który wpływa na rozkład materiału. Wartość parametru kary powyżej 1 gwarantuje, że wartości gęstości 0 (pierwszy materiał) lub 1 (drugi materiał) są bardziej preferowane niż wartości

pośrednie. Używając parametru kary o wartości $p \geq 3$ graficzna reprezentacja optymalnego rozkładu zmiennej kontrolnej ma postać czarno-białej grafiki rastrowej. W przypadku zagadnień związanych z mechaniką konstrukcji wartość parametru kary jest zależna od współczynnika Poissona wykorzystanego materiału i można ją dobrać za pomocą zależności [Ben1999]:

$$p \geq \max \left\{ \frac{2}{1-\nu}, \frac{4}{1+\nu} \right\}. \quad (4.1.1.2)$$

Na rysunku 4.1.1.1 przedstawiono przykładowe wykresy zależności przewodności cieplnej materiału izotropowego $k(r)$ od zmiennej kontrolnej r dla różnych wartości parametru kary p .



Rys. 4.1.1.1 Wykres zależności przewodności cieplnej materiału izotropowego $k(r)$ od zmiennej kontrolnej r dla:
 a) funkcji rosnącej $k(r) = k_1 + (k_2 - k_1)r^p$ b) funkcji malejącej $k(r) = k_2 + (k_1 - k_2)r^p$

Zmienna kontrolna może być również interpretowana jako funkcja gęstości materiału i powinna spełniać następujące warunki [Ben2003]:

$$0 \leq \int_{\Omega} r(x) d\Omega \leq V, \quad 0 \leq r(x) \leq 1. \quad (4.1.1.3)$$

W powyższym wzorze V jest objętością drugiego materiału, który może być rozmieszczony w obszarze projektowym Ω . Optymalny rozkład materiału w rozważanej strukturze może być wyznaczony dla danej funkcji celu i ograniczeń, przypisując każdemu punktowi obszaru wartość zmiennej kontrolnej.

4.1.2 Model RAMP

Innym przykładem schematu interpolacyjnego jest model RAMP (ang. Rational Approximation of Material Properties), czyli aproksymacja właściwości materiału za pomocą funkcji wymiernych. Podobnie jak w przypadku modelu SIMP, również model RAMP można zastosować do jakiegokolwiek właściwości materiału. Jest to duża zaleta w przypadku optymalizacji konstrukcji "czarno-białych". Na potrzeby dalszych rozważań omówiony zostanie model RAMP dla przewodności cieplnej.

Interpolując podatność można operować przewodnością cieplną k_1 oraz k_2 . Najprostsza interpolacja dla odwrotności przewodności cieplnej k jest liniowa i może być zapisana w postaci [Ben2003]:

$$\frac{1}{k(r)} = \frac{1}{k_1} + r \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right). \quad (4.1.2.1)$$

To z kolei odpowiada poniższemu wyrażeniu wymiernemu dla k :

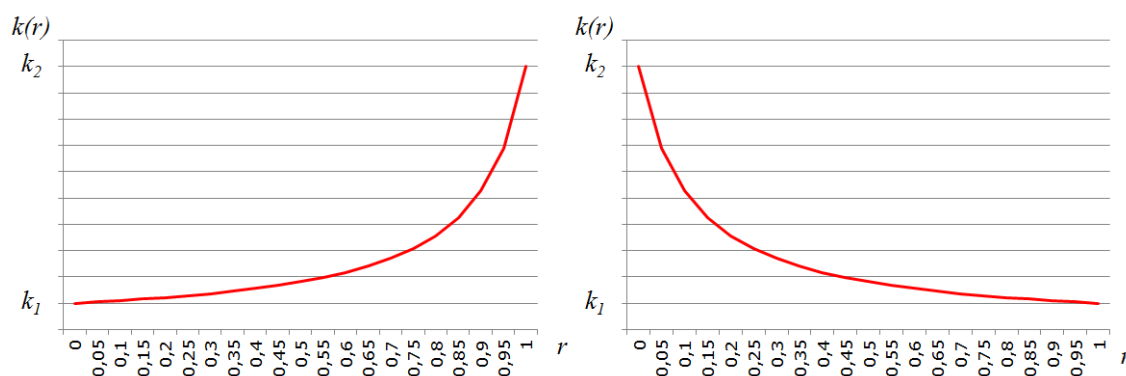
$$k(r) = k_1 + \frac{r}{1 + q(1 - r)} (k_2 - k_1), \quad (4.1.2.2)$$

gdzie $q = \bar{q}$, $\bar{q} \equiv \frac{(k_2 - k_1)}{k_1}$ (odpowiadające temu równanie wg SIMP ma postać: $k = k_1 + r^p(k_2 - k_1)$). Zależność (4.1.2.2) może być również używana dla innych wartości q .

Interpolacja RAMP, w sensie konstrukcyjnym, powoduje zgodność funkcji p jeśli $q = \bar{q}$ lub więcej.

Procedura optymalizacyjna rozpoczyna się dla $q = 0$, a następnie q wzrasta do momentu gdy $q \geq \bar{q}$. Dla tak dużych wartości q zakłada istnienie globalnego rozwiązania optymalnego typu '0-1' dla problemu zdyskretyzowanego za pomocą elementów skończonych [Ben2003].

Na rysunku 4.1.2.1 przedstawiono przykładowe wykresy zależności przewodności cieplnej materiału izotropowego $k(r)$ od zmiennej kontrolnej r .



Rys. 4.1.2.1 Wykres zależności przewodności cieplnej materiału izotropowego $k(r)$ od zmiennej kontrolnej r dla:

a) funkcji rosnącej $\frac{1}{k(r)} = \frac{1}{k_1} + r \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)$.

b) funkcji malejącej $\frac{1}{k(r)} = \frac{1}{k_2} + r \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right)$.

Również w tym przypadku zmienna kontrolna może być interpretowana jako funkcja gęstości materiału.

Szczegóły zastosowania schematów interpolacyjnych SIMP i RAMP można znaleźć w publikacjach [Ben1999], [Ben2003], [Ben2005], [Łuk2014].

4.2 Zastosowanie MES w optymalizacji topologii

W zagadnieniach technicznych jedną z podstawowych metod rozwiązywania zadań brzegowych jest metoda elementów skończonych (MES). Metoda była początkowo wykorzystywana do rozwiązywania zagadnień teorii sprężystości w badaniach kosmicznych (1950 r.) [Tur1956]. W związku z tym, że w wielu początkowo opublikowanych pracach wykorzystywano różne nazwy tej metody, trudno jest dziś jednoznacznie określić pierwszeństwo w opracowaniu MES. Intensywny rozwój MES rozpoczął się w latach 60. XX wieku. Obecnie metoda ta jest wykorzystywana praktycznie we wszystkich dziedzinach nauki.

Główną ideą MES jest zamiana dowolnej wielkości ciągłej, na przykład temperatury, na model dyskretny. Powstały model jest oparty na ograniczonej liczbie węzłów, które definiują ograniczoną liczbę elementów skończonych [Zie2000].

Do najważniejszych zalet MES, w porównaniu z innymi metodami, należy zaliczyć możliwość:

- wykorzystania MES do materiałów wielofazowych oraz materiałów których własności są funkcją temperatury lub innych parametrów,

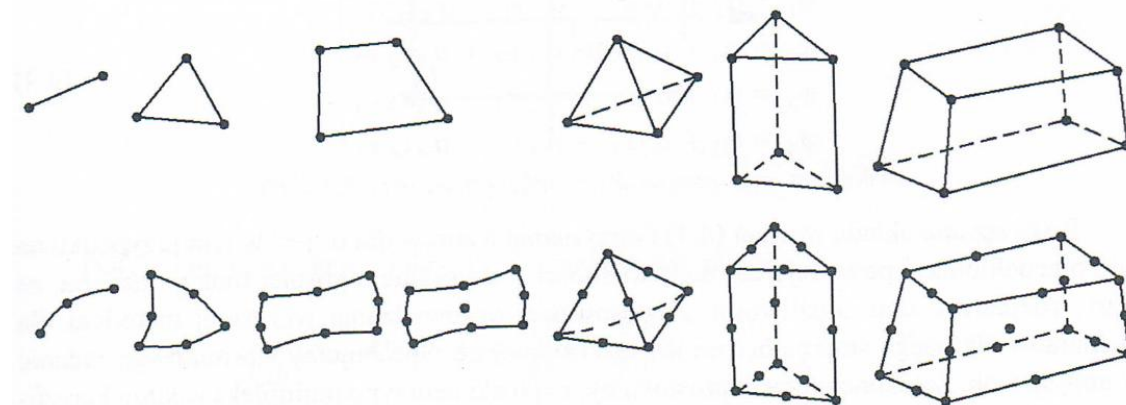
- aproksymacji z dużą dokładnością obszaru o skomplikowanym kształcie dzięki wykorzystaniu elementów krzywoliniowych,
- adaptacji siatki elementów skończonych polegająca na powiększeniu lub pomniejszeniu wymiarów elementów w pewnych rozpatrywanych obszarach,
- uwzględnienia nieliniowych warunków brzegowych.

Główna wada MES polega na konieczności kontroli błędu numerycznego, który może zależeć o parametrów takich jak: gęstość siatki, zmiana warunków brzegowych, zmiana własności materiałowych i inne. Wada ta jednak dotyczy wszystkich metod numerycznych [Mil2010].

MES jest stosowany również do rozwiązywania zagadnień optymalizacji topologii. Optymalny rozkład materiału w rozważanej strukturze może być wyznaczony dla danej funkcji celu i ograniczeń, przypisując każdemu punktowi obszaru wartość zmiennej kontrolnej. W przypadku zastosowania do rozwiązania problemu metody elementów skończonych wartości zmiennej kontrolnej wyznaczone są w węzłach zastosowanych elementów skończonych. Wartości te wyznacza się z wykorzystaniem metody optymalizacyjnej bezgradientowej (np. algorytmu genetycznego) lub gradientowej. W kolejnym kroku wartości zmiennej kontrolnej są interpolowane w każdym elemencie za pomocą wielomianu dobrane odpowiednio dla każdego elementu.

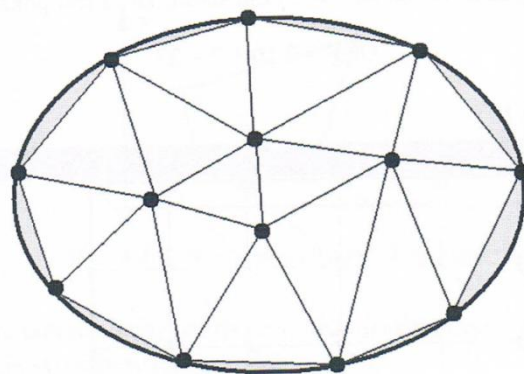
4.3 Wpływ siatki elementów skończonych na rozwiązanie

W przypadku wykorzystania do optymalizacji topologii metody elementów skończonych można zaobserwować wpływ dyskretyzacji modelu na wyniki obliczeń. Dlatego szczególną uwagę należy poświęcić wyborowi rodzaju elementów skończonych.



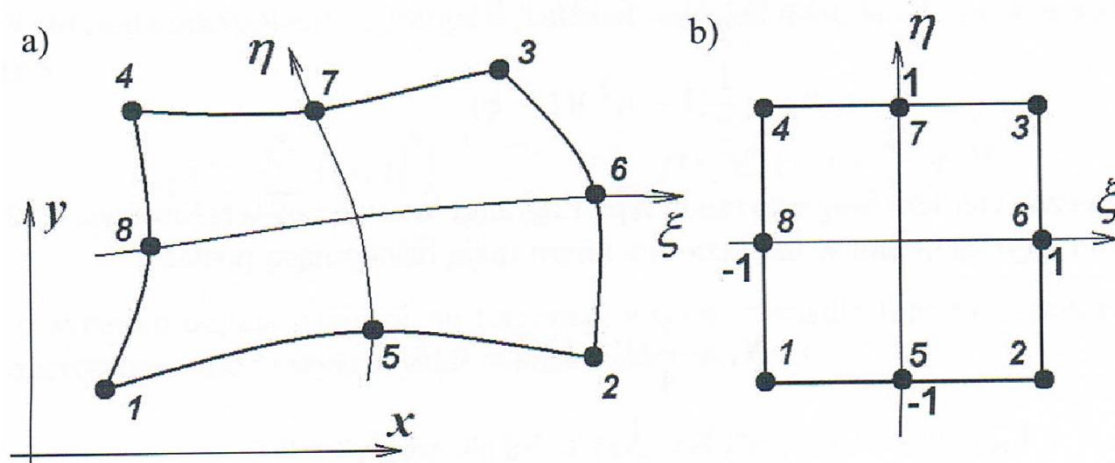
Rys. 4.3.1 Przykłady elementów różnego rzędu [Mil, 2010]

Na rysunku 4.3.1 przedstawiono przykłady elementów rzędu 1D, 2D, 3D. Element nazywamy liniowym (typu simpleks) jeżeli węzły znajdują się tylko w wierzchołkach elementu. W pozostałych przypadkach, gdy węzły są umieszczone również na bokach i/lub wewnątrz elementu, mówimy o elementach wyższego rzędu. Rząd elementu jest zawsze równy rządowi funkcji kształtu (funkcji interpolacyjnych). W wielu przypadkach wykorzystanie elementów typu simpleks może powodować duże błędy numeryczne, co jest związane z aproksymacją kształtu obszaru obliczeniowego za pomocą siatki elementów liniowych. Przykład powstawania błędów w wyniku aproksymacji jest przedstawiony na rysunku 4.3.2.



Rys. 4.3.2 Powstawanie błędów związanych z aproksymacją powierzchni ciała za pomocą siatki elementów typu simpleks [Mil2010]

Jednym z najczęściej stosowanych elementów w modelach 2D jest element kwadratowy, z funkcją kształtu Lagrange'a drugiego stopnia, należący do rodziny elementów serendypowych [Zie2000]. Ośmiowęzłowy element został przedstawiony na rysunku 4.3.3.



Rys. 4.3.3 Element typu serendypowego - numeracja węzłów dwuwymiarowego 8-węzłowego elementu skończonego: a) w globalnym układzie współrzędnych, b) w lokalnym układzie współrzędnych [Mil2010]

Dużą zaletą stosowania elementów trójkątnych jest łatwiejsza generacja siatki elementów skończonych. Wadą natomiast jest zwiększenie błędów numerycznych przy zmianie jednego z wymiaru trójkąta względem pozostałych. W tym samym elemencie w celu interpolacji różnych zmiennych często używane są różne typy interpolacji.

Gęstość zastosowanej siatki ma również wpływ na wynik rozwiązania. Im większa gęstość tym obliczenia dokładniejsze. W przypadku optymalizacji topologii istotna jest nie tylko wartość optymalizowanej funkcji celu ale również rozkład zmiennej kontrolnej. Stosując bardzo małe elementy siatki otrzymujemy dokładniejszy obraz w grafice rastrowej. Ilość elementów skończonych ma jednak wpływ na czas obliczeń, dlatego też gęstość siatki należy dobrać optymalnie.

4.4 Regularyzacja

Jak już wcześniej zostało wspomniane optymalizacja topologii, której wynikiem jest reprezentacja optymalnego rozkładu zmiennej kontrolnej w postaci czarno-białej grafiki rastrowej, zalicza się do klasy optymalnych problemów projektowych odwrotnych źle sformułowanych. Z tego faktu wynikają podstawowe trudności związane z dokładnym określeniem rozkładu materiałów w rozważanym obszarze.

W zagadnieniach technicznych jako standardową metodę rozwiązywania zagadnień źle sformułowanych przyjmuje się metodę regularyzacji Tikhonov'a, zwaną również regularyzacją liniową. Idea regularyzacji polega na wprowadzeniu ograniczeń

na wektor rozwiązań dopuszczalnych. Głównym problemem przy wykorzystaniu tej metody jest dobór parametru regularyzacji.

W przypadku, gdy niżej przedstawione zadanie jest źle postawione [Zdu2002], [Paz2015]:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \quad (4.4.1)$$

gdzie $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M,N}$ jest macierzą współczynników, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ jest wektorem odwzorowania (ang. image vector), natomiast $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$ jest wektorem pomiarów (ang. measurement vector), rozwiązanie wyznacza się przy pomocy metody najmniejszych kwadratów, która pomaga zminimalizować błąd obliczeniowy (ang. residual)

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|^2, \quad (4.4.2)$$

gdzie $\|\cdot\|$ jest normą Euklidesową.

Następnie wykonywana jest minimalizacja:

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{\Gamma x}\|^2, \quad (4.4.3)$$

gdzie $\mathbf{\Gamma}$ jest macierzą Tikhonov'a. W wielu przypadkach macierz ta przyjmuje postać iloczynu $\mathbf{\Gamma} = \alpha \mathbf{I}$, gdzie \mathbf{I} jest macierzą jednostkową dzięki czemu rozwiązania z mniejszą normą są bardziej preferowane. W innych przypadkach stosowane są operatory dolnoprzepustowe (np. operator różniczkowy) w celu wymuszenia gładkości funkcji jeśli wektor bazowy jest uważany za ciągły. Regularyzacja poprawia uwarunkowania problemu, umożliwiając w ten sposób znalezienie bezpośredniego rozwiązania numerycznego. Rozwiązanie można zapisać w postaci [Zdu2002], [Eng2000]:

$$\check{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{\Gamma})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y}, \quad (4.4.4)$$

Regularyzacja może być stosowana do wyznaczania kształtów na podstawie ich zacinienia (ang. shape from shading). W tym celu wykorzystywana jest mapa odbicia (ang. reflectance map) $R(p, q)$. Zakładając, że $z(x, y)$ jest powierzchnią obiektu to p i q są definiowane jako [Ber2002]:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}. \quad (4.4.5)$$

Mając dany obraz $E(x, y)$ oraz mapę odbicia $R(p, q)$ problem wyznaczenia kształtu z zacinienia można traktować jako poprawienie gładkiej powierzchni $z(x, y)$, która spełnia równanie [Ber2002]:

$$E(x, y) = R\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = R(p, q), \quad (4.4.6)$$

Ponieważ obie funkcje są nieznane (p i q) i dane jest tylko jedno równanie, rozwiązanie jest niejednoznaczne i źle sformułowane.

Definiując przestrzeń X jako sumę $L^2(\Omega) \oplus L^2(\Omega)$ i u jako parę $\{p, q\}$ kwadratową funkcję całkowalną można zapisać w postaci [Ber2002]:

$$\|u\|_X^2 = \int_{\Omega} p^2(x, y) dx dy + \int_{\Omega} q^2(x, y) dx dy. \quad (4.4.7)$$

gdzie Ω jest domeną rozważanego obrazu.

5. Modelowanie właściwości termicznych i dynamicznych w materiałach kompozytowych

5.1 Właściwości termiczne materiałów

Wymianą ciepła (przepływem ciepła lub przenoszeniem ciepła) nazywamy sposób w jaki jest przekazywane ciepło na skutek działania otoczenia (zewnętrzne ciepło układu) na układ zamknięty [Wiś2009]. W przypadku układów otwartych energia jest przekazywana również przez granice układu na skutek przepływu substancji w postaci energii kinetycznej, potencjalnej lub entalpii (energii cieplnej).

Rozpraszanie pracy lub energii całkowicie zamienialnej w pracę jest nazywane dyssypacją i skutkuje wzrostem energii wewnętrznej i entropii, tak samo jak doprowadzanie ciepła z zewnątrz do układu. W związku z tym praca lub energia dyssypowana wewnątrz układu jest nazywana ciepłem dyssypacji pracy i występuje w wymianie ciepła przyjmując postać źródeł ciepła, co wynika z rozpraszania energii mechanicznej, elektrycznej lub z występowania reakcji chemicznych [Wiś2009].

Wymiana ciepła występuje pod wpływem różnicy temperatury. Rozpatrując zjawiska wymiany ciepła niezbędna jest znajomość rozkładu temperatury, czyli zbioru wartości temperatur we wszystkich punktach rozpatrywanego ciała w danej chwili. Pole temperatury można zapisać w postaci zależności od współrzędnych przestrzennych i czasu [Wiś2009]:

$$T = f(x, y, z, t).$$

W przypadku gdy pole temperatury zmienia się w czasie to wymiana ciepła jest nieustalona, a gdy nie zmienia się w czasie to mówimy o ustalonej wymianie ciepła.

Wymiana ciepła może się odbywać poprzez przewodzenie, konwekcję i promieniowanie radiacyjne wymianę ciepła. Przewodzenie polega na przekazywaniu energii wewnętrznej między bezpośrednio stykającymi się częściami jednego ciała lub różnych ciał. Konwekcja znajduje swoje zastosowanie w przewodzeniu ciepła w płynach i jest spowodowana ruchem makroskopowych części płynu o różnych temperaturach. Promieniowanie radiacyjne polega na wysyłaniu przez ciała o temperaturze wyższej od temperatury zera bezwzględnej fal elektromagnetycznych obejmujących cały zakres długości fal od zera do nieskończoności. Te trzy sposoby wymiany ciepła występują

równocześnie, ale jeden z nich przeważa nad pozostałymi, dlatego w praktyce inżynierskiej mogą być rozpatrywane jako odrębne zagadnienia [Wiś2009], [Bej2003], [Jan2000].

5.1.1 Równanie Fouriera

Przewodzenie ciepła zazwyczaj przebiega zgodnie z prawem Fouriera, które mówi, że gęstość przewodzonego strumienia ciepła jest wprost proporcjonalna do gradientu temperatury, co można przedstawić za pomocą wzoru [Wiś2009]:

$$\mathbf{q} = -k\nabla T, \quad (5.1.1.1)$$

gdzie \mathbf{q} to strumień ciepła $\left[\frac{W}{m^2}\right]$, k - przewodność cieplna $\left[\frac{W}{m K}\right]$, ∇T - gradient temperatury [K]. W prawie Fouriera znak minus wynika z tego, że ciepło płynie zgodnie ze spadkiem temperatury.

Równanie ogólne dla przewodzenia ciepła w kartezjańskim układzie współrzędnych może być przedstawione za pomocą bilansu energii i zapisane wzorem:

$$-\nabla \cdot (k\nabla T) + \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = Q, \quad (5.1.1.2)$$

gdzie: ρ to gęstość materiału $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$, C_p - ciepło właściwe materiału $\left[\frac{J}{kg K}\right]$, Q - gęstość mocy źródła ciepła $\left[\frac{W}{m^3}\right]$.

Korzystając z równania (5.1.1.2) równanie Fouriera dla stacjonarnego zagadnienia przewodzenia ciepła można zapisać w postaci:

$$-\nabla \cdot (k\nabla T) = Q. \quad (5.1.1.3)$$

5.1.2 Warunki brzegowe

Warunki brzegowe określają warunki wymiany ciepła na powierzchniach zewnętrznych ciała i mogą być określone na różne sposoby. Poniżej przedstawione warunki brzegowe mają szczególne zastosowanie praktyczne [Wiś2009].

a) Warunek Dirichleta - jest warunkiem brzegowym pierwszego rodzaju; określa rozkład temperatury T_0 na powierzchni ciała w każdej chwili, co można zapisać wzorem:

$$T = T_0. \quad (5.1.2.1)$$

b) Warunek Neumana - jest warunkiem brzegowym drugiego rodzaju; określa rozkład gęstości strumienia ciepła q_0 na powierzchni ciała w każdej chwili:

$$-\mathbf{n} \cdot (-k\nabla T) = q_0. \quad (5.1.2.2)$$

c) Warunek Fouriera - jest warunkiem brzegowym trzeciego rodzaju; polega na zdefiniowaniu strumienia ciepła normalnego do powierzchni jako iloczynu różnicy temperatury na brzegu i temperatury T_{ext} płynu otaczającego ciało oraz współczynnika przejmowania ciepła h na powierzchni ciała w każdej chwili:

$$-\mathbf{n} \cdot (-k\nabla T) = h(T_{\text{ext}} - T). \quad (5.1.2.3)$$

d) Warunek symetrii, warunek izolacji termicznej - strumień ciepła normalny do powierzchni wynosi zero:

$$-\mathbf{n} \cdot (-k\nabla T) = 0, \quad (5.1.2.4)$$

gdzie: T_0 – temperatura na powierzchni ciała [K], \mathbf{n} – wektor w kierunku normalnym, q_0 – gęstości strumienia ciepła na powierzchni ciała [W/m^2], h - współczynnik przejmowania ciepła [$\text{W}/\text{m}^2\text{K}$], T_{ext} – temperatura otoczenia [K].

5.1.3 Całkowita energia termiczna

Wewnętrzna energia termiczna jest iloczynem ciepła właściwego $C_p \left[\frac{\text{J}}{\text{kgK}} \right]$ i temperatury T [K], co można zapisać za pomocą równania:

$$E_t = C_p T, \quad (5.1.3.1)$$

w którym temperaturę oblicza się przy wykorzystaniu równia Fouriera.

Całkowitzą średnią energię termiczną można zapisać w postaci zależności:

$$E_{t \text{ avg}} = \frac{1}{A} \int_{\Omega} E_t d\Omega, \quad (5.1.3.2)$$

gdzie Ω odnosi się do rozważanej domeny, E_t jest wewnętrzną energią termiczną, natomiast A jest polem rozważanej domeny Ω .

Uzależniając powyższą funkcję od zmiennej kontrolnej $r = r(x)$ otrzymujemy funkcję celu dla problemu optymalizacyjnego:

$$E_{t \text{ avg}}(r) = \frac{1}{A} \int_{\Omega} E_t(r) d\Omega. \quad (5.1.3.3)$$

Zagadnienia optymalizacyjne będą rozważane w dalszej części rozprawy.

5.2 Właściwości dynamiczne materiałów

Jednym z elementów analizy właściwości dynamicznych materiałów jest wyznaczenie częstotliwości drgań własnych oraz postaci drgań własnych struktury z pominiętym tłumieniem. Te wskaźniki charakteryzują zachowanie się struktury i jej odpowiedź na działanie siły dynamicznej. Istnieje wiele powodów dla których wykonywana jest analiza dynamiczna. Jednym z nich jest oszacowanie dynamicznej interakcji między komponentem a strukturą, do której jest przymocowany, jak np. klimatyzatory zamontowane na dachu budynku. W takim przypadku niezbędne jest sprawdzenie czy częstotliwość pracy klimatyzatora nie jest zbyt bliska częstotliwości drgań własnych budynku. Innym przykładem jest wykorzystanie wyników analizy właściwości dynamicznych do porównania z wynikami uzyskanymi w testach rzeczywistych. W takich sytuacjach wyniki analizy mogą pomóc wykonać eksperyment np. wskazać miejsca, w których należy zamieścić akcelerometry. Wyznaczenie częstotliwości drgań własnych oraz postaci drgań własnych struktury jest również wykorzystywane w projektowaniu konstrukcji. Po przeprowadzeniu poszczególnych zmian konstrukcyjnych można sprawdzić ich wpływ na właściwości dynamiczne danej konstrukcji.

W kolejnych podrozdziałach omówione zostaną następujące zagadnienia: równanie Navier'a, obciążenia harmoniczne, częstości własne, wpływ częstotliwości drgań wymuszających na amplitudę drgań struktury oraz całkowita energia odkształcenia.

5.2.1 Związki konstytutywne - uogólnione prawo Hooke'a

Związki konstytutywne opisują zależności między naprężeniami i odkształceniami. Związki te odzwierciedlają właściwości materiału.

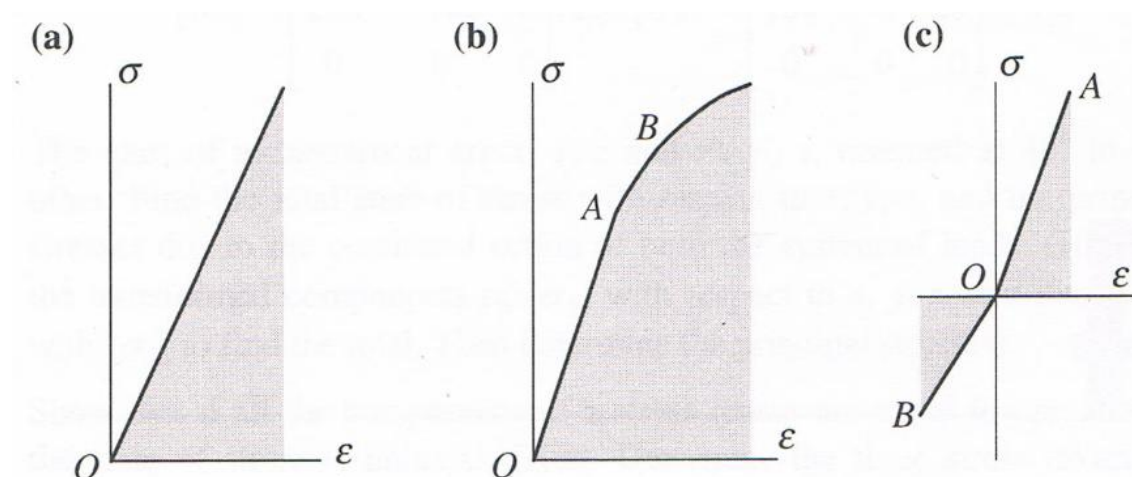
Rozważane w pracy materiały, wchodzące w skład rozważanych struktur kompozytowych, są homogeniczne i liniowo elastyczne. Materiałem homogenicznym nazywamy kompozycję, która jest jednolita w całej objętości ciała stałego. Jeżeli skład materiału zmienia się na przestrzeni objętości ciała stałego materiał taki nazywamy heterogenicznym. Mimo że wszystkie materiały na poziomie mikroskopowym są heterogeniczne, homogeniczność jest ważnym założeniem w teorii kontinuum w

przypadku większości rozważanych materiałów inżynierskich. Jeżeli ciało stałe jest wykonane z różnych części homogenicznych to mówimy, że jest ono odcinkowo homogeniczne.

Ciało stałe nazywamy sprężystym jeśli wraca do postaci nieodkształconej po usunięciu przyłożonego obciążenia. Jeżeli zależność między naprężeniami i odkształceniami ma charakter liniowy, wtedy ciało stałe nazywamy liniowo sprężystym. Analogicznie, jeżeli zależność między naprężeniami i odkształceniami jest nieliniowa mówimy o zachowaniu nieliniowo sprężystym. W przypadku gdy po usunięciu przyłożonego obciążenia ciało stałe uległo trwałej lub cząstkowej deformacji mamy do czynienia z zachowaniem elastoplastycznym. Zachowanie lepkosprężyste pojawia się gdy zależność między naprężeniami i odkształceniami jest zależna od czasu.

Istnieją również materiały bimodularne, których wartości modułu sprężystości różnią się od siebie dla rozciągania i ściskania. Przykładem takiego materiału jest beton zbrojony.

Na rysunku 5.2.1.1 przedstawiono jednoosiowe krzywe zależności między naprężeniami i odkształceniami dla przypadku: liniowo sprężystego, nieliniowo sprężystego oraz materiału bimodularnego. W dalszej części pracy rozważane będą zależności liniowo sprężyste.



Rys. 5.2.1.1 Jednoosiowe krzywe zależności między naprężeniami i odkształceniami dla przypadku: a) liniowo sprężystego, b) nieliniowo sprężystego, c) materiału bimodularnego [Ame2005]

Dla większości materiałów ustalony jest zakres wartości naprężeń w którym zachowują się one w sposób liniowo sprężysty. Od punktu A, na rysunku 5.2.1.1 b), nazywanego granicą proporcjonalności, rozpoczyna się krzywa nieliniowej zależności między naprężeniami i odkształceniami i kończy się w punkcie B, nazywanym granicą sprężystości. Powyżej tej granicy materiał przestaje być sprężysty i pojawiają się odkształcenia trwałe.

Uogólnioną zależność między naprężeniami i odkształceniami dla materiału liniowo sprężystego można zapisać za pomocą uogólnionego prawa Hook'a [Ame2005]:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 D_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad i, j = 1 \text{ do } 3, \quad (5.2.1.1)$$

które zawiera łącznie $3^4 = 81$ stałych materiałowych D_{ijkl} . Tensor czwartego rzędu D_{ijkl} jest nazywany tensorem konstytutywnym. Ponieważ tensor naprężeń σ_{ij} i tensor odkształceń ε_{kl} są symetryczne (np. $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ i $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$) liczba stałych materiałowych redukuje się do 36. Wzór 5.2.1.1 można zatem zapisać w postaci [Ame2005]:

$$\sigma_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^6 D_{\alpha\beta} \varepsilon_{\beta}, \quad \alpha = 1 \text{ do } 6 \quad (5.2.1.2)$$

oraz w postaci macierzowej:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (5.2.1.3)$$

która w pełnej formie jest opisana zależnością 5.2.1.4:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & D_{55} & D_{56} \\ D_{61} & D_{62} & D_{63} & D_{64} & D_{65} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}. \quad (5.2.1.4)$$

Macierz \mathbf{D} , pojawiająca się w powyższych wzorach, jest nazywana macierzą konstytutywną. Zależność odwrotna może być zapisana w postaci [Ame2005]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma}, \quad (5.2.1.5)$$

gdzie \mathbf{C} jest macierzą zgodności. Z powyższych wzorów można wywnioskować, że:

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1}. \quad (5.2.1.6)$$

Macierz \mathbf{D} , jako odwrotność macierzy zgodności, jest również nazywana macierzą sztywności. Tensor odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}$ może być zapisany w postaci:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T), \quad (5.2.1.7)$$

gdzie \mathbf{u} jest wektorem przemieszczeniem.

W przypadku ciał stałych homogenicznych, izotropowych i liniowo sprężystych istnieją tylko dwie niezależne stałe materiału sprężystego. Poniżej omówione będą moduł Younga (E) i współczynnik Poissona (ν).

Moduł sprężystości materiału E jest definiowany jako stosunek naprężeń normalnych do odkształceń normalnych w przypadku jednoosiowego obciążenia, co można zapisać w postaci [Ame2005]:

$$E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \frac{\sigma_y}{\varepsilon_y} = \frac{\sigma_z}{\varepsilon_z}, \quad (5.2.1.8)$$

kiedy tylko σ_x , σ_y lub σ_z działają w punkcie.

Współczynnik Poissona ν jest definiowany jako ujemny stosunek odkształcenia poprzecznego do odkształcenia wzdłużnego przy osiowym stanie naprężenia. Na przykład odkształcenia w kierunku osi y przy zadanym naprężeniu osiowym σ_x można opisać współczynnikiem Poissona [Ame2005]:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}. \quad (5.2.1.9)$$

W przypadku złożonego stanu trzech naprężeń normalnych σ_x , σ_y i σ_z odkształcenie normalne ε_x ma postać [Ame2005]:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}, \quad (5.2.1.10)$$

Analogicznie, pozostałe dwa odkształcenia normalne można zapisać wzorami:

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}, \\ \varepsilon_z &= -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}, \end{aligned} \quad (5.2.1.11)$$

Powyższe zależności pokazują, że odkształcenie normalne, w przypadku materiałów izotropowych, nie jest zależne od naprężeń ścinających. Podobnie też naprężenia ścinające wpływają jedynie na odkształcenia ścinające, co można zapisać [Ame2005]:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \text{ oraz } \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \quad (5.2.1.12)$$

gdzie G jest modułem Kirchhoffa (modułem sprężystości poprzecznej) zależnym od E i ν :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (5.2.1.13)$$

Całkowita zależność między naprężeniami i odkształceniami może być zapisana w postaci macierzowej [Ame2005]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}. \quad (5.2.1.14)$$

Związek między naprężeniami i odkształceniami, dla trójwymiarowego ciała izotropowego liniowo sprężystego uzyskuje się poprzez odwrócenie powyższej macierzy zgodności [Ame2005]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1+2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}. \quad (5.2.1.15)$$

5.2.2 Równanie ruchu Navier'a-Cauchy'ego

Równanie ruchu dla materiału liniowo sprężystego, zapisane zgodnie z drugim prawem Newtona, ma postać [Lau2005]:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}. \quad (5.2.2.1)$$

gdzie: \mathbf{F} jest siłą masową pominiętą w dalszych rozważaniach ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$), ρ jest gęstością ciała stałego. W przypadku izotropowym prawo Hooke'a ma postać [Hof2000], [Mas1970]:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\delta_{ij}. \quad (5.2.2.2)$$

We wzorze 5.2.2.2 δ_{ij} jest deltą Kronecker'a, natomiast λ i μ są stałymi Lamé'go, które mają postać:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}. \quad (5.2.2.3)$$

Ogólne równanie ruchu dla izotropowego ciała stałego dla liniowego związku konstytutywnego między naprężeniami i odkształceniami można zapisać w postaci równania Navier'a-Cauchy'ego [Lau2005], [Hof2000], [Gou1994]:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - (\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})) = \mathbf{0}. \quad (5.2.2.4)$$

Przemieszczenia harmoniczne z częstością kołową ω i okresem $\frac{2\pi}{\omega}$ spełniają równanie [Lau2005]:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{u}. \quad (5.2.2.5)$$

Ogólne rozwiązanie powyższego równania jest liniową superpozycją dwóch niezależnych od czasu pól fali stojącej $\mathbf{u}_1(\mathbf{x})$ i $\mathbf{u}_2(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}) \cos \omega t + \mathbf{u}_2(\mathbf{x}) \sin \omega t. \quad (5.2.2.6)$$

W celu ułatwienia obliczeń wektor przemieszczeń można zapisać w postaci zespolonej dla pola niezależnej od czasu fali stojącej:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}) + i\mathbf{u}_2(\mathbf{x}). \quad (5.2.2.7)$$

Przemieszczenia harmoniczne stają się częścią rzeczywistą postaci zespolonej 5.2.2.7 i spełniają równanie:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{R}e[\mathbf{u}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}]. \quad (5.2.2.8)$$

Natomiast prędkość przemieszczeń stanowi 5.2.2.7 spełnia równanie:

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \omega \mathcal{I}m[\mathbf{u}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}]. \quad (5.2.2.9)$$

Na podstawie powyższych równań można zapisać równanie ruchu dla przypadku harmonicznego:

$$-\rho\omega^2 \mathbf{u} - (\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})) = \mathbf{0}. \quad (5.2.2.10)$$

Na podstawie powyższych wzorów można obliczyć wychylenie w danym punkcie dla przemieszczenia harmonicznego, co umożliwia wyznaczenie odpowiedzi układu na wymuszenie harmoniczne w postaci krzywej.

5.2.3 Częstotliwości własne i postacie drgań własnych

Równanie 5.2.2.10 po uproszczeniu można zapisać w postaci zagadnienia własnego dla tensora naprężenia [Gou1994], [www01], [Mas1970], [Gol2000], [Sad2009]:

$$\begin{aligned} (\sigma_{ij}u_j - \Lambda u_i) &= 0 \\ (\sigma_{ij}u_j - \Lambda \delta_{ij}u_j) &= 0 \\ (\sigma_{ij} - \Lambda \delta_{ij})u_j &= 0 \end{aligned} \quad (5.2.3.1)$$

gdzie $\sigma_{ij} = \mu\delta_{ij}\nabla^2 + (\lambda + \mu)\nabla_i\nabla_j$ jest macierzą kwadratową, $\Lambda = -\rho\omega^2$ jest wartością własną, a u_j jest wektorem własnym.

Równanie 5.2.3.1 jest układem trzech równań homogenicznych dla czterech niewiadomych: u_j dla $j=1, 2, 3$ oraz Λ . Komponenty u_j wyznaczają orientację płaszczyzn głównych, natomiast Λ jest nazywana naprężeniem głównym.

Rozwiązanie powyższego problemu można sprowadzić do znalezienia pierwiastków równania charakterystycznego:

$$|\sigma_{ij} - \Lambda\delta_{ij}| = 0 \quad (5.2.3.2)$$

oraz wyznaczenia postaci drgań własnych u_j . Po rozwiązaniu tak sformułowanego zagadnienia wartości własne Λ_j stanowią kwadraty częstości własnych. Wektory własne u_j przedstawiają postacie drgań odpowiadające odpowiednim wartościom własnym.

5.2.4 Całkowita energia odkształcenia

W poniższym rozdziale zostanie omówiona całkowita energia odkształcenia, która jest absorbowana przez strukturę w trakcie przykładania obciążenia. W przypadku gdy siła zewnętrzna działa na ciało wykonywana jest praca mechaniczna, która przekształca się w energię kinetyczną i potencjalną. Siła nagromadzona w materiale w wyniku jego odkształceń jest nazywana energią odkształcenia. Całkowita energia odkształcenia ciała poddanego obciążeniu ma wtedy postać [Ame2005]:

$$E_s = \int_{\Omega} U_0 d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega. \quad (5.2.4.1)$$

Całkowitą energię odkształcenia można wyrazić za pomocą ilorazu energii i objętości, stąd jednostkę całkowitej energii odkształcenia można zapisać $\left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right]$. Maksymalną sztywność kompozytu (zależność między odkształceniami w ciele i zadaną siłą), w zadaniach optymalizacji topologii można zapisać w postaci energii odkształcenia [Ame2005], [Lee2008]:

$$c(r) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}(r) \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega, \quad (5.2.4.2)$$

takiej, że:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}(r) \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{F} u d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} u ds, \quad (5.2.4.3)$$

gdzie: V - odnosi się do zaprojektowanego obszaru, \mathbf{F} jest zadaną siłą, natomiast $\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$.

Wykorzystując model SIMP, opisany w rozdziale 4.1.1, macierz sztywności można zapisać w postaci [Ben2003]:

$$\mathbf{D}(r, \mathbf{x}) = r(\mathbf{x})^p \mathbf{D}_0, \text{ dla } p > 1 \text{ i } \mathbf{x} \in \Omega. \quad (5.2.4.4)$$

W powyższym równaniu \mathbf{D}_0 jest macierzą sztywności dla rozważanego materiału izotropowego, a p jest parametrem kary.

6. Wykorzystanie metod bezgradientowych w problemach termicznych

W rozdziale zaprezentowano wyniki numeryczne obliczeń wykonanych za pomocą metody hybrydowej polegającej na połączeniu algorytmu Nelder-Meada z metodą elementów skończonych, która może być wykorzystana do optymalizacji różnych zagadnień. Jako przykłady zostały przedstawione wyniki symulacji wyznaczania parametrów termicznych dla modeli materiałów: jednorodnego oraz ze strukturą funkcjonalnie gradientową (FGM) o zmiennym w przestrzeni współczynniku przewodzenia ciepła. Przedstawiona metoda obliczeniowa może być skuteczną alternatywą eksperymentalnego wyznaczania parametrów termicznych kompozytów. Kod programu został zaprezentowany w Załączniku 1, na końcu pracy. W rozdziale przedstawiono jedynie część wyników badań, pozostałe zostały opublikowane w artykule Nienartowicz i współautora [Nie2012b].

6.1 Rekonstrukcja parametrów termicznych w modelu 1D

W badaniach, jako pierwsza została wykonana symulacja przewodzenia ciepła w jednowymiarowym modelu (odcinek o długości 1 [m]) z warunkami brzegowymi w postaci warunku Fouriera.

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (k\nabla T) &= h_1(T_{\text{ext}1} - T), \\ \mathbf{n} \cdot (k\nabla T) &= h_2(T_{\text{ext}2} - T). \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

Na podstawie danego rozkładu temperatury w obszarze $T(x)$ wyznaczono parametry termiczne zagadnienia: k – współczynnik przewodzenia ciepła, h_1 i h_2 – współczynniki przejmowania ciepła na brzegach obszaru, oraz temperaturę zewnętrzną $T_{\text{ext}1}$, $T_{\text{ext}2}$ wokół obu końców obszaru. Rekonstrukcja wymienionych parametrów odbyła się za pomocą optymalizacji algorytmem Nelder-Meada. Symulację wykonano w dwóch etapach.

6.1.1 Etap I

W pierwszym etapie oczekiwany rozkład temperatury miał postać:

$$\bar{T}(x) = 18.75x + 287.5. \tag{6.1.1.1}$$

Natomiast minimalizowana funkcja celu została zdefiniowana w postaci całki:

$$F = \int_0^1 \text{Abs}(T(x) - \bar{T}(x)) dx = \int_0^1 \text{Abs}(T(x) - (18.75x + 287.5)) dx. \quad (6.1.1.2)$$

Na szukane parametry zostały nałożone następujące ograniczenia:

$$\begin{aligned} 80 < k < 120, \\ 8 < h_1 < 12, \\ 15 < h_2 < 25, \\ 80 < T_{\text{ext}1} < 120, \\ 350 < T_{\text{ext}2} < 450. \end{aligned}$$

Sympleks startowy dla poszczególnych parametrów został przedstawiony w tabeli 6.1.1.1

k	h_1	h_2	$T_{\text{ext}1}$	$T_{\text{ext}2}$
80	8	15	80	350
120	12	25	120	450
82	9	18	90	360
110	11	24	119	420
101	8	17	89	360
110	11	21	111	444

Tabela 6.1.1.1 Sympleks startowy dla etapu I

Wymagana dokładność rozwiązania $\varepsilon = 1e - 2$ została osiągnięta po 45 krokach z wartością $F=0.1801$ dla poniższego zestawu parametrów:

Parametr	k	h_1	h_2	$T_{\text{ext}1}$	$T_{\text{ext}2}$
p_{min}	101.0347	9.8034	20.0654	101.9420	396.8020

Tabela 6.1.1.2 Wartości zminimalizowanych parametrów p_{min}

Jak przedstawiono w tabeli 6.1.1.2 wartości wyznaczonych parametrów znajdują się w ustalonych przedziałach.

6.1.2 Etap II

Drugim etapem badań numerycznych była optymalizacja parametrów termicznych materiału, w którym współczynnik przewodności cieplnej jest zależny od zmiennej przestrzennej x , jak na przykład w materiałach typu FGM (tworzywa gradientowe). W takich materiałach rozkład temperatury przy zadanych warunkach brzegowych najczęściej jest nieliniowy. W pracy przyjęto wielomianową postać zmian $k(x)$:

$$k(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2. \quad (6.1.2.1)$$

Do obliczeń przyjęto poniższe warunki brzegowe w postaci warunku Dirichleta (temperatura różna na obu końcach):

$$T = T_{01} = 283 [K],$$

$$T = T_{02} = 483 [K]. \quad (6.1.2.2)$$

Wektor parametrów ma postać: $\mathbf{p}=[p_0, p_1, p_2]$.

W etapie II oczekiwany rozkład temperatury miał postać:

$$\bar{T}_I(x)=286.25-170.513x+2398.87x^2-3898.57x^3+2133.67x^4-265x^5. \quad (6.1.2.3)$$

Natomiast minimalizowana całka miała postać:

$$I_1 = \int_0^1 \text{Abs}(T(x) - (286.25 - 170.513x + 2398.87x^2 - 3898.57x^3 + 2133.67x^4 - 265x^5)) dx. \quad (6.1.2.4)$$

Sympleks startowy dla poszczególnych parametrów został przedstawiony w tabeli 6.1.2.1:

Wierzchołki, p_{ij}	p_{i0}	p_{i1}	p_{i2}
p_{1j}	10	-150	100
p_{2j}	30	-50	200
p_{3j}	15	-120	120
p_{4j}	25	-80	180

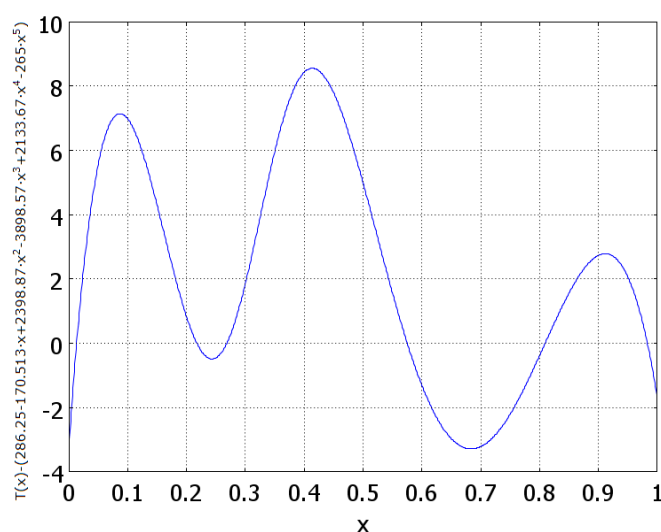
Tabela 6.1.2.1 Sympleks startowy dla etapu II

Wymagana dokładność rozwiązania $\varepsilon = 1e - 6$ została osiągnięta po 61 krokach z wartością $F=2.9492$ dla poniższego zestawu parametrów:

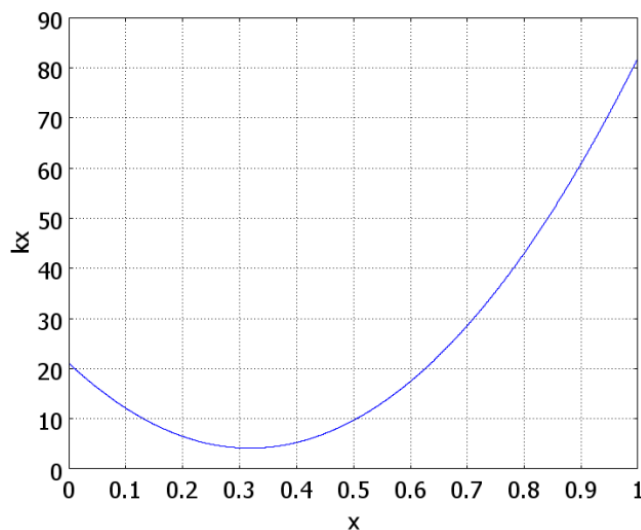
Parametr	p_0	p_1	p_2
p_{\min}	21.1025	-106.6785	167.7030

Tabela 6.1.2.2 Wartości zminimalizowanych parametrów p_{\min}

Na rysunku 6.1.2.1 przedstawiono różnicę między oczekiwanym i otrzymanym rozkładem temperatury. Rozkład współczynnika przewodności cieplnej, dla $k(x, p_{\min})$ przedstawiono na rysunku 6.1.2.2.



Rys. 6.1.2.1 Różnica między oczekiwanym i otrzymanym rozkładem temperatury

Rys. 6.1.2.2 Rozkład współczynnika przewodności cieplnej, dla $k(x, p_{\min})$

6.2 Rekonstrukcja parametrów termicznych dla wymiany ciepła w domenie 2D

W kolejnych symulacjach podjęto próbę wyznaczenia przewodności cieplnej w obszarze 2D. Analizie został poddany osiowo symetryczny model cylindra o promieniu $r=1$ [m] i wysokości $z=1$ [m]. Za oś symetrii przyjęto $r=0$. Założono również, że rozkład współczynnika przewodności cieplnej ma postać wielomianu:

$$k(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3. \quad (6.2.1)$$

Warunki brzegowe przyjęto w postaci warunków Dirichleta. Temperatury na górze i na dole cylindra miały wartości $T_{01} = 400$ [K] i $T_{02} = 300$ [K]. Dla osi $r=0$ przyjęto osiowość symetryczną, a na obwodzie cylindra przyjęto izolację termiczną.

Również w tym przypadku nałożono ograniczenia na wyniki. Minimalizacji poddana była funkcja celu I , która jest sumą trzech całek i przyjmuje postać:

$$I = I1 + 5(1 - I2) + 5(1 - I3), \quad (6.2.2)$$

gdzie $I1$ – bezwzględna wartość z różnicy między oczekiwanym a otrzymanym rozkładem temperatury:

$$I1 = \int_0^1 \text{Abs}(T(z) - \bar{T}(z)) dz, \quad (6.2.3)$$

$I2$ – określona część domeny, dla której spełniona jest zależność $k(z) > k_{\min}$, gdzie k_{\min} jest minimalną wartością, $I3$ – określona część domeny, dla której spełniona jest zależność $k(z) < k_{\max}$, gdzie k_{\max} jest maksymalną wartością

Oczekiwany rozkład temperatury miał postać:

$$\bar{T}_1(z) = 300.481 + 171.955z - 72.9167z^2. \quad (6.2.4)$$

Natomiast całka $I1$ została zdefiniowana, jako:

$$I1 = \int_0^1 \text{Abs} \left(T(z) - (300.481 + 171.955z - 72.9167z^2) \right) dz. \quad (6.2.5)$$

Na potrzeby obliczeń przyjęto trzy sympleksy startowe, które zestawiono w tabeli 6.2.1.

	Wierzchołki, p_{ij}	p_{i0}	p_{i1}	p_{i2}	p_{i3}
Sympleks startowy A (najwęższy)	p_{1j}	20	110	-55	0
	p_{2j}	30	120	-50	1
	p_{3j}	40	130	-45	1
	p_{4j}	50	140	-40	0
	p_{5j}	25	140	-60	1
Sympleks startowy B (szerszy)	p_{1j}	50	200	-65	5
	p_{2j}	-40	-100	-90	15
	p_{3j}	45	180	5	20
	p_{4j}	80	90	-10	25
	p_{5j}	70	180	-120	30
Sympleks startowy C (najszerszy)	p_{1j}	100	400	-70	10
	p_{2j}	-50	-200	-130	20
	p_{3j}	50	250	20	100
	p_{4j}	110	20	-150	250
	p_{5j}	100	200	-300	70

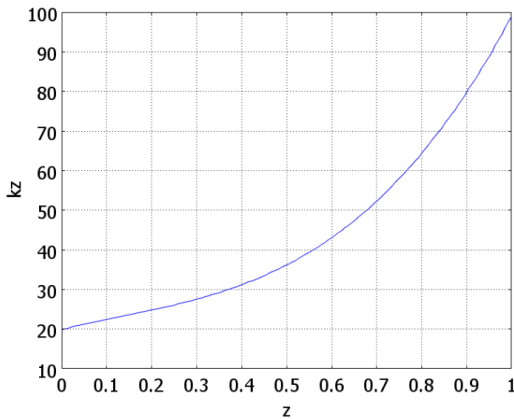
Tabela 6.2.1 Sympleksy startowe przyjęte do obliczeń

Na współczynnik przewodności cieplnej nałożono ograniczenia takie, że $k_{\min}=20$ a $k_{\max}=120$, zatem współczynnik $k(z)$ był poszukiwany w zakresie $20 < k(z) < 120$. Wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli 6.2.2.

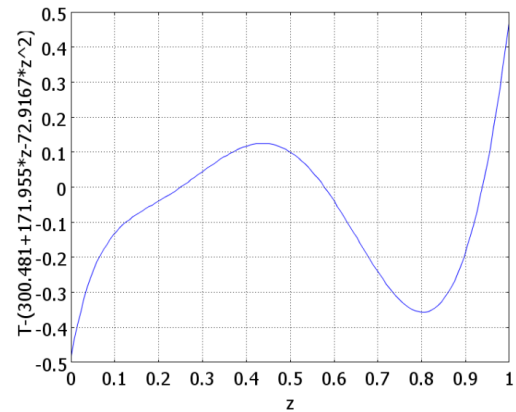
Sympleks	Kroki	p_{i0}	p_{i1}	p_{i2}	p_{i3}	F_{\min}
A	255	1.98993e+1	2.71751e+1	-3.02331e+1	8.22635e+1	1.54875e-1
B	208	2.11709e+1	1.24838e+1	1.17308e+1	4.99511e+1	3.02988e-1
C	121	1.99063e+1	2.77594e+1	-3.17098e+1	8.33822e+1	1.50866e-1

Tabela 6.2.2 Wartości zminimalizowanych parametrów p_{\min} dla sympleksów startowych A, B i C

Dla sympleksu A rozkład współczynnika przewodności cieplnej dla zminimalizowanej wartości funkcji celu I w postaci (6.2.2) przedstawiono na rysunku 6.2.1. Na rysunku 6.2.2 zaprezentowano różnicę między oczekiwanym a otrzymanym rozkładem temperatury, który waha się między -0.5 a 0.47.

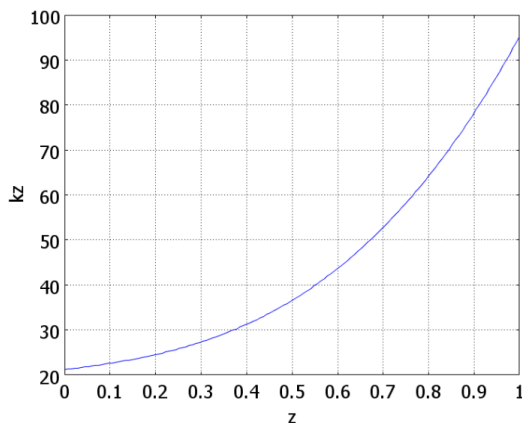


Rys. 6.2.1 Rozkład przewodności cieplnej (sympleks A)

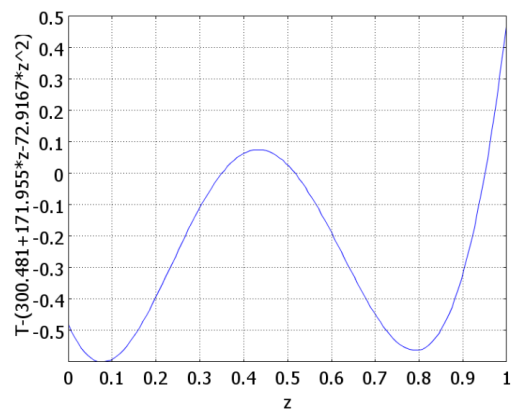


Rys. 6.2.2 Różnica między oczekiwanym a otrzymanym rozkładem temperatury (sympleks A)

Dla sympleksu B rozkład współczynnika przewodności cieplnej dla zminimalizowanej wartości funkcji celu I w postaci (6.2.2) przedstawiono na rysunku 6.2.3. Na rysunku 6.2.4 przedstawiono różnicę między oczekiwanym a otrzymanym rozkładem temperatury, który waha się między -0.6 a 0.45.

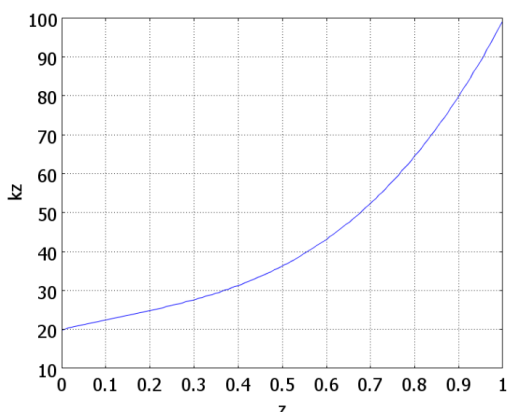


Rys. 6.2.3 Rozkład przewodności cieplnej (sympleks B)

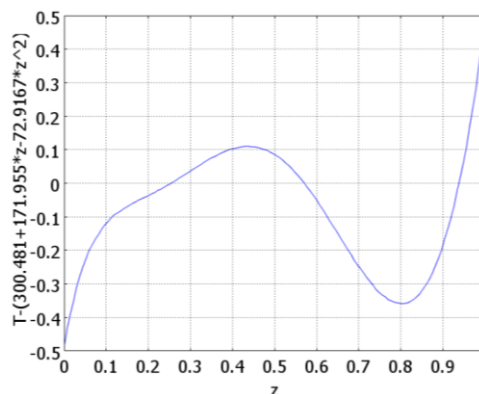


Rys. 6.2.4 Różnica między oczekiwanym a otrzymanym rozkładem temperatury (sympleks B)

Dla sympleksu C rozkład przewodności cieplnej dla zminimalizowanej wartości funkcji celu I w postaci (6.2.2) przedstawiono na rysunku 6.2.5. Na rysunku 6.2.6 przedstawiono różnicę między oczekiwanym a otrzymanym rozkładem temperatury, który waha się między -0.48 a 0.46.



Rys. 6.2.5 Rozkład przewodności cieplnej (sympleks C)



Rys. 6.2.6 Różnica między oczekiwanym a otrzymanym rozkładem temperatury (sympleks C)

We wszystkich przypadkach osiągnięto wynik z dokładnością $\varepsilon = 1e - 5$ zdefiniowaną wzorem (3.1.1.12). Rozkład temperatury jest podobny dla wszystkich sympleksów.

6.3 Podsumowanie wyników

Jak przedstawiono powyżej, korzystając z metody hybrydowej (Nelder-Mead z MES) istnieje możliwość przeprowadzenia rekonstrukcji parametrów. Przeprowadzając symulację dla określonych modeli i zdefiniowanych warunków brzegowych można wyznaczyć parametry takie jak: współczynnik przewodzenia ciepła materiału izotropowego lub FGM, współczynniki powierzchniowej wymiany ciepła na brzegach obszaru oraz temperatura zewnętrzna wokół obu końców obszaru. Wartości tych parametrów mogą być obliczone w taki sposób, aby znajdowały się w określonych zakresach odpowiednich dla badanego materiału. Istnieje również możliwość wyznaczenia współczynnika przewodności cieplnej w postaci wielomianu jak np. dla materiałów typu FGM.

7. Optymalizacja struktury kompozytu

W celu zoptymalizowania średniej wartości temperatury, średniej wartości modułu gradientu temperatury oraz średniej wartości energii termicznej w modelu 2D kompozytu wykonane zostały symulacje komputerowe, których wyniki przedstawiono w tym rozdziale. Obliczenia zostały przeprowadzone przy wykorzystaniu metody elementów skończonych oraz metody optymalizacyjnej SNOPT z zastosowanym modelem SIMP.

Kompozyt składał się z dwóch różnych materiałów (z różnymi współczynnikami przewodności cieplnej). Rozważanymi materiałami były bizmut i mosiądz (stop 70% miedzi i 30% cynku). Przewodność cieplna pierwszego materiału wynosi $k_1 = 10 \left[\frac{\text{W}}{\text{mK}} \right]$ a drugiego $k_2 = 100 \left[\frac{\text{W}}{\text{mK}} \right]$. Każda z symulacji została przeprowadzona dla dwuwymiarowych modeli o różnych kształtach oraz z różnymi warunkami brzegowymi. Część powierzchni obszaru wykorzystanej do rozkładu drugiego materiału została określona za pomocą współczynnika A_{frac} , który przyjmuje odpowiednio wartości 0.1 lub 0.2 i 0.4. Przykładowo $A_{\text{frac}}=0.1$ oznacza, że materiał drugi zajmuje $A_{\text{frac}} \cdot 100\% = 10\%$ obszaru kompozytu. W rozdziale 7.1 przedstawiono wyniki obliczeń dla poszczególnych modeli.

Rysunki zmiennej kontrolnej, które będą zaprezentowane w kolejnych rozdziałach są reprezentacją grafiki rastrowej w kolorze czerwono-niebieskim. Kolor niebieski - wartość zmiennej kontrolnej $r = 0$ - odpowiada pierwszemu materiałowi, z przewodnością cieplną k_1 . Natomiast kolor czerwony - wartość zmiennej kontrolnej $r = 1$ - odpowiada drugiemu materiałowi, z przewodnością cieplną k_2 . Kolory pośrednie oznaczają warstwę przejściową pomiędzy oboma materiałami.

W rozważanych poniżej przypadkach optymalizowana funkcja celu przyjmowała formę całki zarówno dla przypadku minimalizacji średniej wartości temperatury (wzór 7.1) jak i średniej wartości modułu gradientu temperatury (wzór 7.2).

$$T_{\text{avg}} = \frac{1}{A} \int_{\Omega} T d\Omega, \quad (7.1)$$

$$|gradT|_{avg} = \frac{1}{A} \int_{\Omega} |gradT| d\Omega. \quad (7.2)$$

Na powyższe funkcje celu zostały nałożone ograniczenia. Pierwsze z nich to ograniczenie punktowe:

$$0 < r(\mathbf{x}) < 1 \text{ dla każdego } \mathbf{x} \in \Omega, \quad (7.3)$$

gdzie r jest zmienną kontrolną.

Drugie ograniczenie ma postać całkową:

$$0 < \int_{\Omega} r(\mathbf{x}) d\Omega < A_{frac} \cdot A. \quad (7.4)$$

gdzie A to pole powierzchni obszaru kompozytu $A = \int_{\Omega} d\Omega$.

Na potrzeby obliczeń przewodność cieplna została zapisana za pomocą schematu interpolacyjnego SIMP wg wzoru 4.1.1.1.

7.1 Optymalizacja bez regularyzacji

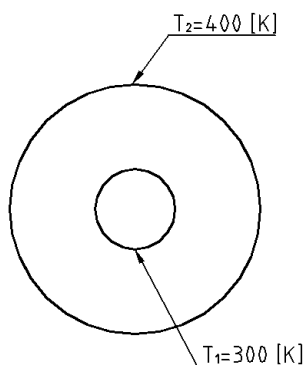
W kolejnych podrozdziałach zostaną zaprezentowane wyniki obliczeń dla optymalizacji topologii bez regularyzacji. Dzięki odpowiednio dobranej siatce elementów skończonych uzyskane wyniki są dokładne, dzięki czemu regularyzacja nie była konieczna. W rozdziałach 7.2 i 7.3 omówione zostaną przykłady obliczeniowe z regularyzacją i bez regularyzacji w celu porównania efektów obliczeń.

7.1.1 Maksymalizacja i minimalizacja średniej wartości temperatury

Dla pierwszej grupy modeli wykonano optymalizację średniej wartości temperatury. Symulacje wykonano dla modeli zdefiniowanych na: obszarze pierścienia, obszarze kwadratowym z wyciętym obszarem kwadratowym oraz obszarze kwadratowym z zadany warunkiem brzegowym Fouriera w postaci parametrycznej. Wyniki obliczeń zostały porównane z wynikami symulacji przeprowadzonych dla kompozytów warstwowych - laminatów - o takich samych wymiarach i warunkach brzegowych jak dla struktur kompozytowych.

7.1.1.1 Model kompozytu zdefiniowany na obszarze pierścienia

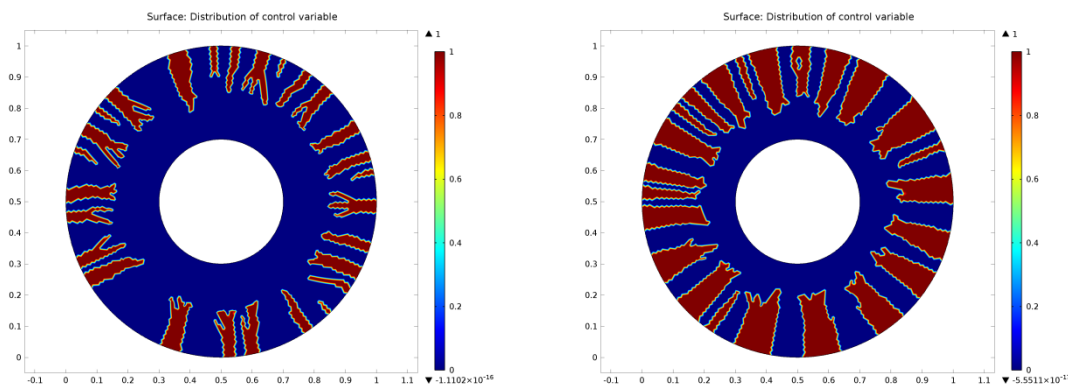
Model kompozytu zdefiniowany na obszarze pierścienia miał średnicę zewnętrzną równą 1[m], i średnicę wewnętrzną równą 0.4[m]. Wewnątrz i na zewnątrz modelu założono warunek Dirichleta o wartościach temperatur równych odpowiednio $T_1=300$ [K] i $T_2=400$ [K]. Źródło ciepła dla rozważanego przypadku jest równe $Q = 0 \frac{W}{m^3}$. Na rysunku 7.1.1.1 przedstawiono warunki brzegowe dla modelu zdefiniowanego na obszarze pierścienia. Model został zdyskretyzowany siatką składającą się z 20668 trójkątnych elementów z funkcją kształtu Lagrange'a drugiego rzędu.



Rys. 7.1.1.1.1 Warunki brzegowe dla modelu kompozytu zdefiniowanego na obszarze pierścienia

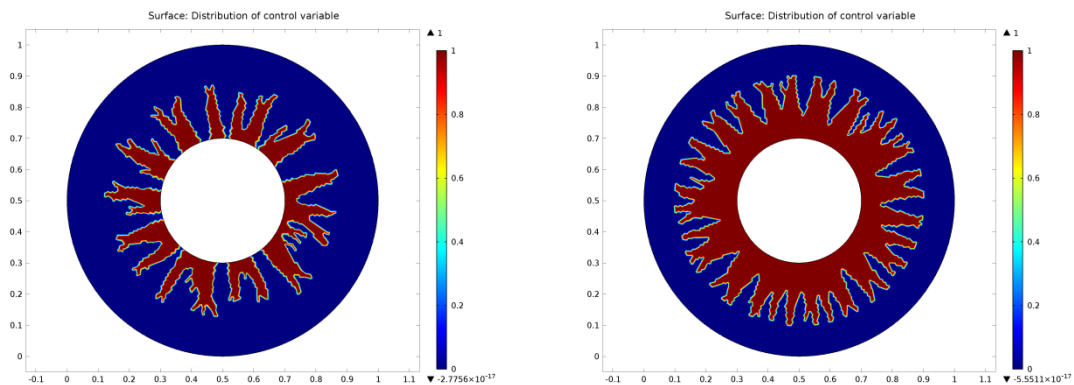
Poniżej zestawiono wyniki obliczeń dla maksymalizacji i minimalizacji średniej wartości temperatury w rozważanej domenie dla różnych parametrów A_{frac} .

Na rysunku 7.1.1.1.2a przedstawiono rozkład zmiennej kontrolnej w przypadku maksymalizacji dla $A_{frac} = 0.2$, a na rysunku 7.1.1.1.2b dla $A_{frac} = 0.4$. Wartości średniej temperatury wyniosły odpowiednio $T_{avg}=375.71$ [K] i $T_{avg}=380.84$ [K].



Rys. 7.1.1.1.2 Rozkład zmiennej kontrolnej w przypadku maksymalizacji T_{avg} :
a) dla $A_{frac} = 0.2$ b) dla $A_{frac} = 0.4$

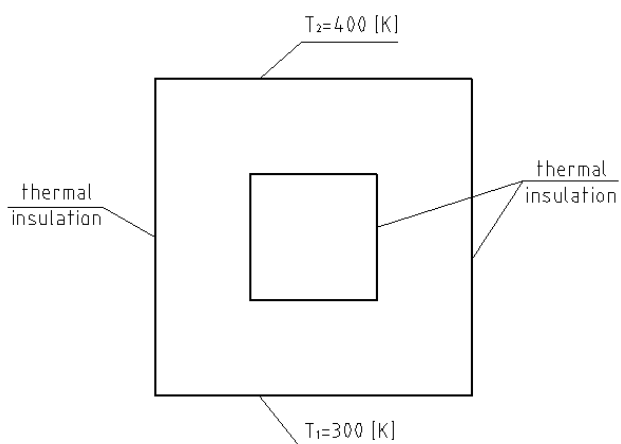
Na rysunku 7.1.1.1.3a przedstawiono rozkład zmiennej kontrolnej w przypadku minimalizacji dla $A_{\text{frac}} = 0.2$, a na rysunku 7.1.1.1.3b dla $A_{\text{frac}} = 0.4$. Wartości średniej temperatury wyniosły odpowiednio $T_{\text{avg}}=345.52[\text{K}]$ i $T_{\text{avg}}=338.49[\text{K}]$.



Rys. 7.1.1.1.3 Rozkład zmiennej kontrolnej w przypadku minimalizacji T_{avg} :
a) dla $A_{\text{frac}} = 0.2$ b) dla $A_{\text{frac}} = 0.4$

7.1.1.2 Model kompozytu zdefiniowany na obszarze kwadratowym z wyciętym obszarem kwadratowym

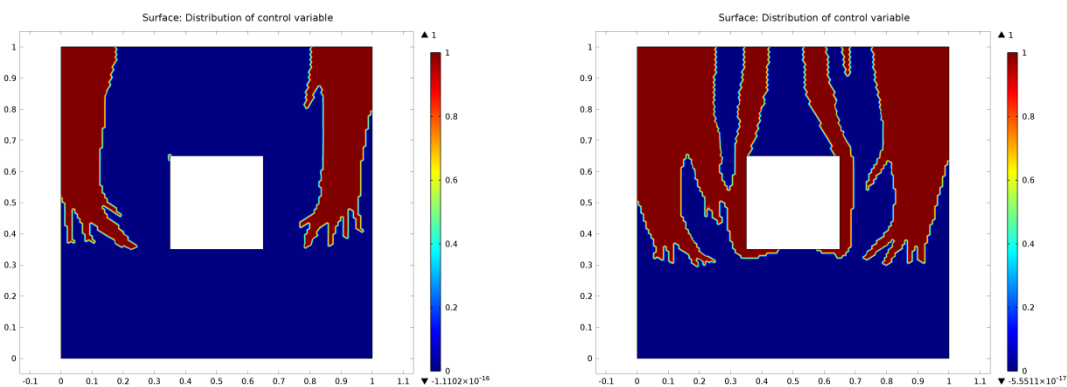
Model kompozytu zdefiniowany na obszarze kwadratowym miał wymiary zewnętrzne $1[\text{m}] \times 1[\text{m}]$, a wycięty obszar kwadratowy miał wymiary $0.3[\text{m}] \times 0.3[\text{m}]$. Na górnym i dolnym brzegu, na zewnątrz obszaru, założono warunek Dirichleta o wartościach temperatur wynoszących odpowiednio $T_1=300[\text{K}]$ i $T_2=400[\text{K}]$, natomiast na lewym i prawym brzegu oraz wewnątrz modelu założono warunek izolacji termicznej, źródło ciepła dla rozważanego przypadku jest równe $Q = 0 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right]$. Na rysunku 7.1.1.2.1 przedstawiono warunki brzegowe dla rozważanego modelu. Model został zdyskretyzowany siatką składającą się z 20668 trójkątnych elementów z funkcją kształtu Lagrange'a drugiego rzędu.



Rys. 7.1.1.2.1 Warunki brzegowe dla modelu kompozytu zdefiniowanego na obszarze kwadratowym z wyciętym obszarem kwadratowym

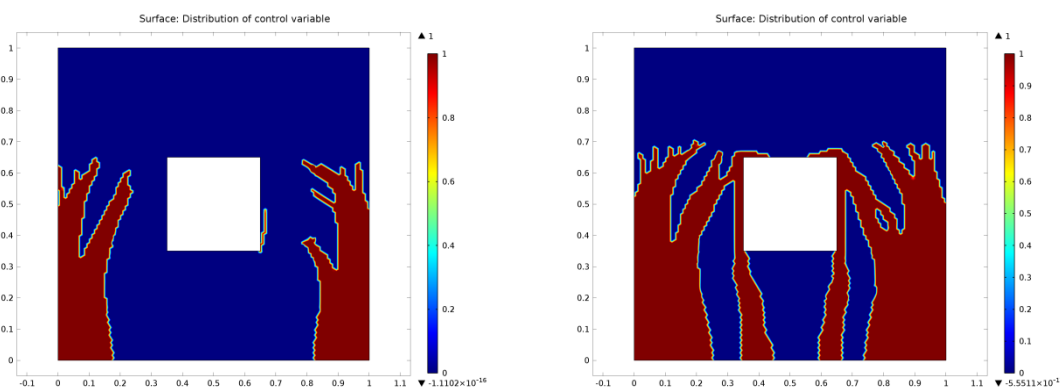
Poniżej zestawiono wyniki obliczeń dla maksymalizacji i minimalizacji średniej wartości temperatury w rozważanej domenie dla różnych parametrów A_{frac} .

Na rysunku 7.1.1.2.2a przedstawiono rozkład zmiennej kontrolnej w przypadku maksymalizacji dla $A_{frac} = 0.2$, a na rysunku 7.1.1.2.2b dla $A_{frac} = 0.4$. Wartości średniej temperatury wyniosły odpowiednio $T_{avg}=363.74[K]$ i $T_{avg}=369.20[K]$.



Rys. 7.1.1.2.2 Rozkład zmiennej kontrolnej w przypadku maksymalizacji T_{avg} :
a) dla $A_{frac} = 0.2$ b) dla $A_{frac} = 0.4$

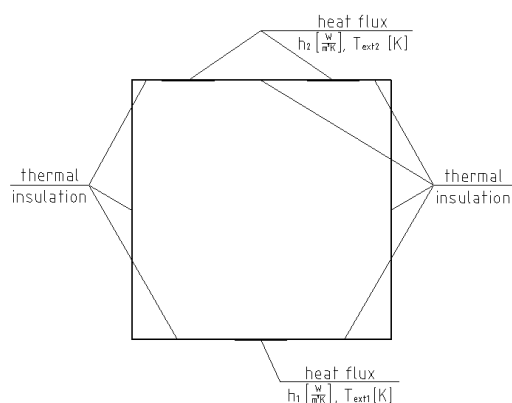
Na rysunku 7.1.1.2.3a przedstawiono rozkład zmiennej kontrolnej w przypadku minimalizacji dla $A_{\text{frac}} = 0.2$, a na rysunku 7.1.1.2.3b dla $A_{\text{frac}} = 0.4$. Wartości średniej temperatury wyniosły odpowiednio $T_{\text{avg}} = 336.33[\text{K}]$ i $T_{\text{avg}} = 330.8[\text{K}]$.



Rys. 7.1.1.2.3 Rozkład zmiennej kontrolnej w przypadku minimalizacji T_{avg} :
a) dla $A_{\text{frac}} = 0.2$ b) dla $A_{\text{frac}} = 0.4$

7.1.1.3 Model kompozytu zdefiniowany na obszarze kwadratowym z zadaniem warunkiem brzegowym Fouriera w postaci parametrycznej

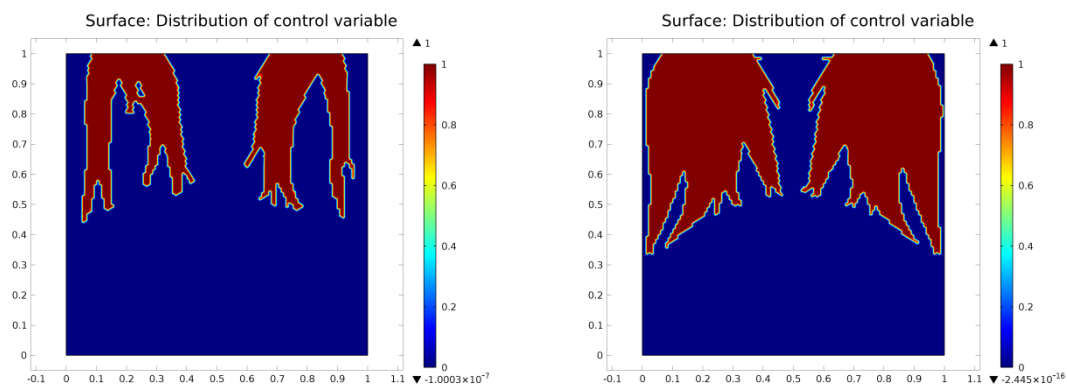
Model kompozytu zdefiniowany na obszarze kwadratowym miał wymiary zewnętrzne $1[\text{m}] \times 1[\text{m}]$. Na dolnym brzegu, na odcinku o długości $0.2[\text{m}]$ zadano warunek Fouriera ze zmiennymi h_1 i $T_{\text{ext}1}$. Na górnym brzegu na dwóch odcinkach o długości $0.2[\text{m}]$ zadano warunek Fouriera ze zmiennymi h_2 i $T_{\text{ext}2}$. Na wszystkich pozostałych brzegach założono izolację termiczną. Źródło ciepła dla rozważanego przypadku jest równe $Q = 0 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right]$. Warunki brzegowe przedstawiono na rysunku 7.1.1.3.1. Rozważono trzy przypadki obliczeniowe (minimalizacji T_{avg} dla dwóch różnych wartości A_{frac}) pierwszy dla $h_1 > h_2$, kolejny dla $h_1 < h_2$ i trzeci dla $h_1 = h_2$. Model został zdyskretyzowany siatką składającą się z 24902 trójkątnych elementów z funkcją kształtu Lagrange'a drugiego rzędu.



Rys. 7.1.1.3.1 Warunki brzegowe dla modelu kompozytu zdefiniowanego na obszarze kwadratowym z zadany warunkiem Fouriera

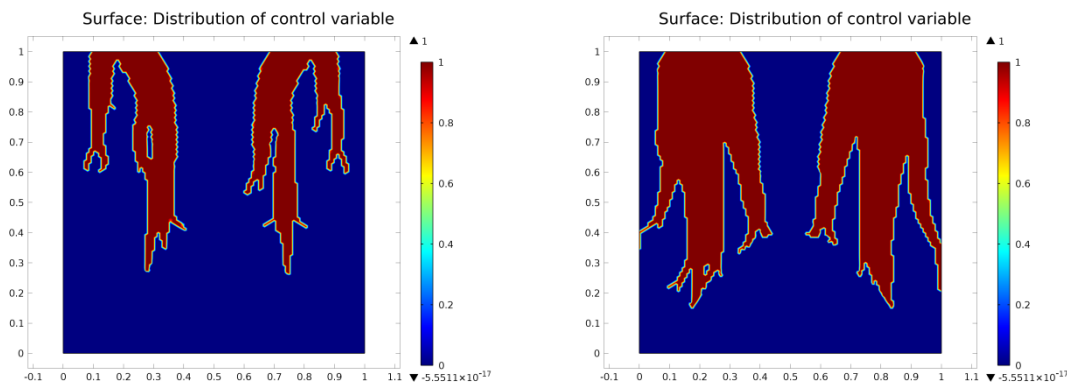
Poniżej zestawiono wyniki obliczeń dla minimalizacji średniej wartości temperatury w rozważanej domenie dla różnych parametrów A_{frac} i różnych wariantów zależności h_1 od h_2 .

Na rysunku 7.1.1.3.2a przedstawiono rozkład zmiennej kontrolnej w przypadku minimalizacji dla $h_1 > h_2$ i $A_{\text{frac}} = 0.2$, a na rysunku 7.1.1.3.2b dla $h_1 > h_2$ i $A_{\text{frac}} = 0.4$. Wartości średniej temperatury wyniosły odpowiednio $T_{\text{avg}} = 345.06[\text{K}]$ i $T_{\text{avg}} = 344.8[\text{K}]$.



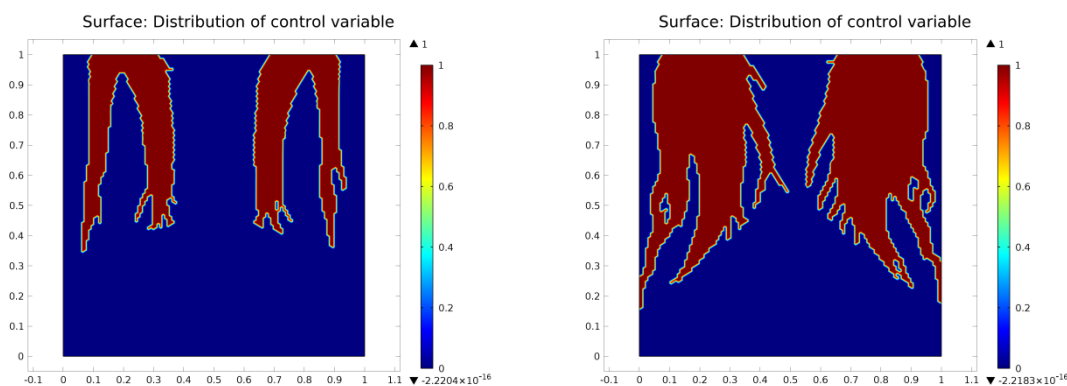
Rys. 7.1.1.3.2 Rozkład zmiennej kontrolnej w przypadku minimalizacji T_{avg} dla $h_1 > h_2$:
a) dla $A_{\text{frac}} = 0.2$ b) dla $A_{\text{frac}} = 0.4$

Na rysunku 7.1.1.3.3a przedstawiono rozkład zmiennej kontrolnej w przypadku minimalizacji dla $h_1 < h_2$ i $A_{\text{frac}} = 0.2$, a na rysunku 7.1.1.3.3b dla $h_1 < h_2$ i $A_{\text{frac}} = 0.4$. temperatury wyniosły odpowiednio $T_{\text{avg}} = 320.08[\text{K}]$ i $T_{\text{avg}} = 319.42[\text{K}]$.



Rys. 7.1.1.3.3 Rozkład zmiennej kontrolnej w przypadku minimalizacji T_{avg} dla $h_1 < h_2$:
a) dla $A_{\text{frac}} = 0.2$ b) dla $A_{\text{frac}} = 0.4$

Na rysunku 7.1.1.3.4a przedstawiono rozkład zmiennej kontrolnej w przypadku minimalizacji dla $h_1 = h_2$ i $A_{\text{frac}} = 0.2$, a na rysunku 7.1.1.3.4b dla $h_1 = h_2$ i $A_{\text{frac}} = 0.4$. temperatury wyniosły odpowiednio $T_{\text{avg}} = 331.82[\text{K}]$ i $T_{\text{avg}} = 331.49[\text{K}]$.

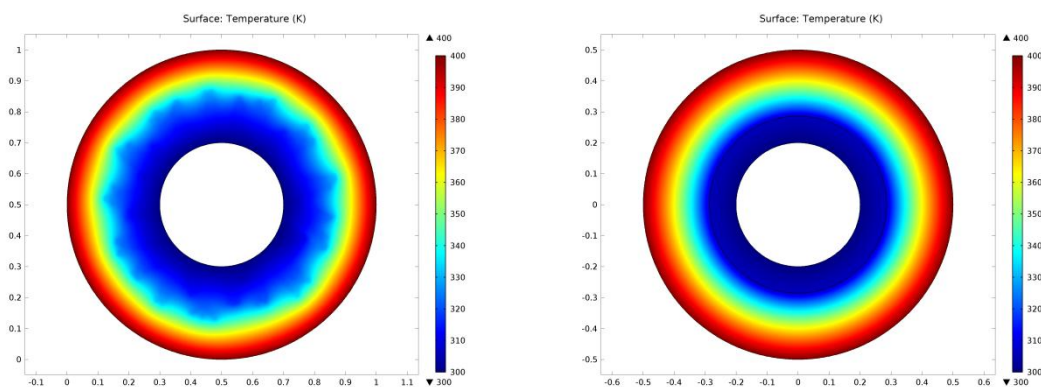


Rys. 7.1.1.3.4 Rozkład zmiennej kontrolnej w przypadku minimalizacji T_{avg} dla $h_1 = h_2$:
a) dla $A_{\text{frac}} = 0.2$ b) dla $A_{\text{frac}} = 0.4$

7.1.1.4 Porównanie wyników obliczeń

Wyżej przedstawione rezultaty zostały porównane z wynikami uzyskanymi dla modeli kompozytów warstwowych o takich samych kształtach i warunkach brzegowych jak te zaprezentowane w rozdziałach 7.1.1.1, 7.1.1.2 i 7.1.1.3. Na rysunkach poniżej porównano rozkłady temperatur dla wybranych przypadków obliczeniowych natomiast wyniki obliczeń zestawiono w tabelach.

Jako pierwszy rozważany był model kompozytu zdefiniowany na obszarze pierścienia z założonym warunkiem Dirichleta. Na rysunku 7.1.1.4.1a zaprezentowano rozkład temperatury w przypadku minimalizacji T_{avg} dla $A_{frac} = 0.2$ dla modelu kompozytu zoptymalizowanego a na rysunku 7.1.1.4.1b dla modelu kompozytu warstwowego. W tabeli 7.1.1.4.1 zestawiono wyniki obliczeń dla minimalizacji i maksymalizacji średniej wartości temperatury dla $A_{frac} = 0.2$ i 0.4 dla modelu kompozytu zoptymalizowanego i warstwowego.



Rys. 7.1.1.4.1 Rozkład temperatury w przypadku minimalizacji T_{avg} dla $A_{frac} = 0.2$ dla:
a) kompozytu zoptymalizowanego
b) kompozytu warstwowego

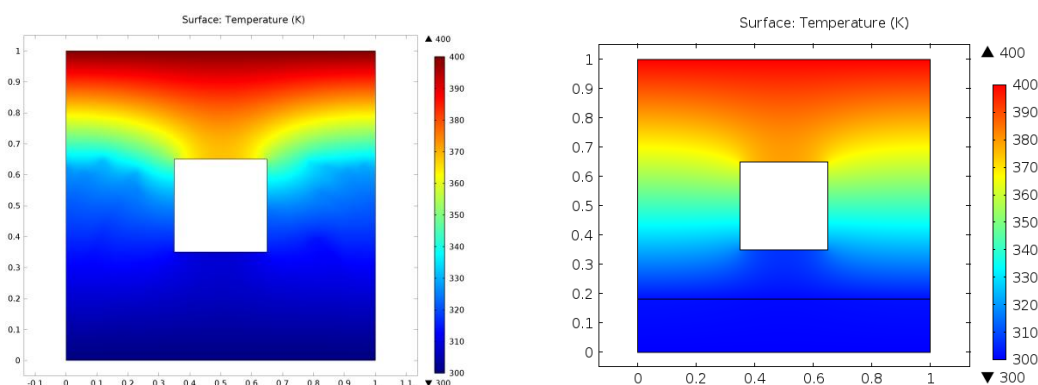
Model kompozytu zdefiniowany na obszarze pierścienia		
	Minimalizacja T_{avg}	
	$A_{frac} = 0.2$	$A_{frac} = 0.4$
kompozyt warstwowy	350.03[K]	340.51[K]
kompozyt optymalny	345.52[K]	338.49[K]
	Maksymalizacja T_{avg}	
	$A_{frac} = 0.2$	$A_{frac} = 0.4$
kompozyt warstwowy	370.54[K]	375.35[K]
kompozyt optymalny	375.71[K]	380.84[K]

Tab. 7.1.1.4.1 Zestawienie wyników obliczeń dla minimalizacji i maksymalizacji średniej wartości temperatury dla $A_{frac} = 0.2$ i 0.4 dla modelu kompozytu zoptymalizowanego i warstwowego.

Jak wynika z powyższej tabeli wyniki dla kompozytu zoptymalizowanego są korzystniejsze (mniejsze w przypadku minimalizacji lub większe w przypadku maksymalizacji) w porównaniu z kompozytem warstwowym.

Drugim rozważanym modelem był model kompozytu zdefiniowany na obszarze kwadratu z wyciętym obszarem kwadratowym z założonym warunkiem Dirichleta i izolacji termicznej. Na rysunku 7.1.1.4.2a zaprezentowano rozkład temperatury w

przypadku minimalizacji T_{avg} dla $A_{frac} = 0.2$ dla modelu kompozytu zoptymalizowanego a na rysunku 7.1.1.4.2b dla modelu kompozytu warstwowego. W tabeli 7.1.1.4.2 zestawiono wyniki obliczeń dla minimalizacji i maksymalizacji średniej wartości temperatury dla $A_{frac} = 0.2$ i 0.4 dla modelu kompozytu zoptymalizowanego i warstwowego.



Rys. 7.1.1.4.2 Rozkład temperatury w przypadku minimalizacji T_{avg} dla $A_{frac} = 0.2$ dla:
a) kompozytu zoptymalizowanego b) kompozytu warstwowego

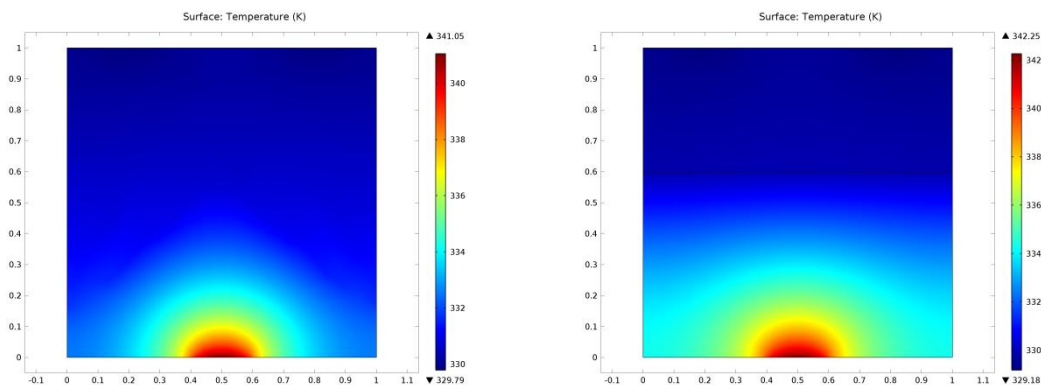
Model kompozytu zdefiniowany na obszarze kwadratu z wyciętym obszarem kwadratowym		
	Minimalizacja T_{avg}	
	$A_{frac} = 0.2$	$A_{frac} = 0.4$
kompozyt warstwowy	343.70[K]	337.75[K]
kompozyt optymalny	336.33[K]	330.80[K]
	Maksymalizacja T_{avg}	
	$A_{frac} = 0.2$	$A_{frac} = 0.4$
kompozyt warstwowy	356.30[K]	362.25[K]
kompozyt optymalny	363.74[K]	369.20[K]

Tab. 7.1.1.4.2 Zestawienie wyników obliczeń dla minimalizacji i maksymalizacji średniej wartości temperatury dla $A_{frac} = 0.2$ i 0.4 dla modelu kompozytu zoptymalizowanego i warstwowego.

Jak wynika z powyższej tabeli również w przypadku tego modelu wyniki dla kompozytu zoptymalizowanego są korzystniejsze (mniejsze lub większe) w porównaniu z kompozytem warstwowym.

Jako trzeci rozważany był model kompozytu zdefiniowany na obszarze kwadratowym z założonym warunkiem Fouriera w postaci parametrycznej. Na rysunku 7.1.1.4.3a zaprezentowano rozkład temperatury w przypadku minimalizacji T_{avg} dla

$A_{\text{frac}} = 0.4$ dla modelu kompozytu zoptymalizowanego a na rysunku 7.1.1.4.3b dla modelu kompozytu warstwowego. W tabeli 7.1.1.4.3 zestawiono wyniki obliczeń dla minimalizacji średniej wartości temperatury dla $A_{\text{frac}} = 0.2$ i 0.4 dla modelu kompozytu zoptymalizowanego i warstwowego dla różnych zależności między h_1 i h_2 .



Rys. 7.1.1.4.3 Rozkład temperatury w przypadku minimalizacji T_{avg} dla $A_{\text{frac}} = 0.4$ dla $h_1 = h_2$:
a) kompozytu zoptymalizowanego b) kompozytu warstwowego

Model kompozytu zdefiniowany na obszarze kwadratowym z założonym warunkiem Fouriera			
		Minimalizacja T_{avg}	
		$A_{\text{frac}} = 0.2$	$A_{\text{frac}} = 0.4$
kompozyt warstwowy	$h_1 > h_2$	345.67[K]	344.95[K]
	$h_1 < h_2$	321.35[K]	320.15[K]
	$h_1 = h_2$	332.60[K]	331.82[K]
kompozyt optymalny	$h_1 > h_2$	345.06[K]	344.80[K]
	$h_1 < h_2$	320.08[K]	319.42[K]
	$h_1 = h_2$	331.82[K]	331.49[K]

Tab. 7.1.1.4.3 Zestawienie wyników obliczeń dla minimalizacji średniej wartości temperatury dla $A_{\text{frac}} = 0.2$ i 0.4 dla modelu kompozytu zoptymalizowanego i warstwowego dla różnych zależności między h_1 i h_2 .

Jak wynika z powyższej tabeli różnica między wynikami dla kompozytu zoptymalizowanego i kompozytu warstwowego nie jest już tak duża jak we wcześniej rozważanych modelach, ale nadal jest widoczna.

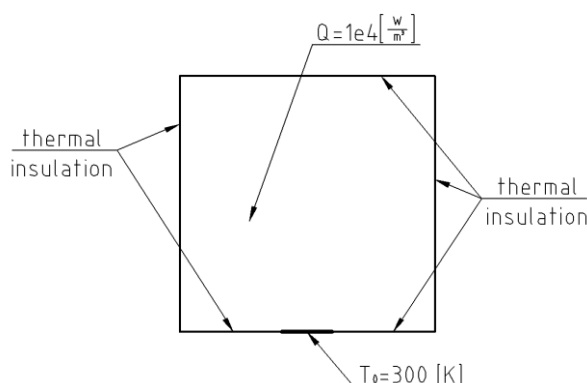
7.1.2 Minimalizacja średniej wartości temperatury oraz modułu gradientu temperatury

Dla kolejnej grupy modeli wykonano minimalizację średniej wartości temperatury oraz modułu gradientu temperatury. Symulacje wykonano dla modeli zdefiniowanych na: obszarze kwadratowym z zadaną gęstością mocy źródła ciepła oraz

obszarze kwadratowym z zadanymi warunkami brzegowymi Dirichleta i Fouriera. Wyniki obliczeń zostały porównane z wynikami symulacji przeprowadzonych dla laminatów o takich samych wymiarach i warunkach brzegowych jak dla struktur kompozytowych.

7.1.2.1 Model kompozytu zdefiniowany na obszarze kwadratowym z zadaną gęstością mocy źródła ciepła

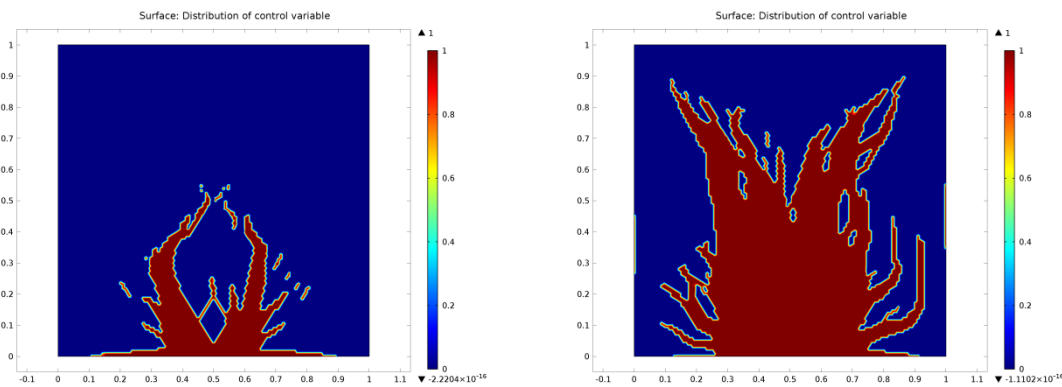
Obszar na którym zdefiniowany był model miał wymiary 1[m]x1[m]. Na dolnym brzegu, na odcinku o długości 0.2[m] zadano warunek Dirichleta o wartości temperatury $T_0=300$ [K]. Na pozostałych brzegach założono izolację termiczną. Źródło ciepła dla rozważanego przypadku wynosi $Q = 1e4 \left[\frac{W}{m^3} \right]$. Na rysunku 7.1.2.1.1 przedstawiono warunki brzegowe dla rozważanego modelu kompozytu. Model został zdyskretyzowany siatką składającą się z 24980 trójkątnych elementów z funkcją kształtu Lagrange'a drugiego rzędu.



Rys. 7.1.2.1.1 Warunki brzegowe dla modelu kompozytu zdefiniowanego na obszarze kwadratowym z zadaną gęstością mocy źródła ciepła

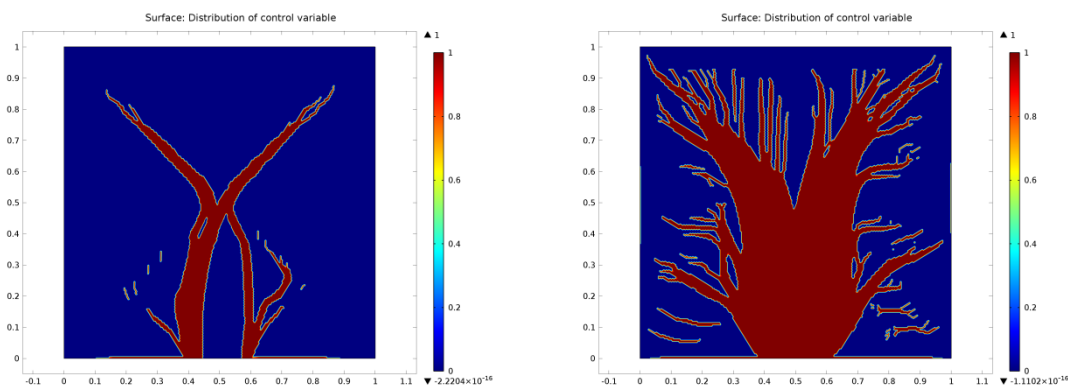
Poniżej zestawiono wyniki obliczeń dla minimalizacji średniej wartości temperatury T_{avg} oraz średniej wartości modułu gradientu temperatury $|gradT|_{avg}$ w rozważanej domenie dla różnych parametrów A_{frac} .

Na rysunku 7.1.2.1.2a przedstawiono rozkład zmiennej kontrolnej w przypadku minimalizacji T_{avg} dla $A_{frac} = 0.1$, a na rysunku 7.1.2.1.2b dla $A_{frac} = 0.4$. Wartości średniej temperatury wyniosły odpowiednio $T_{avg}=514.92[K]$ i $T_{avg}=392.03[K]$.



Rys. 7.1.2.1.2 Rozkład zmiennej kontrolnej w przypadku minimalizacji T_{avg} :
a) dla $A_{frac} = 0.1$ b) dla $A_{frac} = 0.4$

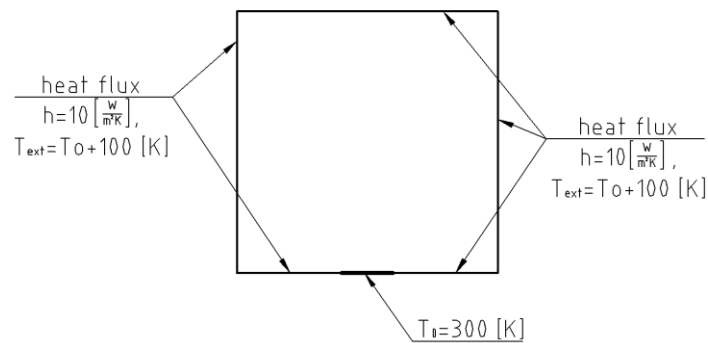
Na rysunku 7.1.2.1.3a przedstawiono rozkład zmiennej kontrolnej w przypadku minimalizacji $|gradT|_{avg}$ dla $A_{frac} = 0.1$, a na rysunku 7.1.2.1.3b dla $A_{frac} = 0.4$. Wartości średniej temperatury wyniosły odpowiednio $|gradT|_{avg}=277.86[K/m]$ i $|gradT|_{avg}=113.36[K/m]$.



Rys. 7.1.2.1.3 Rozkład zmiennej kontrolnej w przypadku minimalizacji $|gradT|_{avg}$:
a) dla $A_{frac} = 0.2$ b) dla $A_{frac} = 0.4$

7.1.2.2 Model kompozytu zdefiniowany na obszarze kwadratowym z zadanymi warunkami brzegowymi Fouriera i Dirichleta

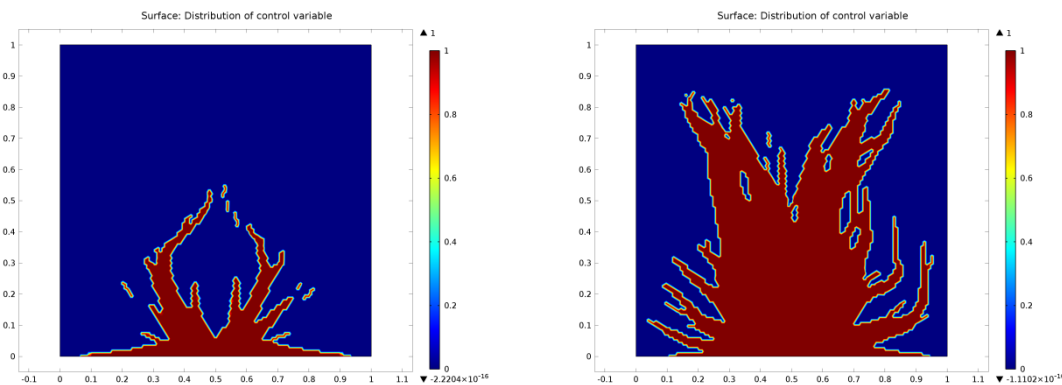
Obszar na którym zdefiniowano model kompozytu miał wymiary 1[m]x1[m]. Na dolnym brzegu, na odcinku o długości 0.2[m] zadano warunek Dirichleta o wartości temperatury $T_0=300$ [K]. Na pozostałych brzegach założono warunek Fouriera ze współczynnikiem przyjmowania ciepła $h = 10 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} \right]$ i temperaturą $T_{ext} = 400$ [K]. Źródło ciepła dla rozważanego przypadku jest równe $Q = 0 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right]$. Na rysunku 7.1.2.2.1 przedstawiono warunki brzegowe dla modelu o obszarze kwadratowym. Model został zdyskretyzowany siatką składającą się z 24912 trójkątnych elementów z funkcją kształtu Lagrange'a drugiego rzędu.



Rys. 7.1.2.2.1 Warunki brzegowe dla modelu kompozytu zdefiniowanego na obszarze kwadratowym z zadanymi warunkami brzegowymi Fouriera i Dirichleta

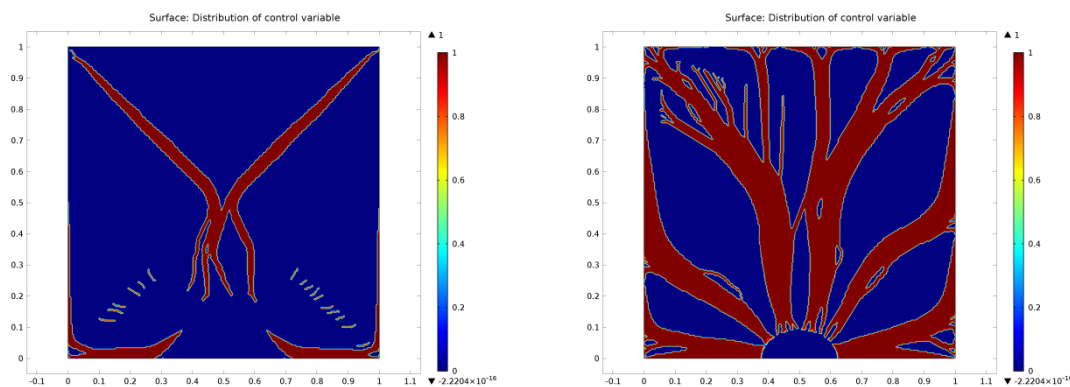
Poniżej zestawiono wyniki obliczeń dla minimalizacji średniej wartości temperatury T_{avg} oraz średniej wartości modułu gradientu temperatury $|gradT|_{avg}$ w rozważanej domenie dla różnych parametrów A_{frac} .

Na rysunku 7.1.2.2.2a przedstawiono rozkład zmiennej kontrolnej w przypadku minimalizacji T_{avg} dla $A_{frac} = 0.1$, a na rysunku 7.1.2.2.2b dla $A_{frac} = 0.4$. Wartości średniej temperatury wyniosły odpowiednio $T_{avg}=338.45[K]$ i $T_{avg}=324.10[K]$.



Rys. 7.1.2.2.2 Rozkład zmiennej kontrolnej w przypadku minimalizacji T_{avg} :
a) dla $A_{frac} = 0.1$ b) dla $A_{frac} = 0.4$

Na rysunku 7.1.2.2.3a przedstawiono rozkład zmiennej kontrolnej w przypadku minimalizacji $|gradT|_{avg}$ dla $A_{frac} = 0.1$, a na rysunku 7.1.2.2.3b dla $A_{frac} = 0.4$. Wartości średniej temperatury wyniosły odpowiednio $|gradT|_{avg}=48.52[K/m]$ i $|gradT|_{avg} = 32.02[K/m]$.



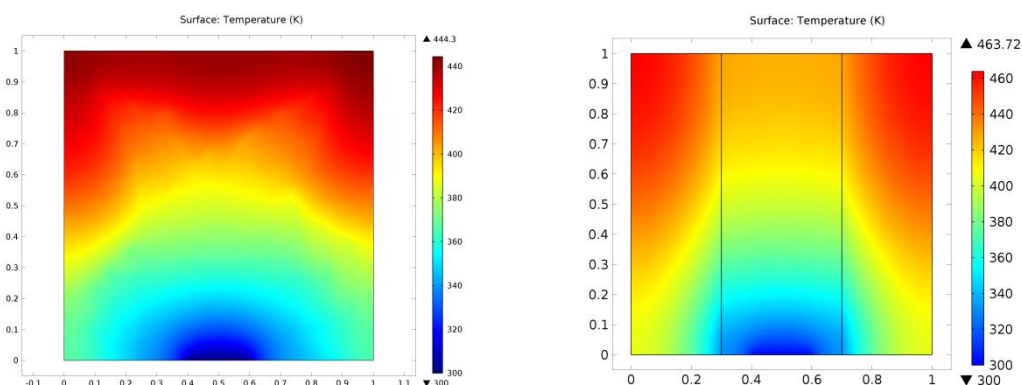
Rys. 7.1.2.2.3 Rozkład zmiennej kontrolnej w przypadku minimalizacji $|gradT|_{avg}$:
a) dla $A_{frac} = 0.2$ b) dla $A_{frac} = 0.4$

7.1.2.3 Porównanie wyników obliczeń

Wyżej przedstawione rezultaty również zostały porównane z wynikami uzyskanymi dla modeli kompozytów warstwowych o takich samych kształtach i warunkach brzegowych jak te zaprezentowane w rozdziałach 7.1.2.1 i 7.1.2.2.

Rozważano dwa rodzaje modeli kompozytów warstwowych: w układzie pionowym i poziomym. Na rysunkach poniżej porównano rozkłady temperatur dla wybranych przypadków obliczeniowych a wyniki obliczeń zestawiono w tabelach.

Jako pierwszy rozważany był model kompozytu z zadaną gęstością mocy źródła ciepła. Na rysunku 7.1.2.3.1a zaprezentowano rozkład temperatury w przypadku minimalizacji T_{avg} dla $A_{frac} = 0.4$ dla modelu kompozytu zoptymalizowanego, a na rysunku 7.1.2.3.1b dla modelu kompozytu warstwowego w układzie pionowym. W tabeli 7.1.2.3.1 zestawiono wyniki obliczeń dla minimalizacji średniej wartości temperatury dla $A_{frac} = 0.1$ i 0.4 dla modelu kompozytu zoptymalizowanego i warstwowego (w układzie pionowym i poziomym). Natomiast w tabeli 7.1.2.3.2 zestawiono wyniki obliczeń dla minimalizacji średniej wartości modułu gradientu temperatury dla $A_{frac} = 0.1$ i 0.4 dla modelu kompozytu zoptymalizowanego i warstwowego (w układzie pionowym i poziomym).



Rys. 7.1.2.3.1 Rozkład temperatury w przypadku minimalizacji T_{avg} dla $A_{frac} = 0.4$ dla:
a) kompozytu zoptymalizowanego b) kompozytu warstwowego w układzie pionowym

Model kompozytu z zadaną gęstością mocy źródła ciepła		
	Minimalizacja T_{avg}	
	$A_{frac} = 0.1$	$A_{frac} = 0.4$
kompozyt warstwowy (układ pionowy)	585.87[K]	408.95[K]
kompozyt warstwowy (układ poziomy)	605.71[K]	435.53[K]
kompozyt optymalny	514.92[K]	392.03[K]

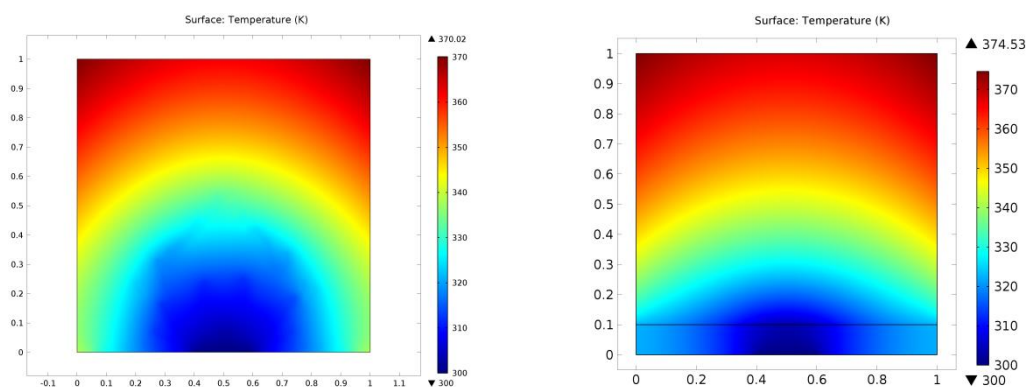
Tab. 7.1.2.3.1 Zestawienie wyników obliczeń dla minimalizacji średniej wartości temperatury dla $A_{frac} = 0.1$ i 0.4 dla modelu kompozytu zoptymalizowanego i warstwowego w układzie pionowym i poziomym.

Model kompozytu z zadaną gęstością mocy źródła ciepła		
	Minimalizacja $ gradT _{avg}$	
	$A_{frac} = 0.1$	$A_{frac} = 0.4$
kompozyt warstwowy (układ pionowy)	305.19 [K/m]	151.80 [K/m]
kompozyt warstwowy (układ poziomy)	426.98 [K/m]	219.99 [K/m]
kompozyt optymalny	277.86 [K/m]	113.36 [K/m]

Tab. 7.1.2.3.2 Zestawienie wyników obliczeń dla minimalizacji średniej wartości modułu gradientu temperatury dla $A_{frac} = 0.1$ i 0.4 dla modelu kompozytu zoptymalizowanego i warstwowego w układzie pionowym i poziomym.

Wyniki dla kompozytu zoptymalizowanego są korzystniejsze (mniejsze) w porównaniu z kompozytem warstwowym. Warto zauważyć, że w przypadku minimalizacji średniej wartości modułu gradientu temperatury różnice między wynikami są znaczące.

Drugim rozważanym modelem był model kompozytu z zadanymi warunkami brzegowymi Fouriera i Dirichleta. Na rysunku 7.1.2.3.2a zaprezentowano rozkład temperatury w przypadku minimalizacji T_{avg} dla $A_{frac} = 0.1$ dla modelu kompozytu zoptymalizowanego, a na rysunku 7.1.2.3.2b dla modelu kompozytu warstwowego w układzie poziomym. W tabeli 7.1.2.3.3 zestawiono wyniki obliczeń dla minimalizacji średniej wartości temperatury dla $A_{frac} = 0.1$ i 0.4 dla modelu kompozytu zoptymalizowanego i warstwowego (w układzie pionowym i poziomym). Natomiast w tabeli 7.1.2.3.4 zestawiono wyniki obliczeń dla minimalizacji średniej wartości modułu gradientu temperatury dla $A_{frac} = 0.1$ i 0.4 dla modelu kompozytu zoptymalizowanego i warstwowego (w układzie pionowym i poziomym).



Rys. 7.1.2.3.2 Rozkład temperatury w przypadku minimalizacji T_{avg} dla $A_{frac} = 0.1$ dla:
a) kompozytu zoptymalizowanego b) kompozytu warstwowego w układzie poziomym

Model kompozytu z zadanymi warunkami brzegowymi Fouriera i Dirichleta		
	Minimalizacja T_{avg}	
	$A_{frac} = 0.1$	$A_{frac} = 0.4$
kompozyt warstwowy (układ pionowy)	347.35 [K]	327.67 [K]
kompozyt warstwowy (układ poziomy)	344.26 [K]	329.31 [K]
kompozyt optymalny	338.46 [K]	324.10 [K]

Tab. 7.1.2.3.3 Zestawienie wyników obliczeń dla minimalizacji średniej wartości temperatury dla $A_{frac} = 0.1$ i 0.4 dla modelu kompozytu zoptymalizowanego i warstwowego w układzie pionowym i poziomym.

Model kompozytu z zadanymi warunkami brzegowymi Fouriera i Dirichleta		
	Minimalizacja $ gradT _{avg}$	
	$A_{frac} = 0.1$	$A_{frac} = 0.4$
kompozyt warstwowy (układ pionowy)	65.14 [K/m]	58.89 [K/m]
kompozyt warstwowy (układ poziomy)	66.31 [K/m]	54.55 [K/m]
kompozyt optymalny	48.52 [K/m]	32.02 [K/m]

Tab. 7.1.2.3.4 Zestawienie wyników obliczeń dla minimalizacji średniej wartości modułu gradientu temperatury dla $A_{frac} = 0.1$ i 0.4 dla modelu kompozytu zoptymalizowanego i warstwowego w układzie pionowym i poziomym.

Również w przypadku tego modelu wyniki dla kompozytu zoptymalizowanego są korzystniejsze (mniejsze) w porównaniu z kompozytem warstwowym. Ponownie można zauważyć, że w przypadku minimalizacji średniej wartości modułu gradientu temperatury różnice między wynikami są znaczące.

Wykorzystanie metody optymalizacji geometrii kształtu faz w kompozycie prowadzi do uzyskania lepszych wartości (mniejszych lub większych) średniej wartości temperatury T_{avg} i średniej wartości modułu gradientu temperatury $|gradT|_{avg}$, co można stwierdzić na podstawie wyników zestawionych w tablicach: 7.1.1.4.1, 7.1.1.4.3, 7.1.1.4.4, 7.1.2.3.1, 7.1.2.3.2, 7.1.2.3.3, 7.1.2.3.4.

Obliczenia optymalizacyjne wykazały, że w przypadku gdy mamy problem z danymi warunkami temperaturowymi na brzegu (np. rozdział 7.1.1.1, 7.1.1.2, 7.1.1.2) to przy minimalizacji T_{avg} złożone formy kształtu materiału pojawiają się przy boku z niższą temperaturą, a w przypadku maksymalizacji przy brzegu z wyższą temperaturą. W obu przypadkach otrzymywane kształty mają skomplikowaną linię brzegową

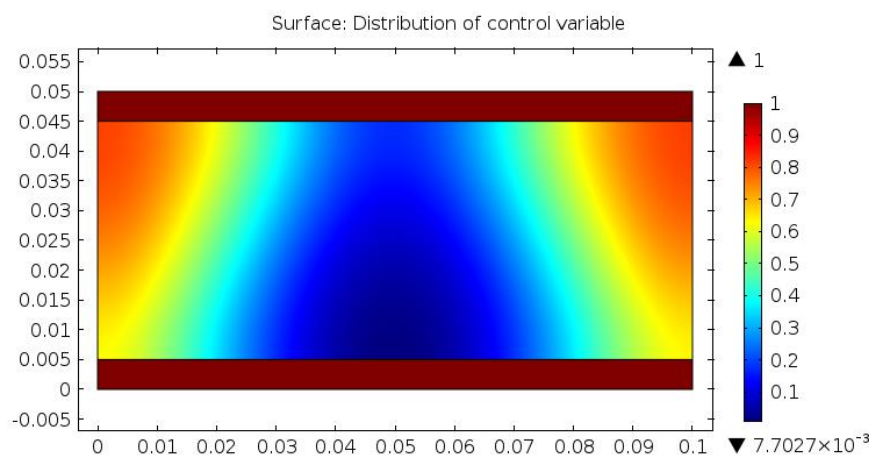
między zastosowanymi materiałami. Bardziej skomplikowana i tym samym dłuższa linia międzyfazowa (rozdzielająca materiały) pozwala na większe nagrzewanie całego obszaru jeśli materiał lepiej przewodzący (o wyższym współczynniku przewodzenia ciepła) jest przy brzegu z wyższą temperaturą. Natomiast jeśli materiał lepiej przewodzący jest rozłożony w kontakcie z brzegiem o niższej temperaturze to w całym obszarze dominuje chłodzenie rozważanego obszaru co wyraża się mniejszą wartością T_{avg} . W przypadku zastosowania warunków brzegowych drugiego rodzaju (zawierających strumień ciepła oraz współczynnik przyjmowania powierzchniowego ciepła) uzyskane różnice w badanych przykładach, pomiędzy kompozytem warstwowym oraz zoptymalizowanym kształtem, okazały się mniejsze.

7.2 Wpływ regularyzacji na wyniki optymalizacji struktury

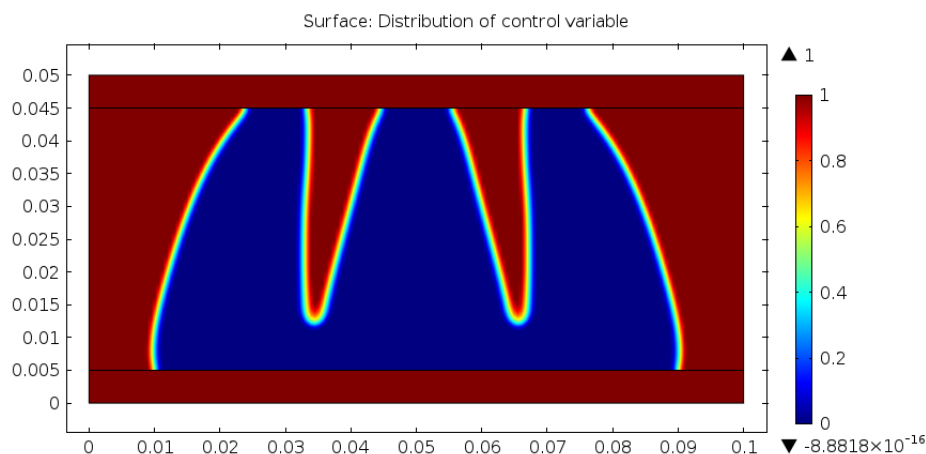
Poniżej przedstawiono rysunki prezentujące rozkład zmiennej kontrolnej w zależności od parametru regularyzacji par_{reg} przyjmującego kolejno wartości 1, 100, 1000. Parametr regularyzacji spełniał warunek:

$$0 < \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \right) d\Omega < par_{reg} \quad (7.2.1)$$

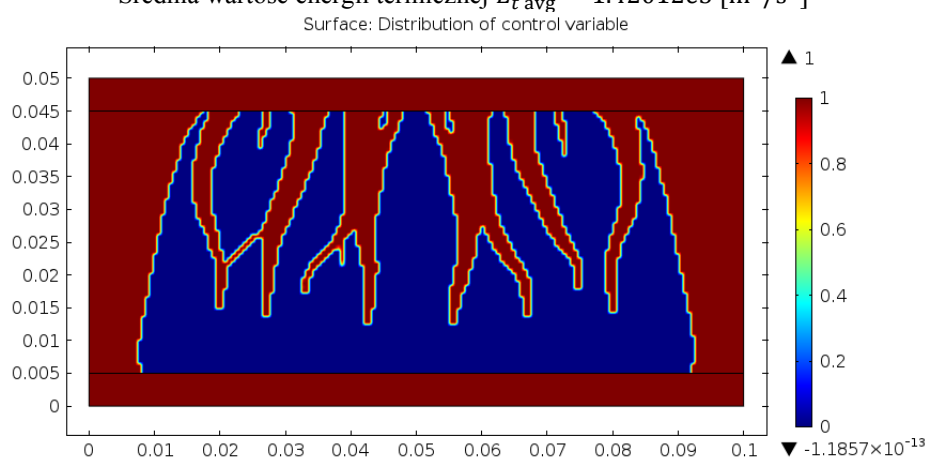
Model zdyskretyzowano siatką składającą się z 14280 czworobocznych elementów skończonych.



Rys. 7.2.1 Rozkład zmiennej kontrolnej - wynik dla parametru regularyzacji $par_{reg} = 1$
Średnia wartość energii termicznej $E_{t,avg} = 1.42755e5$ [m²/s²]



Rys. 7.2.2 Rozkład zmiennej kontrolnej - wynik dla parametru regularyzacji $par_{reg} = 100$
Średnia wartość energii termicznej $E_{t,avg} = 1.42012e5$ [m^2/s^2]

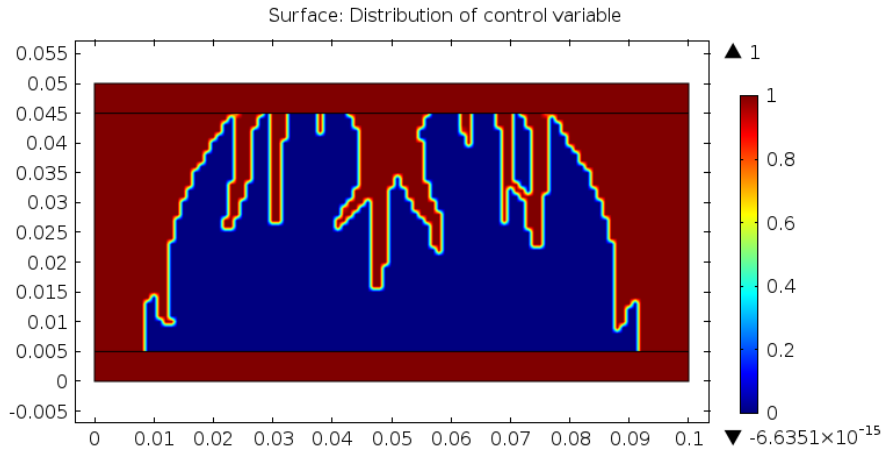


Rys. 7.2.3 Rozkład zmiennej kontrolnej - wynik dla parametru regularyzacji $par_{reg} = 1000$
Średnia wartość energii termicznej $E_{t,avg} = 1.41995e5$ [m^2/s^2]

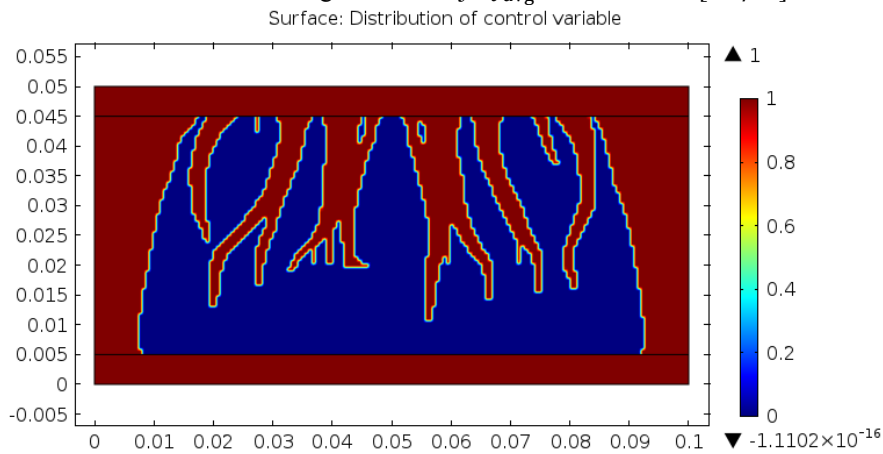
Jak wynika z powyższych przykładów obliczeń przedstawionych na rysunkach 7.2.1 - 7.2.3 dokładność rozkładu zmiennej kontrolnej zwiększa się wraz ze wzrostem parametru regularyzacji par_{reg} . Parametr regularyzacji wpływa jednocześnie na wynik minimalizacji. Im większa wartość par_{reg} tym dokładniejsza (mniejsza) wartość średniej energii termicznej.

7.3 Wpływ siatki elementów skończonych na wyniki optymalizacji struktury

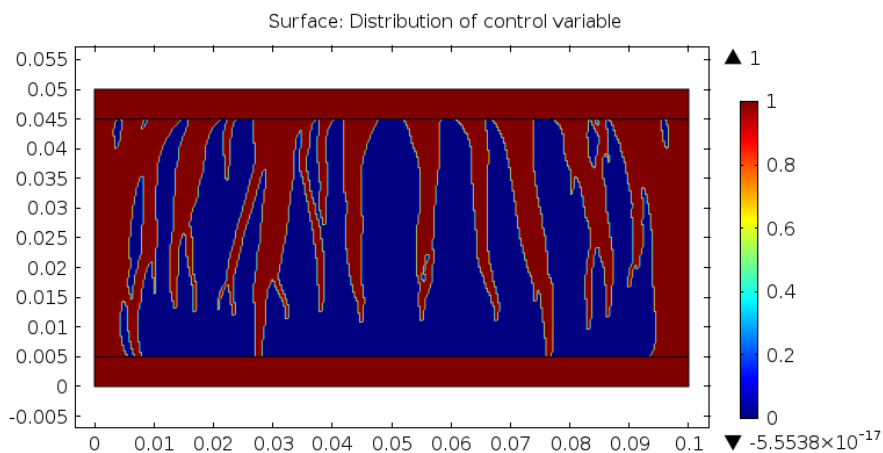
W przypadku wykorzystania do optymalizacji topologii metody elementów skończonych można zaobserwować wpływ dyskretyzacji modelu na wyniki obliczeń. Im gęstsza i dokładniejsza siatka tym wyniki obliczeń korzystniejsze. Przykłady przedstawiono na rysunkach poniżej.



Rys. 7.3.1 Rozkład zmiennej kontrolnej - wynik dla siatki składającej się z 5000 czworobocznych elementów skończonych z funkcją kształtu Lagrange'a drugiego rzędu
Średnia wartość energii termicznej $E_{t,avg} = 1.42026e5 \text{ [m}^2/\text{s}^2]$



Rys. 7.3.2 Rozkład zmiennej kontrolnej - wynik dla siatki składającej się z 14280 czworobocznych elementów skończonych z funkcją kształtu Lagrange'a drugiego rzędu
Średnia wartość energii termicznej $E_{t,avg} = 1.42004e5 \text{ [m}^2/\text{s}^2]$

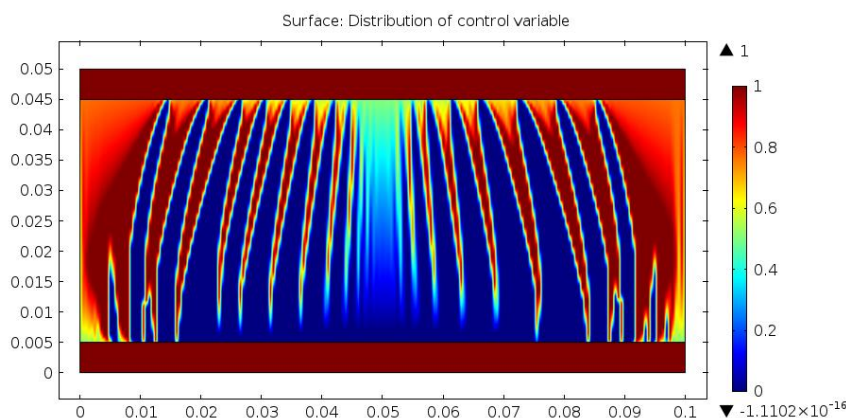


Rys. 7.3.3 Rozkład zmiennej kontrolnej - wynik dla siatki składającej się z 56280 czworobocznych elementów skończonych z funkcją kształtu Lagrange'a drugiego rzędu
Średnia wartość energii termicznej $E_{t,avg} = 1.41974e5 \text{ [m}^2/\text{s}^2]$

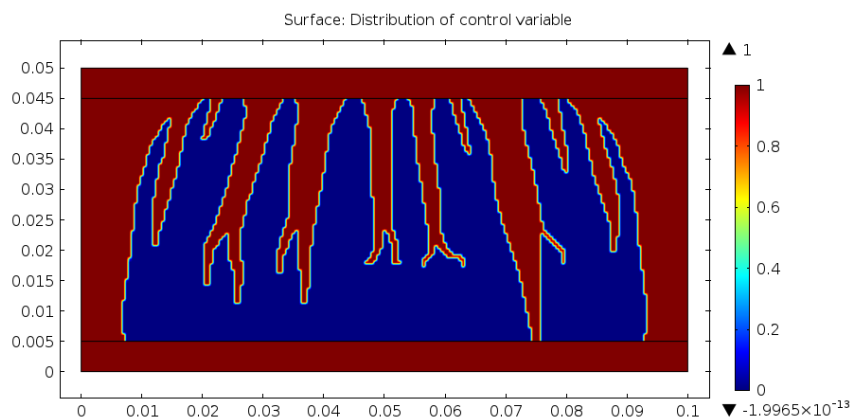
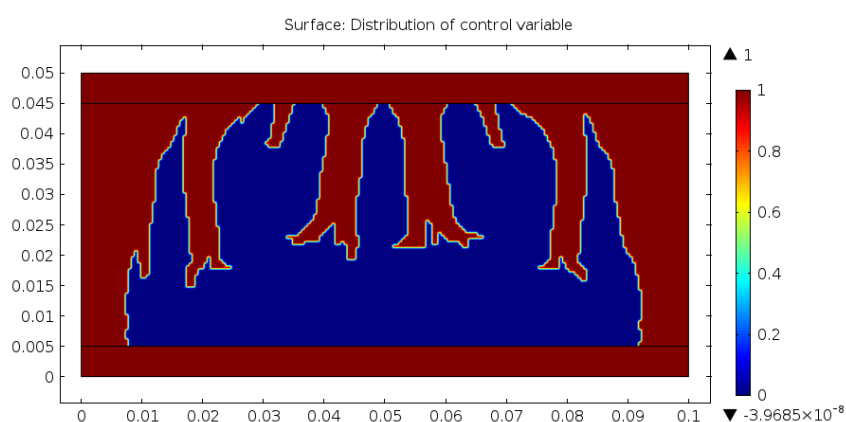
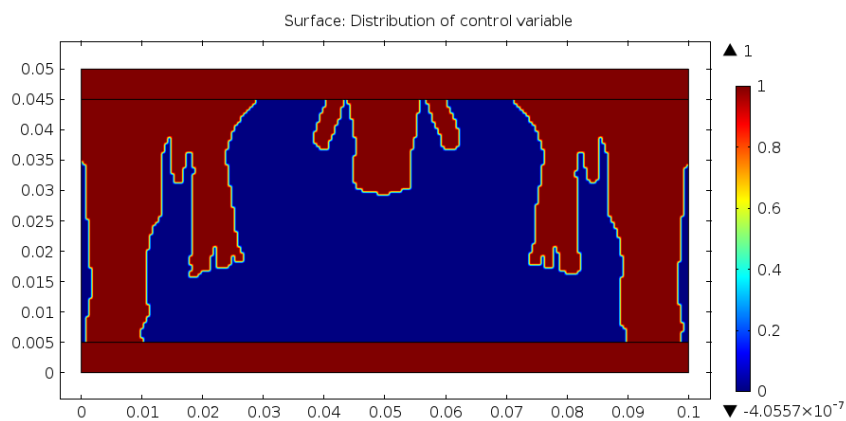
Jak widać na powyższych przykładach obliczeń, których wyniki przedstawiono na rysunkach 7.3.1 - 7.3.3 dokładność rozkładu zmiennej kontrolnej zwiększa się wraz ze wzrostem ilości elementów skończonych. Jakość dyskretyzacji modelu ma również wpływ na wynik minimalizacji. Przy dokładnej siatce, z odpowiednio dużą ilością elementów skończonych można uzyskać wyniki porównywalnie dobre z tymi, które uzyskano w wyniku regularyzacji.

7.4 Wpływ parametru kary p metody SIMP na wyniki optymalizacji struktury kompozytu

Parametr kary p , który jest wykorzystywany w schematach interpolacyjnych ma duży wpływ na wyniki optymalizacji struktury kompozytu. Na rysunkach 7.4.1-7.4.4 zaprezentowano rozkłady zmiennej kontrolnej dla p równego 1, 3, 5 i 7. Dla wszystkich zaprezentowanych przypadków przewodność cieplna materiału izotropowego była zapisana za pomocą modelu SIMP (wzór 4.1.1.1). Modele obliczeniowe zdyskretyzowano siatką składającą się z 20000 czworobocznych elementów skończonych z funkcją kształtu Lagrange'a drugiego rzędu.



Rys. 7.4.1 Rozkład zmiennej kontrolnej dla parametru kary $p=1$

Rys. 7.4.2 Rozkład zmiennej kontrolnej dla parametru kary $p=3$ Rys. 7.4.3 Rozkład zmiennej kontrolnej dla parametru kary $p=5$ Rys. 7.4.4 Rozkład zmiennej kontrolnej dla parametru kary $p=7$

Jak wynika z powyższych rysunków najdokładniejszą strukturę osiągnięto gdy parametr kary miał wartość $p=3$.

8. Optymalizacja struktury układów typu sandwich

W rozdziale tym przedstawione zostały wyniki badań związane z optymalizacją właściwości termicznych oraz termiczno - mechanicznych układów typu sandwich (paneli warstwowych). Podczas badań minimalizowano energię termiczną oraz mechaniczną w rozważanych konstrukcjach kompozytowych. Przeprowadzono różne warianty obliczeń. Otrzymane wyniki zostały porównane z wynikami uzyskanymi dla laminatów o takim samym udziale objętościowym materiałów jak w przypadku płyt typu sandwich.

Podobnie jak we wcześniejszym rozdziale rysunki zmiennej kontrolnej są reprezentacją grafiki rastrowej w kolorze czerwono-niebieskim. Kolor niebieski - wartość zmiennej kontrolnej $r = 0$ - odpowiada pierwszemu materiałowi, z przewodnością cieplną k_1 . Natomiast kolor czerwony - wartość zmiennej kontrolnej $r = 1$ - odpowiada drugiemu materiałowi, z przewodnością cieplną k_2 .

W rozważanych poniżej przypadkach optymalizowana funkcja celu przyjmowała formę całki zarówno dla przypadku minimalizacji średniej wartości energii termicznej wzór (8.1) jak i średniej wartości energii odkształcenia wzór (8.2).

$$E_{t \text{ avg}} = \frac{1}{A_1 + A_2} \int_{A_1 + A_2} E_t dA, \quad (8.1)$$

$$E_{s \text{ avg}} = \frac{1}{A_1 + A_2} \int_{A_1 + A_2} E_s dA. \quad (8.2)$$

Na powyższe funkcje celu zostały nałożone następujące ograniczenia. Pierwsze z nich to ograniczenie punktowe:

$$0 < r(\mathbf{x}) < 1 \text{ dla każdego } \mathbf{x} \in A_2, \quad (8.3)$$

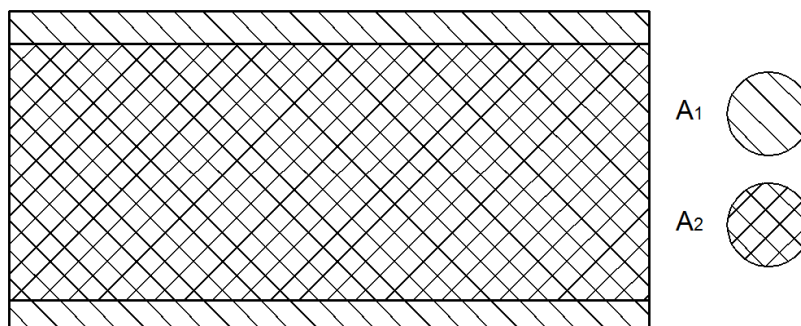
gdzie r jest zmienną kontrolną.

Drugie ograniczenie ma postać całkową:

$$0 < \int_{A_2} r(\mathbf{x}) dA < A_{\text{frac}} \cdot A_2. \quad (8.4)$$

Zakresy pól A_1 i A_2 zostały przedstawione na rysunku 8.1. Pole A_1 obejmuje obszar materiału, z którego wykonane są dolna i górna ściana panelu. Natomiast pole A_2 obejmuje środkową, wewnętrzną warstwę panelu wykonaną z dwufazowego

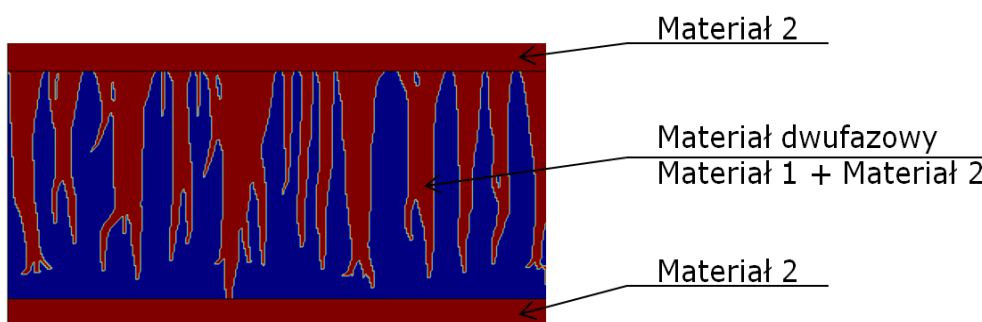
kompozytu. Optymalizowany jest tylko rozkład materiału w warstwie środkowej, ale średnie wartości energii wyznaczone są w całym układzie typu sandwich.



Rys. 8.1 Zakres pola A_1 i zakres pola A_2

8.1 Wpływ przewodności cieplnej na strukturę płyty typu sandwich

Pierwsze symulacje przeprowadzono dla minimalizacji średniej wartości energii termicznej (wzór 8.1) w trójwarstwowej płycie typu sandwich, wykonanej z dwóch różnych, hipotetycznych materiałów różniących się współczynnikiem przewodności cieplnej. Środkowa warstwa płyty to kompozyt dwufazowy, jak przedstawiono na rys. 8.1.1. Zbadano stosunek ilorazu przewodności cieplnej pierwszego materiału k_1 do przewodności cieplnej drugiego materiału k_2 . W tabeli 8.1.1 zestawiono wartości parametrów przewodności cieplnej dla trzech zbadanych wariantów.

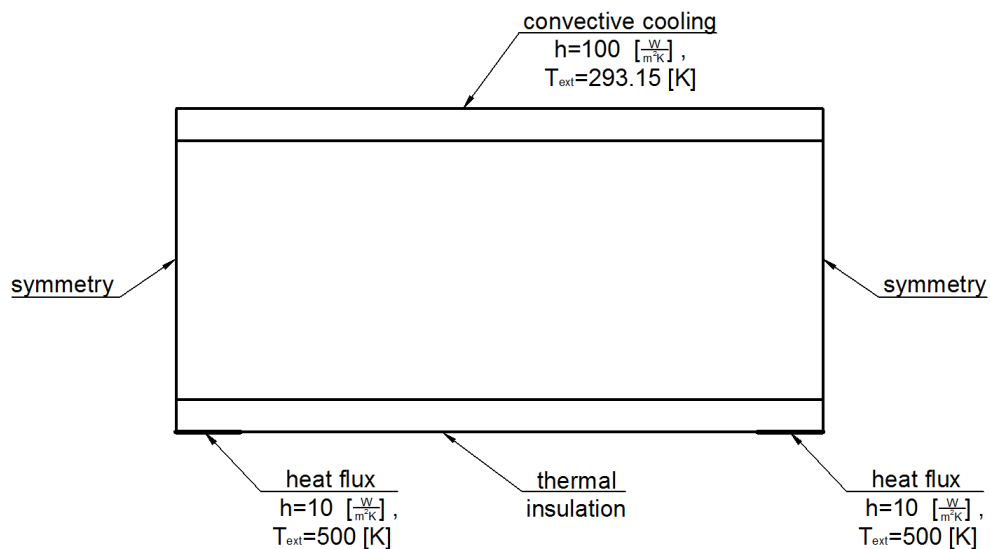


Rys. 8.1.1 Płyta kompozytowa trójwarstwowa typu sandwich

Wariant	Materiał 1 k_1	Materiał 2 k_2
1	1 [W/mK]	10 [W/mK]
2	1 [W/mK]	100 [W/mK]
3	1 [W/mK]	1000 [W/mK]

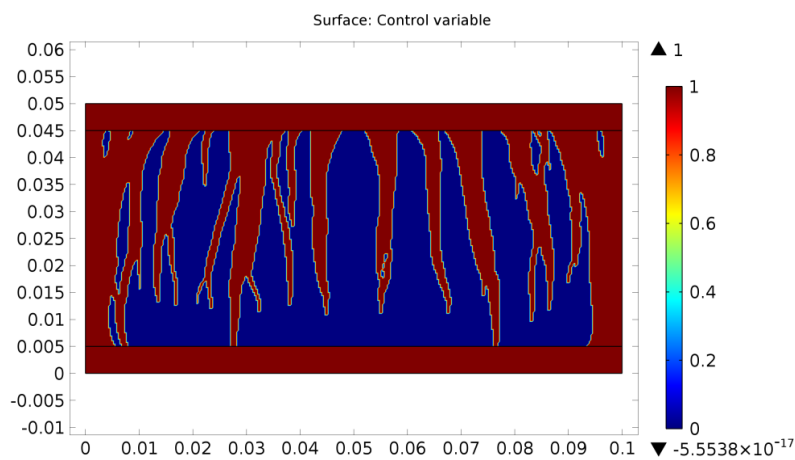
Tab. 8.1.1 Trzy warianty obliczeniowe dla różnych wartości przewodności cieplnej

Rozważany model płyty miał kształt prostokąta o wymiarach 0.1 [m] x 0.05 [m], a grubość zewnętrznych warstw wynosiła 0.005 [m]. Założono warunki brzegowe w postaci warunku Fouriera i warunku symetrii. Na całej długości górnego brzegu przyłożono chłodzenie konwekcyjne ze współczynnikiem przejmowania ciepła $h = 100 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} \right]$ i temperaturą $T_{\text{ext}} = 293.15[\text{K}]$. Na dwóch odcinkach długości 0.02 [m] na dolnym brzegu przyłożono strumień ciepła ze współczynnikiem przejmowania ciepła $h = 10 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} \right]$ i temperaturą $T_{\text{ext}} = 500[\text{K}]$, jak przedstawiono na rysunku 8.1.2. Źródło ciepła dla rozważanego przypadku jest równe $Q = 0 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right]$. Model został zdyskretyzowany siatką składającą się z 56280 czworobocznych elementów z funkcją kształtu Lagrange'a drugiego rzędu.

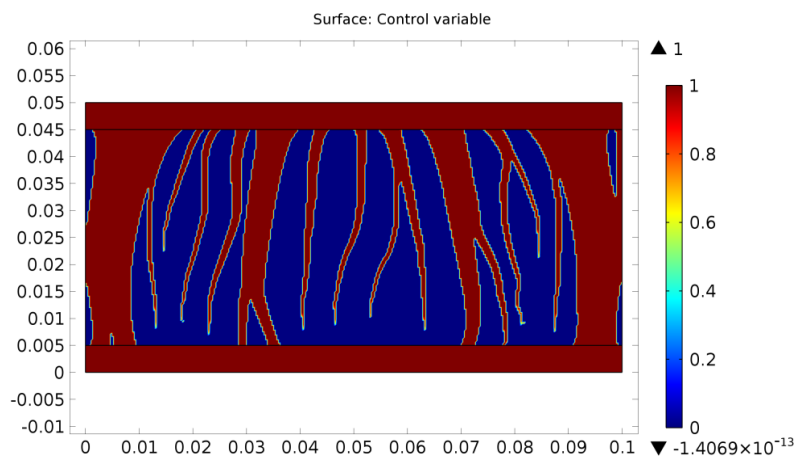


Rys. 8.1.2 Warunki brzegowe

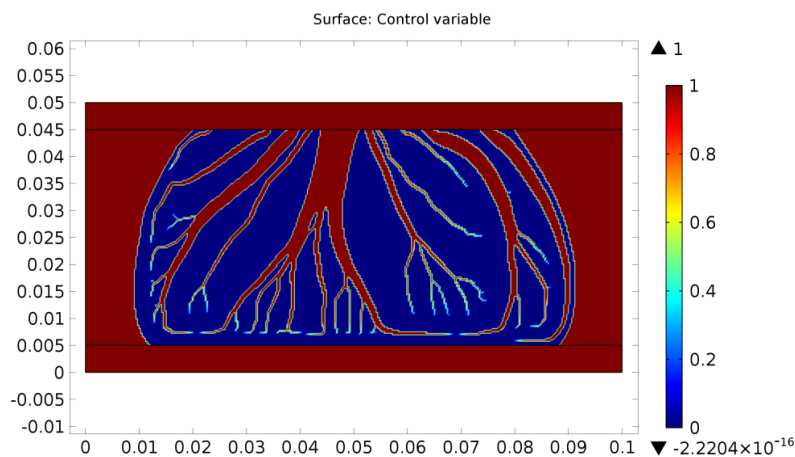
Na rysunkach 8.1.3, 8.1.4 i 8.1.5 przedstawiono wyniki obliczeń dla trzech wariantów dla parametru $A_{frac}=0.4$.



Rys. 8.1.3 Rozkład zmiennej kontrolnej dla wariantu 1



Rys. 8.1.4 Rozkład zmiennej kontrolnej dla wariantu 2



Rys. 8.1.5 Rozkład zmiennej kontrolnej dla wariantu 3

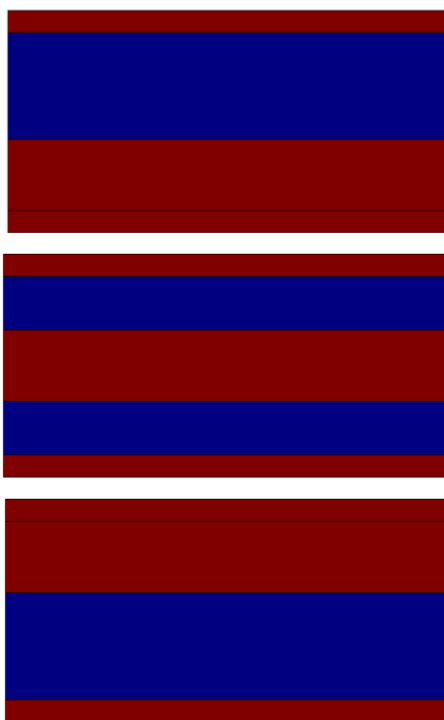
W tabeli 8.1.2 zestawiono wartości średniej energii termicznej, które uzyskano podczas obliczeń dla trzech wariantów.

Wariant	$E_{i\text{ avg}} [\text{m}^2/\text{s}^2]$
1	1.41974e5
2	1.4126e5
3	1.41179e5

Tab. 8.1.2 Wartości średniej energii termicznej dla trzech wariantów

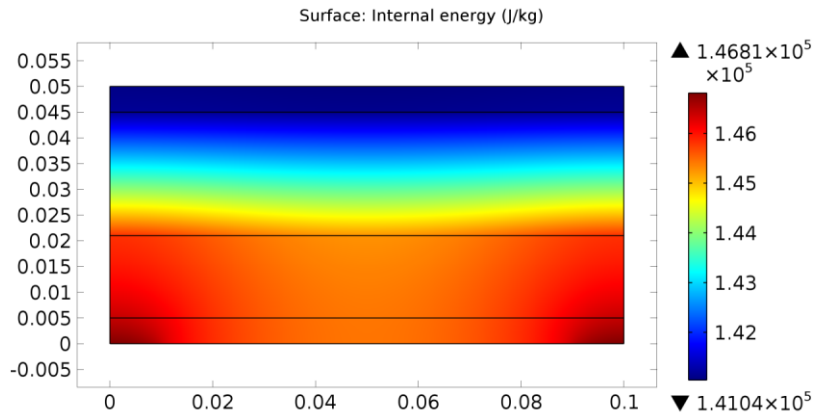
Im współczynnik k_2 był większy tym uzyskiwana średnia wartość energii termicznej malała, a rozkład obu materiałów w warstwie środkowej był bardziej złożony ze względu na większą penetrację warstwy przez materiał 2 o większym współczynniku przewodności cieplnej.

W celu sprawdzenia wyników uzyskanych w procesie optymalizacji przeprowadzono obliczenia dla kompozytów warstwowych z takimi samymi warunkami brzegowymi. Rozkład energii wewnętrznej w kompozycie optymalnym porównano z rozkładem energii wewnętrznej w trzech rodzajach płyt warstwowych z warstwą z materiału 2 (kolor czerwony) umieszczoną przy: dolnym brzegu, na środku i przy górnym brzegu, jak przedstawiono na rysunku 8.1.6.

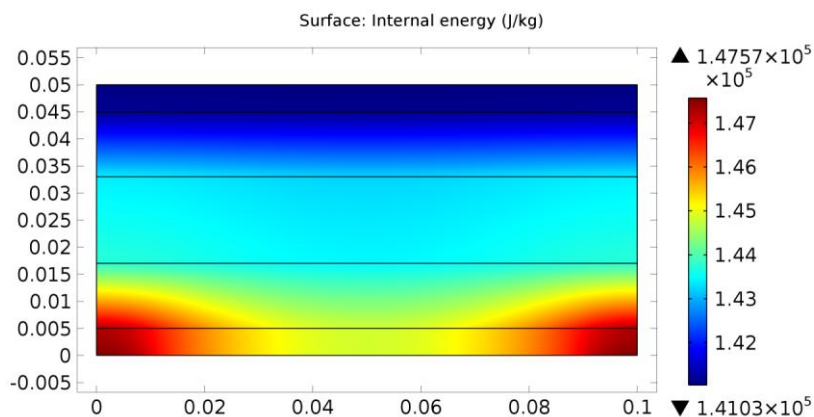


Rys. 8.1.6 Trzy rodzaje płyt warstwowych

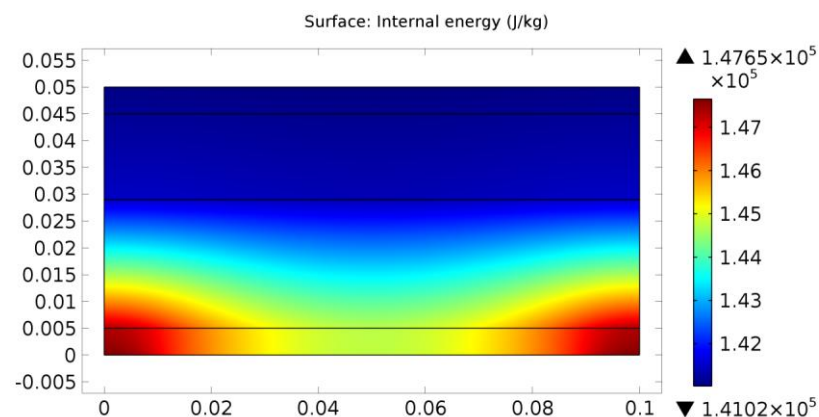
Przykłady rozkładu energii wewnętrznej dla trzech rodzajów płyt warstwowych oraz dla płyty kompozytowej przedstawiono dla wariantu 1 na rysunkach 8.1.7, 8.1.8, 8.1.9 i 8.1.10.



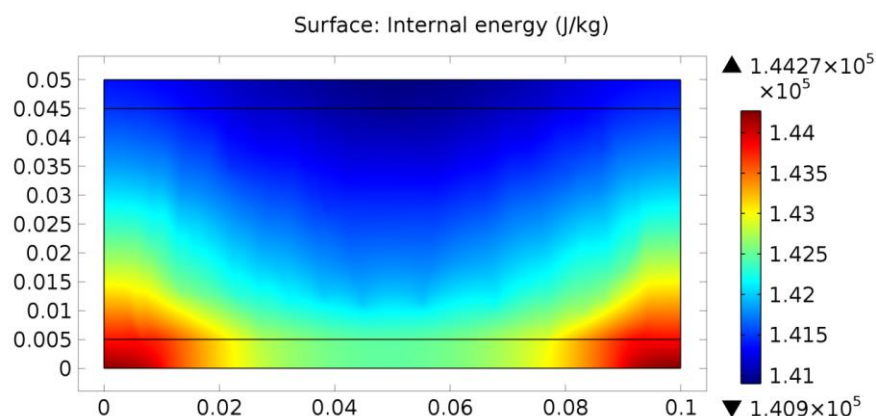
Rys. 8.1.7 Rozkład energii wewnętrznej dla wariantu 1 w płycie warstwowej z warstwą z materiału 2 umieszczoną przy dolnym brzegu



Rys. 8.1.8 Rozkład energii wewnętrznej dla wariantu 1 w płycie warstwowej z warstwą z materiału 2 umieszczoną na środku



Rys. 8.1.9 Rozkład energii wewnętrznej dla wariantu 1 w płycie warstwowej z warstwą z materiału 2 umieszczoną przy górnym brzegu



Rys. 8.1.10 Rozkład energii wewnętrznej dla wariantu 1 w płycie kompozytowej

W tabeli 8.1.3 zestawiono wartości średniej energii termicznej dla trzech wariantów, dla wszystkich badanych płyt dla $A_{frac} = 0.4$.

	Wariant 1 [m ² /s ²]	Wariant 2 [m ² /s ²]	Wariant 3 [m ² /s ²]
Optymalna płyta kompozytowa typu sandwich	1.41972e05	1.41260e5	1.41178e5
Kompozyt warstwowy (warstwa z k_2 na środku)	1.43440e5	1.43308e5	1.43280e5
Kompozyt warstwowy (warstwa z k_2 na dole)	1.44360e5	1.44011e5	1.44294e5
Kompozyt warstwowy (warstwa z k_2 na górze)	1.42820e5	1.42610e5	1.42590e5

Tab. 8.1.3 Wartości średniej energii termicznej dla trzech wariantów dla wszystkich badanych płyt

Jak wynika z tabeli 8.1.3 proponowana płyta kompozytowa osiąga niższe wartości średniej energii termicznej niż płyty laminatowe, niezależnie od miejsca położenia warstwy materiału 2.

8.2 Minimalizacja średniej wartości energii termicznej i średniej wartości energii odkształcenia - wariant 1

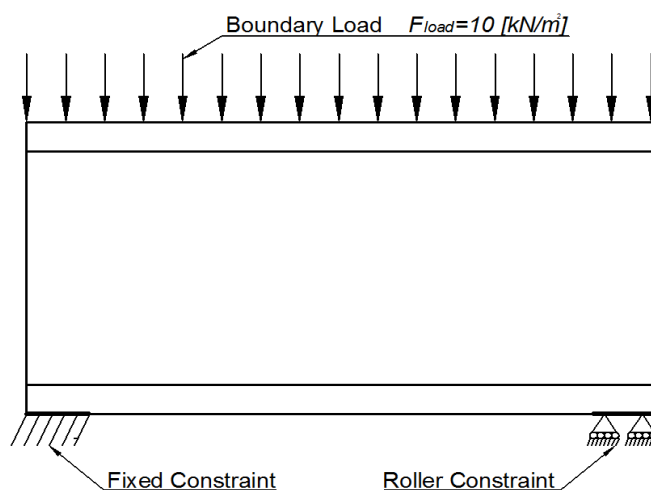
W kolejnym etapie badań przeprowadzono obliczenia dla minimalizacji średniej wartości energii termicznej (wzór 8.1), minimalizacji średniej wartości energii odkształcenia (wzór 8.2) oraz minimalizacji średniej wartości energii termicznej i średniej wartości energii odkształcenia jednocześnie (wzory 8.1 i 8.2).

Funkcja celu dla optymalizacji średniej wartości energii termicznej i średniej wartości energii odkształcenia jednocześnie przyjmuje formę:

$$E_{avg} = w_t E_{t avg} + w_s E_{s avg}, \quad (8.2.1)$$

gdzie $w_t \left[\frac{\text{kg}}{\text{J}} \right]$ i $w_s \left[\frac{\text{m}^3}{\text{J}} \right]$ są wagami odpowiednio dla średniej wartości energii termicznej i średniej wartości energii odkształcenia.

W celu minimalizacji średniej wartości energii termicznej w modelu zastosowano warunki brzegowe Fouriera oraz izolacji termicznej, takie same jak dla modelu w rozdziale 8.1 (Rys. 8.1.2). Natomiast w celu minimalizacji średniej wartości energii odkształcenia na górnym brzegu przyłożono obciążenie $F_{load} = 10[\text{kN/m}^2]$. Dolny brzeg na jednym odcinku o długości 0.2[m] został utwierdzony, a na drugim odcinku o długości 0.2[m] został podparty podporą przesuwną, jak pokazano na rysunku 8.2.1. Obszar został zdyskretyzowany siatką składającą się z 12456 czworobocznych elementów z funkcją kształtu Lagrange'a drugiego rzędu.



Rys. 8.2.1 Warunki brzegowe dla minimalizacji średniej wartości energii odkształcenia

Na potrzeby analizy właściwości dwufazowej płyty typu sandwich parametry takie jak moduł Younga, współczynnik Poissona oraz gęstość zostały zapisane za pomocą schematu interpolacyjnego SIMP dla materiałów izotropowych. Przewodność cieplna została zapisana jak we wzorze 4.1.1.1, a właściwości mechaniczne jak poniżej:

$$E(r) = E_1 + (E_2 - E_1)r^p, \quad p > 1, \quad E_1 < E_2 \quad (8.2.2)$$

$$\nu(r) = \nu_1 + (\nu_2 - \nu_1)r^p, \quad p > 1, \quad \nu_1 > \nu_2 \quad (8.2.3)$$

$$\rho(r) = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1)r^p, \quad p > 1, \quad \rho_1 < \rho_2 \quad (8.2.4)$$

gdzie E_1 i E_2 są wartościami modułu Younga, ν_1 i ν_2 są wartościami współczynnika Poissona, ρ_1 i ρ_2 są wartościami gęstości odpowiednio dla pierwszego i drugiego materiału.

W tabeli 8.2.1 zaprezentowano właściwości materiałów, które posłużyły do wykonania modelu płyty typu sandwich.

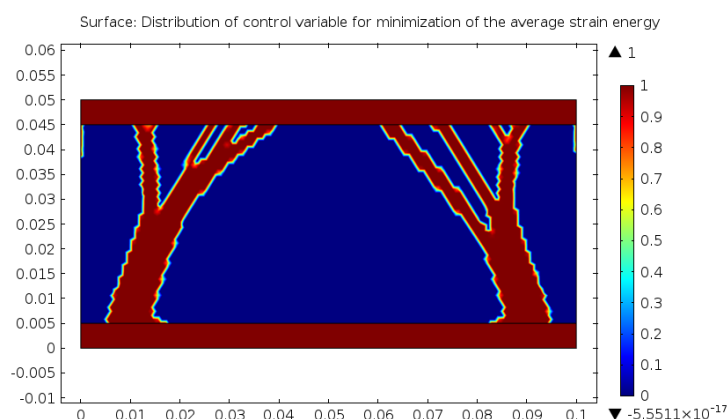
Właściwość	Materiał 1 Pianka poliuretanowa	Materiał 2 Stal
E [Pa]	4e9	2e11
ν	0.4	0.25
k $\left[\frac{W}{mK}\right]$	0.03	58
ρ $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	50	8000

Tab. 8.2.1 Właściwość materiałów

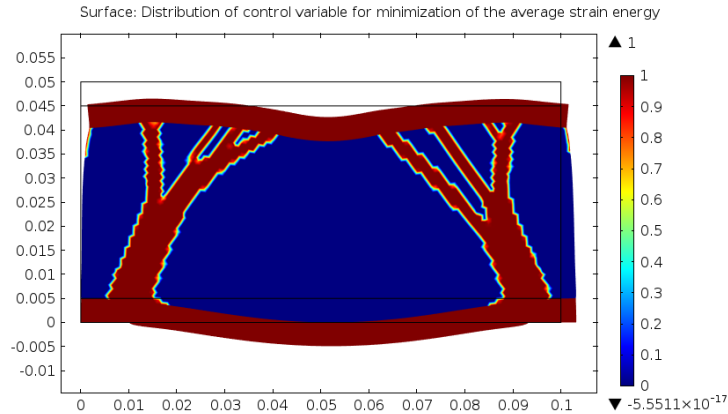
Obliczenia wykonano dla A_{frac} równego kolejno 0.2, 0.4 i 0.6. Dla każdej z tych wartości przeprowadzono trzy typy minimalizacji: minimalizację średniej wartości energii termicznej, minimalizację średniej wartości energii odkształcenia oraz minimalizację średniej wartości energii termicznej i średniej wartości energii odkształcenia jednocześnie.

8.2.1 Wyniki obliczeń dla $A_{frac} = 0.2$

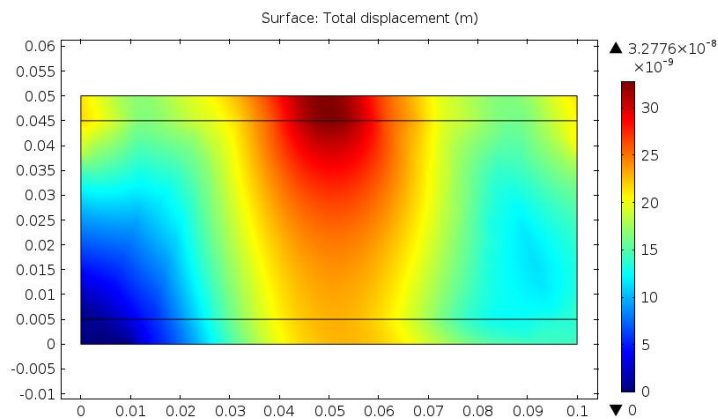
Na rysunku 8.2.1.1 przedstawiono rozkład zmiennej kontrolnej, który uzyskano z minimalizacji średniej wartości energii odkształcenia. Rysunek 8.2.1.2 prezentuje deformację płyty kompozytowej typu sandwich. Na rysunku 8.2.1.3 pokazano rozkład przemieszczeń w płycie.



Rys. 8.2.1.1 Rozkład zmiennej kontrolnej

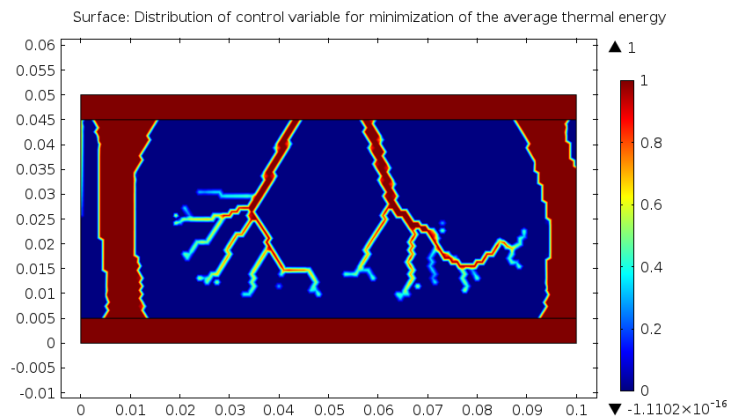


Rys. 8.2.1.2 Deformacja płyty

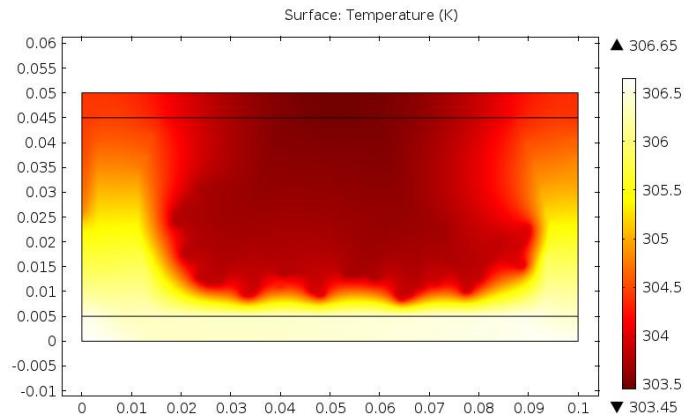


Rys. 8.2.1.3 Rozkład przemieszczeń w płycie

Następnie przeprowadzono optymalizację średniej wartości energii termicznej. Na rysunku 8.2.1.4 przedstawiono rozkład zmiennej kontrolnej, który uzyskano w wyniku minimalizacji funkcji celu. Rysunek 8.2.1.5 prezentuje rozkład temperatury w rozważanej płycie.

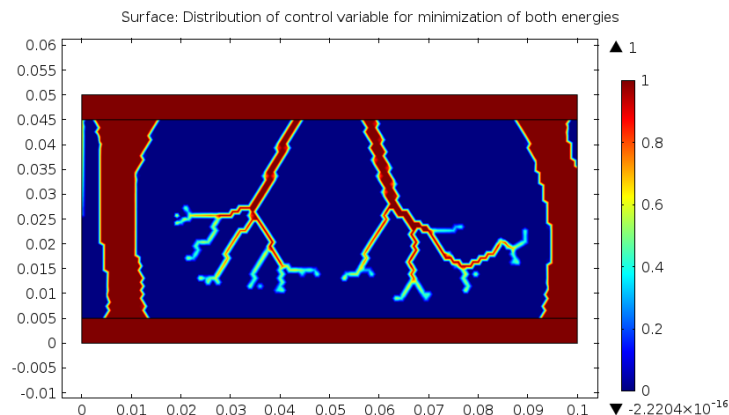


Rys. 8.2.1.4 Rozkład zmiennej kontrolnej

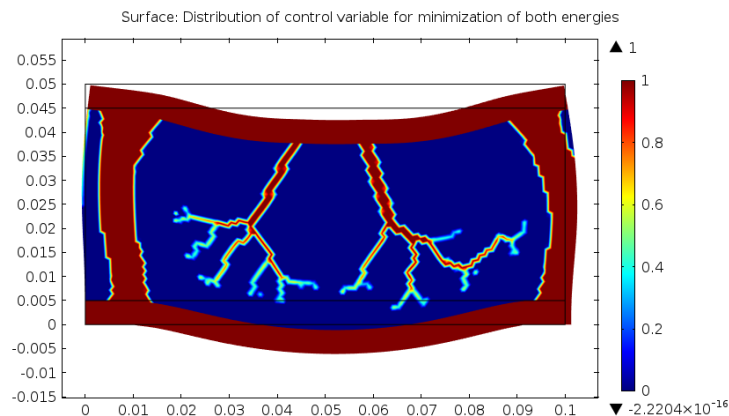


Rys. 8.2.1.5 Rozkład temperatury

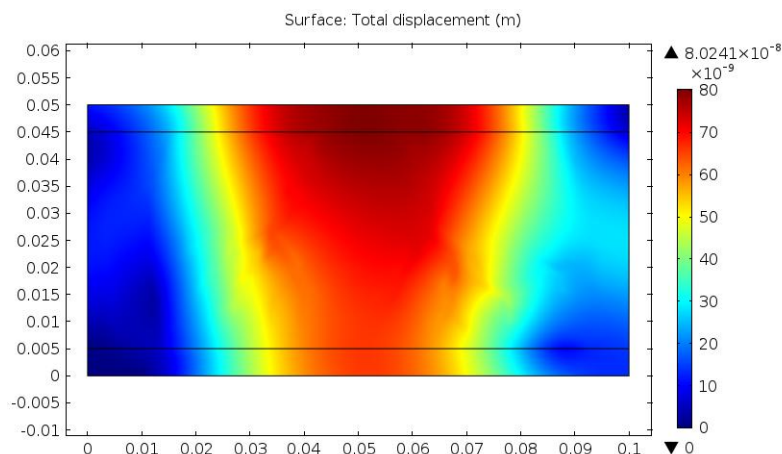
Kolejnym etapem obliczeń była minimalizacja obu energii jednocześnie, dla $w_t = \frac{1}{2} \left[\frac{\text{kg}}{\text{J}} \right]$ i $w_s = \frac{1}{2} \left[\frac{\text{m}^3}{\text{J}} \right]$. Na rysunku 8.2.1.6 przedstawiono rozkład zmiennej kontrolnej. Deformacje płyty zaprezentowano na rysunku 8.2.1.7. Rysunek 8.2.1.8 pokazuje rozkład przemieszczeń w płycie, natomiast rysunek 8.2.1.9 pokazuje rozkład temperatury.



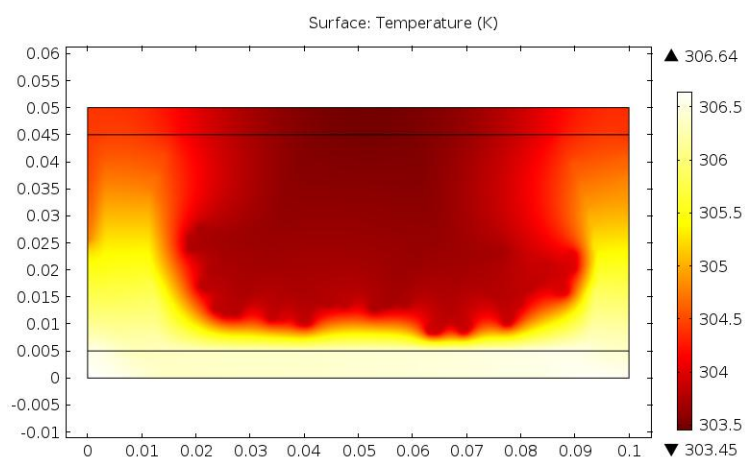
Rys. 8.2.1.6 Rozkład zmiennej kontrolnej



Rys. 8.2.1.7 Deformacja płyty



Rys. 8.2.1.8 Rozkład przemieszczeń w płycie



Rys. 8.2.1.9 Rozkład temperatury

W tabeli 8.2.1.1 zestawiono wyniki obliczeń dla wszystkich wariantów minimalizacji energii dla $A_{\text{frac}} = 0.2$.

Funkcja celu	Średnia wartość energii odkształcenia E_s [J/m ³]	Średnia wartość energii termicznej E_t [J/kg]
E_s avg	0.00211	-
E_t avg	-	1.4465e4
E_s avg i E_t avg ($w_t=w_s=1/2$)	0.00506	1.4465e4

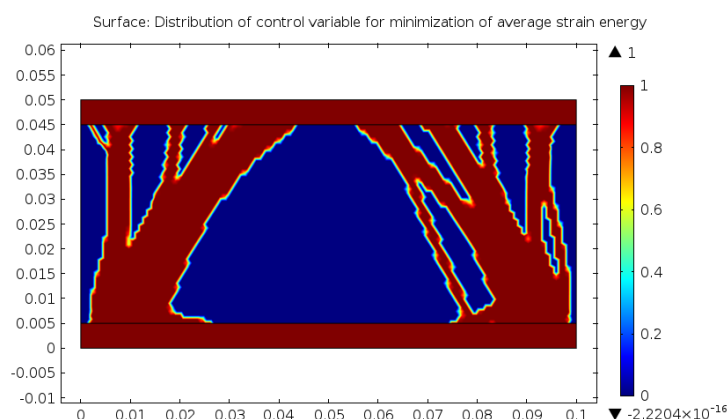
Tab. 8.2.1.1 Zestawienie średnich wartości energii uzyskany z obliczeń dla $A_{\text{frac}} = 0.2$

Warto zauważyć, że w trzecim wariantcie (optymalizacji wielokryterialnej - jednocześnie energii termicznej i mechanicznej) decydujący wpływ na strukturę

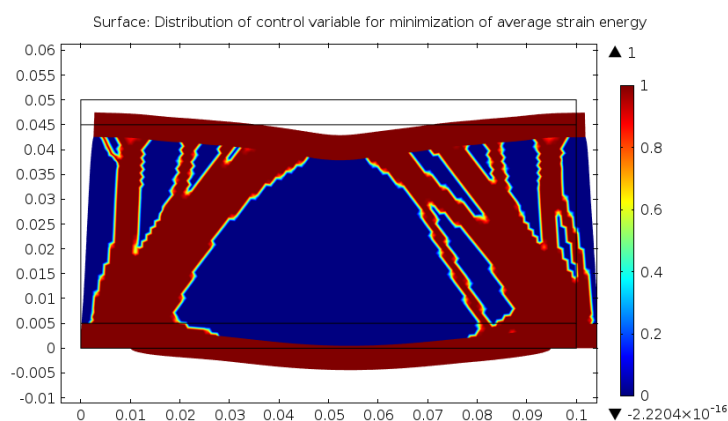
warstwy środkowej miały właściwości termiczne, niezależnie od procentowego udziału materiałów.

8.2.2 Wyniki obliczeń dla $A_{\text{frac}} = 0.4$

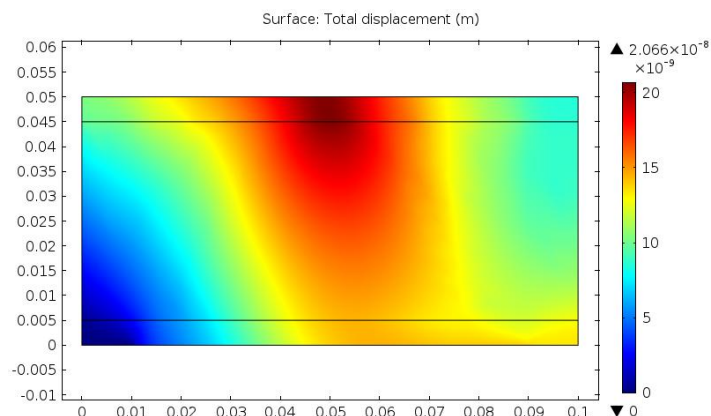
Na rysunku 8.2.2.1 przedstawiono rozkład zmiennej kontrolnej, który uzyskano z minimalizacji średniej wartości energii odkształcenia. Rysunek 8.2.2.2 prezentuje deformację płyty kompozytowej typu sandwich. Na rysunku 8.2.2.3 zaprezentowano rozkład przemieszczeń w płycie.



Rys. 8.2.2.1 Rozkład zmiennej kontrolnej

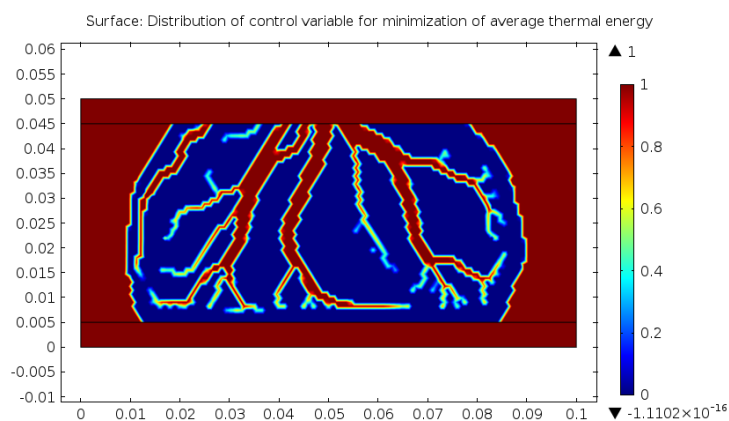


Rys. 8.2.2.2 Deformacja płyty

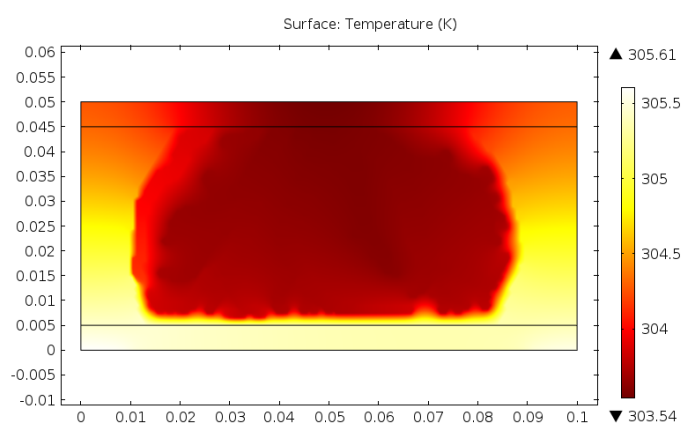


Rys. 8.2.2.3 Rozkład przemieszczeń w płycie

Następnie przeprowadzono optymalizację średniej wartości energii termicznej. Na rysunku 8.2.2.4 przedstawiono rozkład zmiennej kontrolnej, który uzyskano w wyniku minimalizacji $E_{t \text{ avg}}$. Rysunek 8.2.2.5 prezentuje rozkład temperatury w rozważanej płycie.

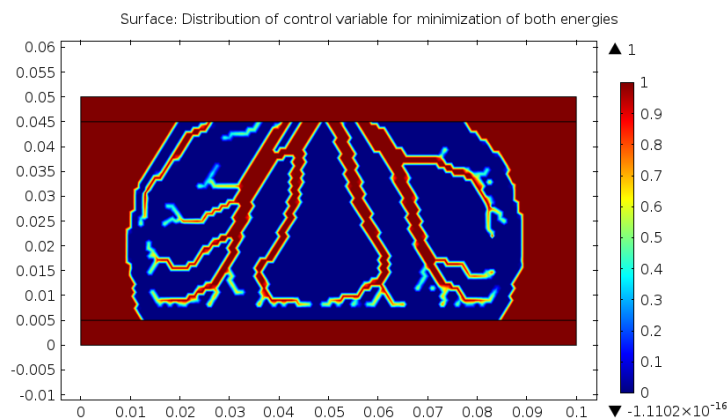


Rys. 8.2.2.4 Rozkład zmiennej kontrolnej

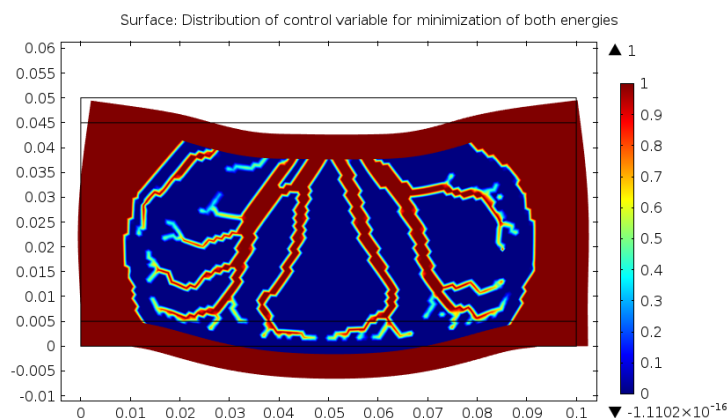


Rys. 8.2.2.5 Rozkład temperatury

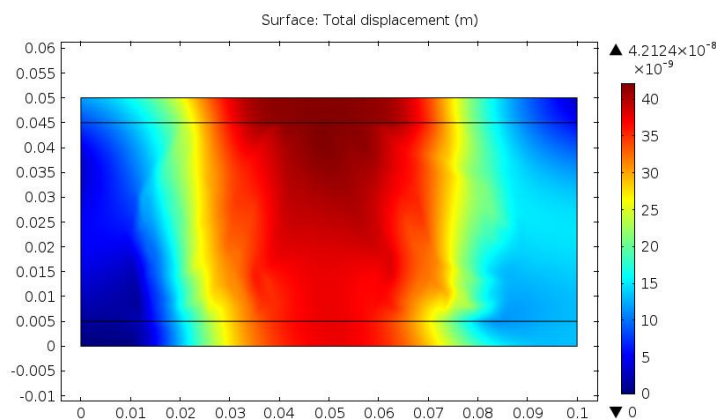
Kolejnym etapem obliczeń była minimalizacja obu energii jednocześnie, dla $w_t = \frac{1}{2} \left[\frac{\text{kg}}{\text{J}} \right]$ i $w_s = \frac{1}{2} \left[\frac{\text{m}^3}{\text{J}} \right]$. Na rysunku 8.2.2.6 przedstawiono rozkład zmiennej kontrolnej. Deformacje płyty zaprezentowano na rysunku 8.2.2.7. Rysunek 8.2.2.8 pokazuje rozkład przemieszczeń w płycie, natomiast rysunek 8.2.2.9 pokazuje rozkład temperatury.



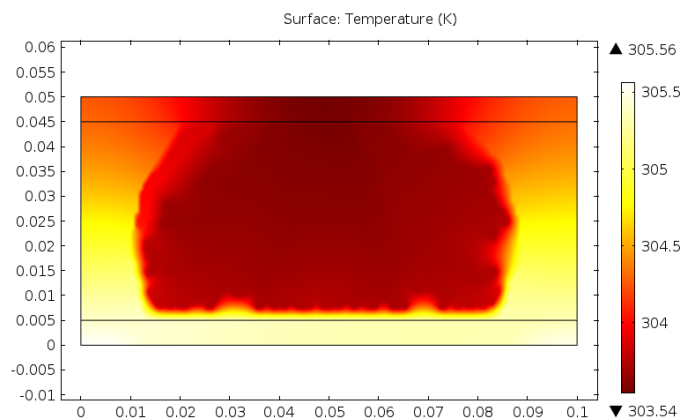
Rys. 8.2.2.6 Rozkład zmiennej kontrolnej



Rys. 8.2.2.7 Deformacja płyty



Rys. 8.2.2.8 Rozkład przemieszczeń w płycie



Rys. 8.2.2.9 Rozkład temperatury

W tabeli 8.2.2.1 zestawiono wyniki obliczeń dla wszystkich wariantów minimalizacji energii dla $A_{\text{frac}} = 0.4$.

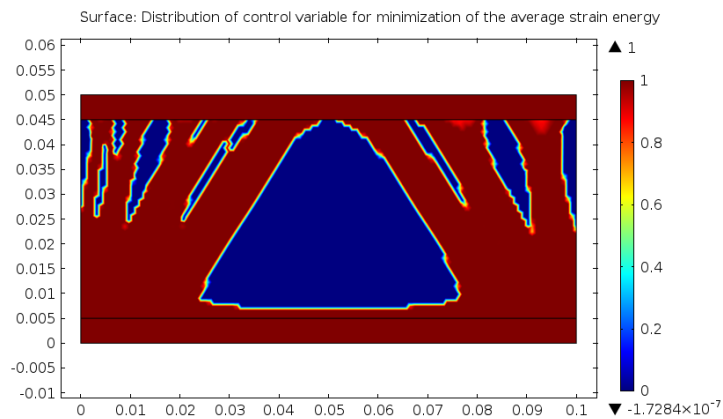
Funkcja celu	Średnia wartość energii odkształcenia E_s [J/m ³]	Średnia wartość energii termicznej E_t [J/kg]
$E_{s \text{ avg}}$	0.00124	-
$E_{t \text{ avg}}$	-	1.4448e4
$E_{s \text{ avg}}$ i $E_{t \text{ avg}}$ ($w_t=w_s=1/2$)	0.0026	1.4448e4

Tab. 8.2.2.1 Zestawienie średnich wartości energii uzyskanych z obliczeń dla $A_{\text{frac}} = 0.4$

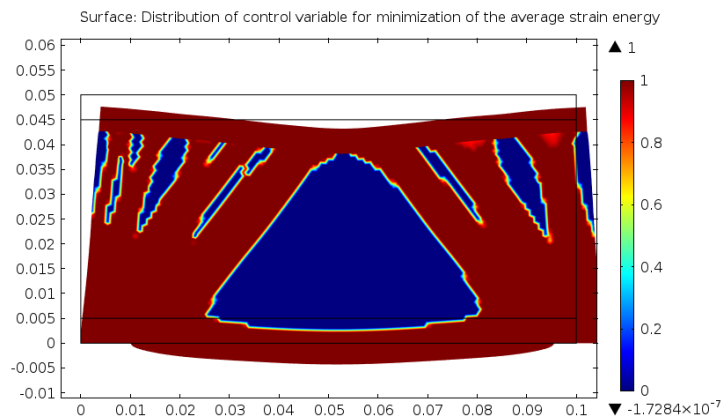
Warto zauważyć, że również w tym przypadku obliczeniowym w trzecim wariantcie (optymalizacji wielokryterialnej - jednocześnie energii termicznej i mechanicznej) decydujący wpływ na strukturę warstwy środkowej miały właściwości termiczne, niezależnie od procentowego udziału materiałów.

8.2.3 Wyniki obliczeń dla $A_{frac} = 0.6$

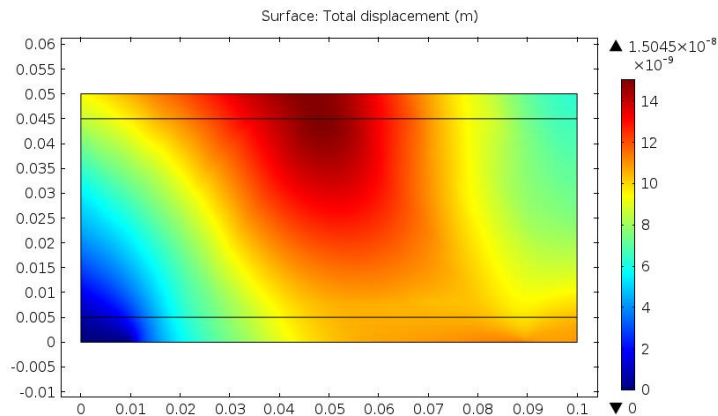
Na rysunku 8.2.3.1 przedstawiono rozkład zmiennej kontrolnej, który uzyskano z minimalizacji średniej wartości energii odkształcenia. Rysunek 8.2.3.2 prezentuje deformację płyty kompozytowej typu sandwich. Na rysunku 8.2.3.3 zaprezentowano rozkład przemieszczeń w płycie.



Rys. 8.2.3.1 Rozkład zmiennej kontrolnej

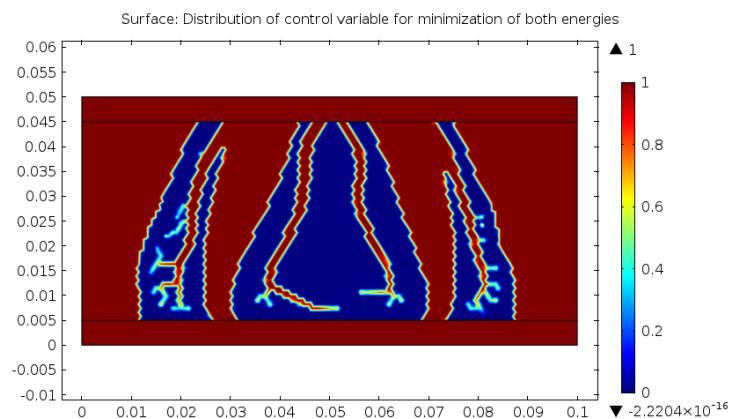


Rys. 8.2.3.2 Deformacja płyty

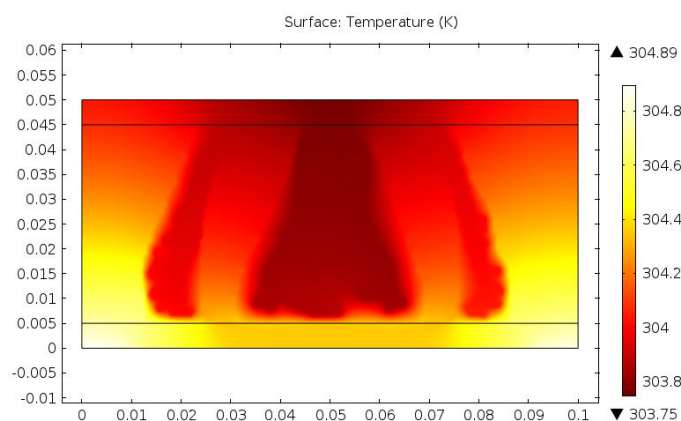


Rys. 8.2.3.3 Rozkład przemieszczeń w płycie

Następnie przeprowadzono optymalizację średniej wartości energii termicznej. Na rysunku 8.2.3.4 przedstawiono rozkład zmiennej kontrolnej, który uzyskano w wyniku minimalizacji funkcji celu. Rysunek 8.2.3.5 prezentuje rozkład temperatury w rozważanej płycie.

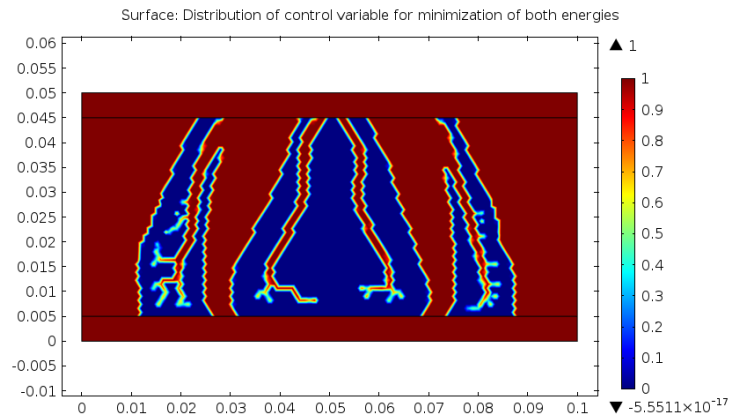


Rys. 8.2.3.4 Rozkład zmiennej kontrolnej

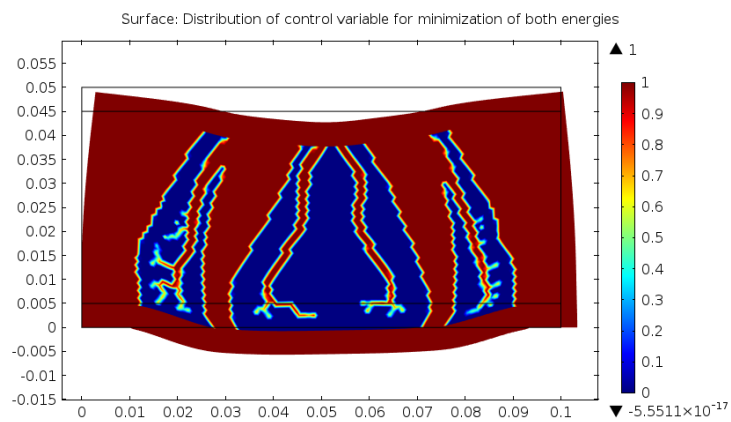


Rys. 8.2.3.5 Rozkład temperatury

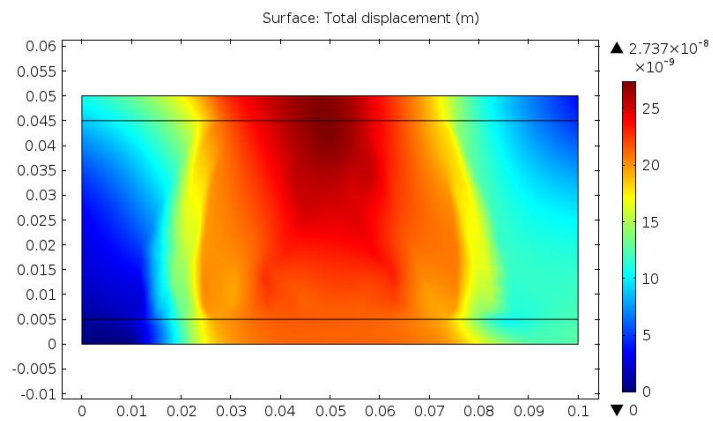
Kolejnym etapem obliczeń była minimalizacja obu energii jednocześnie, dla $w_t = \frac{1}{2} \left[\frac{\text{kg}}{\text{J}} \right]$ i $w_s = \frac{1}{2} \left[\frac{\text{m}^3}{\text{J}} \right]$. Na rysunku 8.2.3.6 przedstawiono rozkład zmiennej kontrolnej. Deformacje płyty zaprezentowano na rysunku 8.2.3.7. Rysunek 8.2.3.8 pokazuje rozkład przemieszczeń w płycie, natomiast rysunek 8.2.3.9 pokazuje rozkład temperatury.



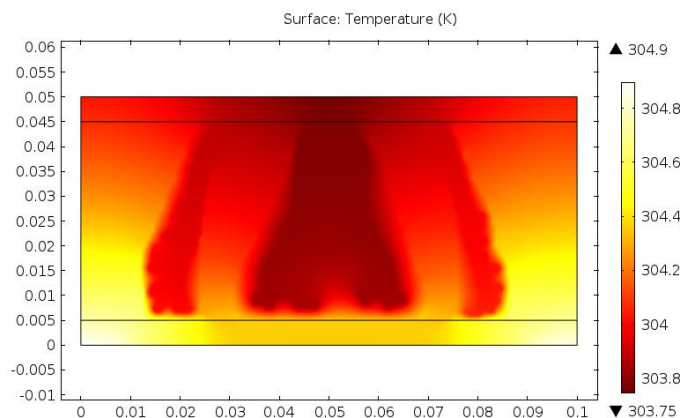
Rys. 8.2.3.6 Rozkład zmiennej kontrolnej



Rys. 8.2.3.7 Deformacja płyty



Rys. 8.2.3.8 Rozkład przemieszczeń w płycie



Rys. 8.2.3.9 Rozkład temperatury

W tabeli 8.2.3.1 zestawiono wyniki obliczeń dla wszystkich wariantów minimalizacji energii dla $A_{frac} = 0.6$.

Funkcja celu	Średnia wartość energii odkształcenia E_s [J/m ³]	Średnia wartość energii termicznej E_t [J/kg]
$E_{s\ avg}$	9.37618e-4	-
$E_{t\ avg}$	-	1.4445e4
$E_{s\ avg}$ i $E_{t\ avg}$ ($w_t=w_s=1/2$)	0.00157	1.4445e4

Tab. 8.2.3.1 Zestawienie średnich wartości energii uzyskany z obliczeń dla $A_{frac} = 0.6$

Również w tym przypadku w trzecim wariantcie (optymalizacji wielokryterialnej - jednocześnie energii termicznej i mechanicznej) decydujący wpływ na strukturę warstwy środkowej miały właściwości termiczne, niezależnie od procentowego udziału materiałów. Jednocześnie zauważalny jest bardzo istotny wpływ tego jaka energia (termiczna czy mechaniczna odkształcenia) jest minimalizowana. Otrzymane w wyniku optymalizacji struktury różnią się znacząco w związku z zaimplementowaniem różnych funkcji celu.

8.3 Minimalizacja średniej wartości energii termicznej i średniej wartości energii odkształcenia - wariant 2

Następnym etapem badań były symulacje przeprowadzone dla minimalizacji średniej wartości energii termicznej i średniej wartości energii odkształcenia jednocześnie, ale dla różnych wartości wag w_t i w_s . Funkcje celu dla rozważanych

przypadków obliczeniowych miała postać równania (8.2.1). Wartości wag zestawiono w tabeli 8.3.1. Warunki brzegowe zadano w taki sam sposób jak w rozdziale 8.2.

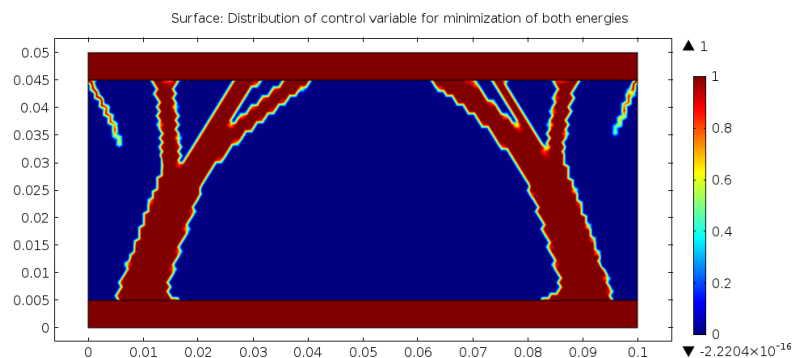
Obliczenia wykonano dla A_{frac} równego kolejno 0.2, 0.4 i 0.6. Dla każdej z tych wartości przeprowadzono jeden typ optymalizacji.

Wagi dla	Wartości wag		
	$A_{\text{frac}} = 0.2$	$A_{\text{frac}} = 0.4$	$A_{\text{frac}} = 0.6$
Energii odkształcenia w_s	1/0.00211	1/0.00124	1/9.37618e-4
Energii termicznej w_t	1/1.4465e4	1/1.4448e4	1/1.4445e4

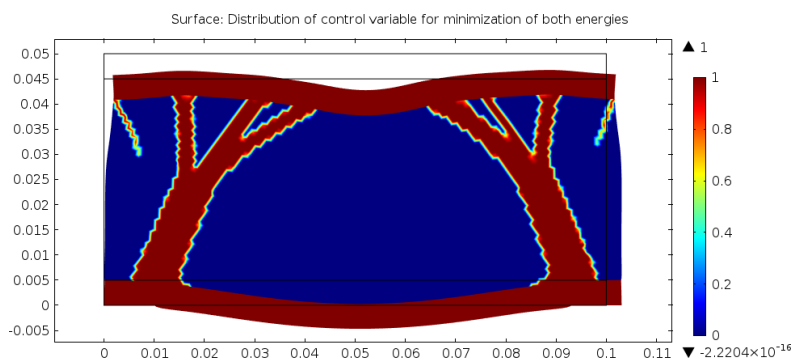
Tab. 8.3.1 Zestawienie wartości wag wykorzystanych do minimalizacji średniej wartości energii termicznej i średniej wartości energii odkształcenia jednocześnie dla różnych A_{frac}

8.3.1 Wyniki obliczeń dla $A_{\text{frac}} = 0.2$

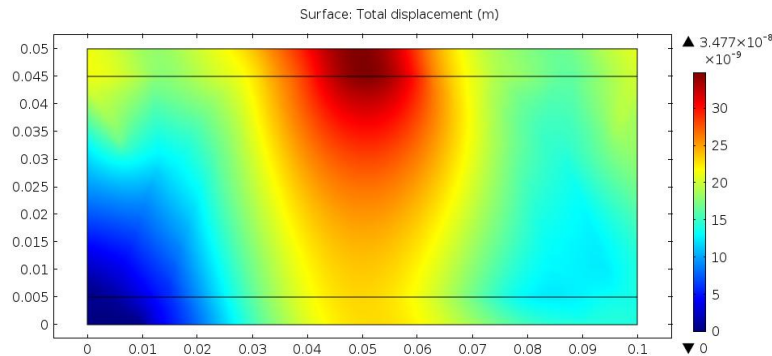
Na rysunku 8.3.1.1 przedstawiono rozkład zmiennej kontrolnej dla przypadku minimalizacji obu energii jednocześnie z różnymi wagami. Deformacje płyty zaprezentowano na rysunku 8.3.1.2. Rysunek 8.3.1.3 pokazuje rozkład przemieszczeń w płycie, natomiast rysunek 8.3.1.4 pokazuje rozkład temperatury.



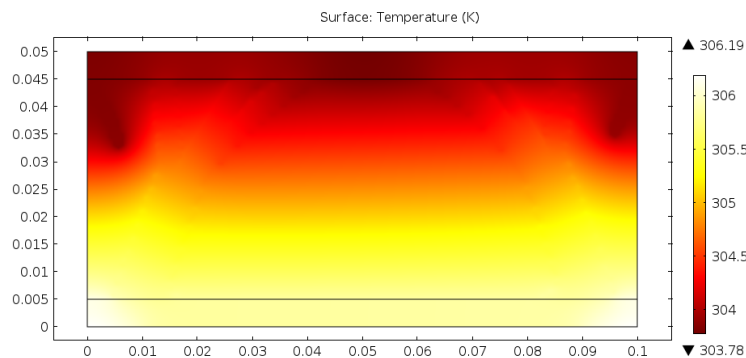
Rys. 8.3.1.1 Rozkład zmiennej kontrolnej



Rys. 8.3.1.2 Deformacja płyty



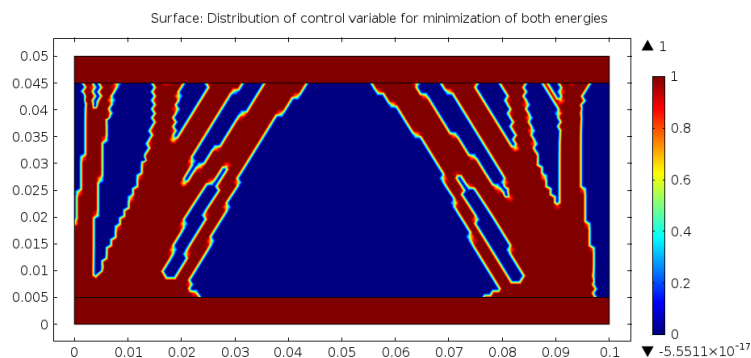
Rys. 8.3.1.3 Rozkład przemieszczeń w płycie



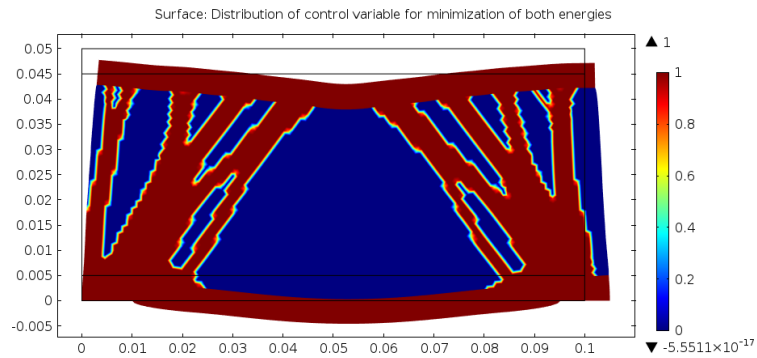
Rys. 8.3.1.4 Rozkład temperatury

8.3.2 Wyniki obliczeń dla $A_{frac} = 0.4$

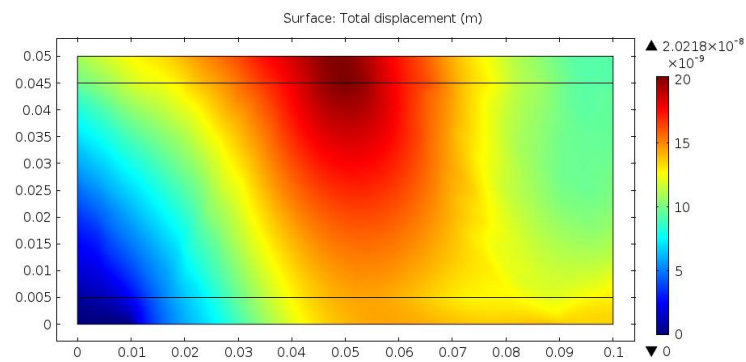
Na rysunku 8.3.2.1 przedstawiono rozkład zmiennej kontrolnej dla przypadku minimalizacji obu energii jednocześnie z różnymi wagami. Deformacje płyty zaprezentowano na rysunku 8.3.2.2. Rysunek 8.3.2.3 pokazuje rozkład przemieszczeń w płycie, natomiast rysunek 8.3.2.4 pokazuje rozkład temperatury.



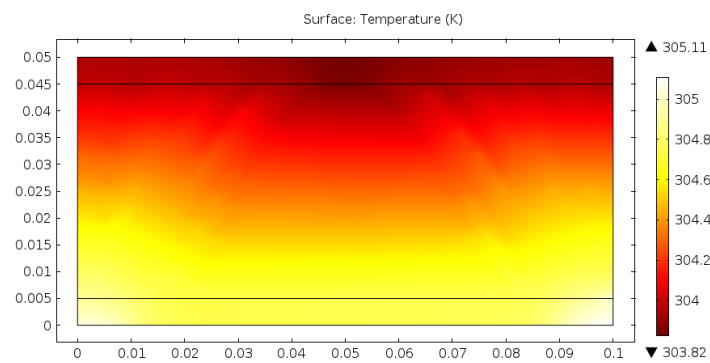
Rys. 8.3.2.1 Rozkład zmiennej kontrolnej



Rys. 8.3.2.2 Deformacja płyty



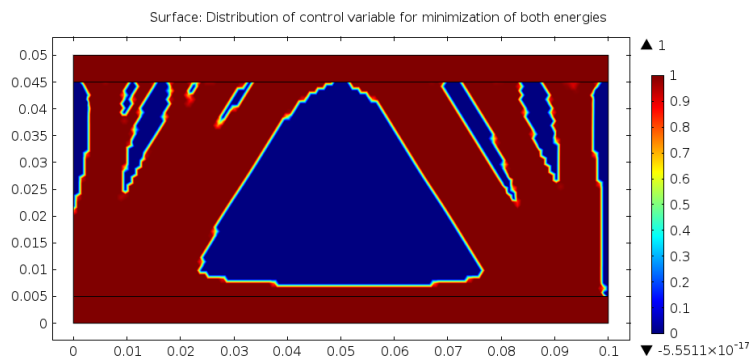
Rys. 8.3.2.3 Rozkład przemieszczeń w płycie



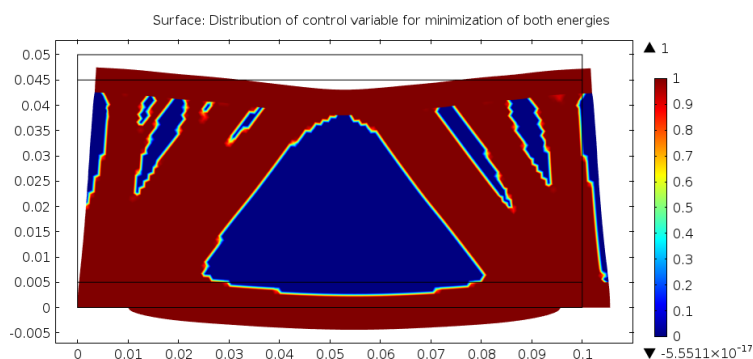
Rys. 8.3.2.4 Rozkład temperatury

8.3.3 Wyniki obliczeń dla $A_{\text{frac}} = 0.6$

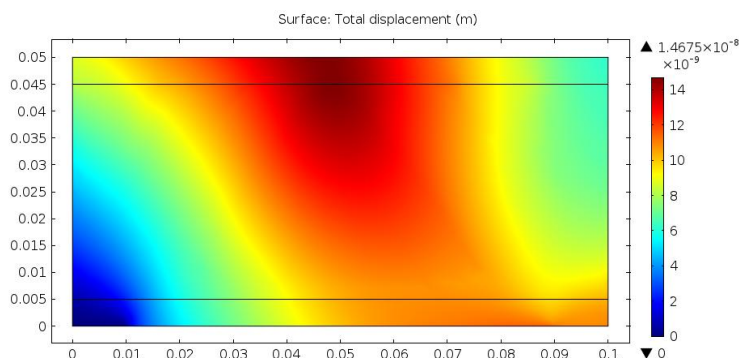
Na rysunku 8.3.3.1 przedstawiono rozkład zmiennej kontrolnej dla przypadku minimalizacji obu energii jednocześnie z różnymi wagami. Deformacje płyty zaprezentowano na rysunku 8.3.3.2. Rysunek 8.3.3.3 pokazuje rozkład przemieszczeń w płycie, natomiast rysunek 8.3.3.4 pokazuje rozkład temperatury.



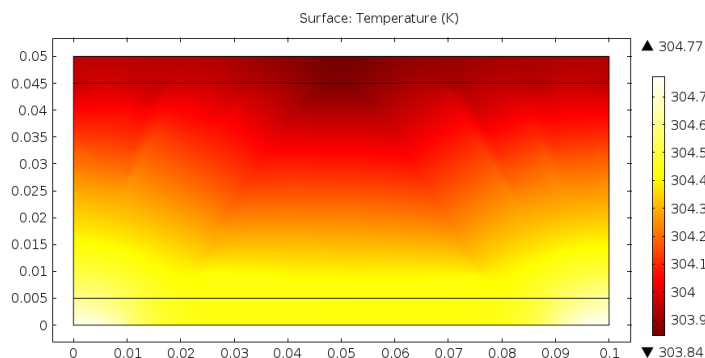
Rys. 8.3.3.1 Rozkład zmiennej kontrolnej



Rys. 8.3.3.2 Deformacja płyty



Rys. 8.3.3.3 Rozkład przemieszczeń w płycie



Rys. 8.3.3.4 Rozkład temperatury

W celu porównania wyników uzyskanych z obliczeń, przedstawionych w rozdziałach 8.2 i 8.3, wszystkie zoptymalizowane wartości, dla wszystkich wariantów obliczeń, zestawiono w tabeli 8.3.3.1.

Funkcja celu	Średnia wartość energii odkształcenia E_s [J/m ³]			Średnia wartość energii termicznej E_t [J/kg]		
	$A_{frac} = 0.2$	$A_{frac} = 0.4$	$A_{frac} = 0.6$	$A_{frac} = 0.2$	$A_{frac} = 0.4$	$A_{frac} = 0.6$
$E_{s\ avg}$	0.00211	0.00124	9.37618e-4	-	-	-
$E_{t\ avg}$	-	-	-	1.4465e4	1.4448e4	1.4445e4
$E_{s\ avg}$ i $E_{t\ avg}$ ($w_t = w_s = 1/2$)	0.00506	0.0026	0.00157	1.4465e4	1.4448e4	1.4445e4
$E_{s\ avg}$ i $E_{t\ avg}$ (w_t, w_s - Tab.8.3.1)	0.00215	0.00124	9.37977e-4	1.4481e4	1.4457e4	1.4449e4

Tab. 8.3.3.1 Zestawienie wyników obliczeń przedstawionych w rozdziałach 8.2 i 8.3

Z powyższych wyników można wnioskować, że w przypadku minimalizacji średniej wartości energii termicznej i średniej wartości energii odkształcenia jednocześnie, gdy wagi $w_t = w_s = 1/2$, rozkład zmiennej kontrolnej jest zbliżony do rozkładu zmiennej kontrolnej w przypadku, gdy minimalizowana jest jedynie średnia wartość energii termicznej. Można zatem uważać, że energia termiczna dominuje w tym przypadku obliczeniowym.

Odwrotną sytuację można zaobserwować w przypadku, gdy analizowane są wyniki minimalizacji średniej wartości energii termicznej i średniej wartości energii odkształcenia jednocześnie z różnymi wagami. Wtedy rozkład zmiennej kontrolnej jest zbliżony do rozkładu zmiennej kontrolnej w przypadku, gdy minimalizowana jest jedynie średnia wartość energii odkształcenia.

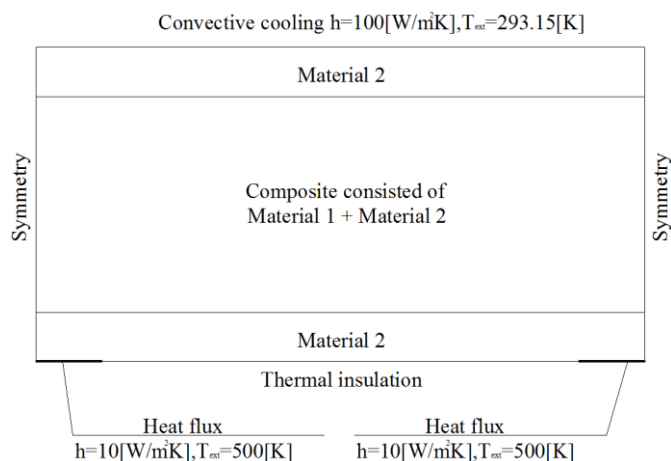
9. Właściwości dynamiczne struktur termicznie optymalnych

Wyniki z poprzedniego rozdziału pokazały znaczący wpływ rodzaju przeprowadzanej optymalizacji, a mianowicie czy optymalizowana była energia termiczna, czy też mechaniczna odkształceń. Z tego też powodu konieczne jest zbadanie jak po optymalizacji jednej z właściwości zmieniają się inne.

W ostatnim etapie badań przeprowadzono więc analizę właściwości dynamicznych struktur termicznie optymalnych. Do obliczeń wykorzystano model płyty warstwowej typu sandwich wykonanej ze stali i pianki poliuretanowej. W pierwszym kroku wykonano optymalizację struktury 2D, która pozwoliła uzyskać płytę kompozytową termicznie optymalną. W drugim kroku przeprowadzono analizę właściwości dynamicznych otrzymanej płyty. W celu zweryfikowania poprawności obliczeń wykonano również symulacje dla trzech rodzajów płyt warstwowych (jak na rysunku 8.1.6). Wyniki średniej wartości energii termicznej oraz wyznaczone częstotliwości własne dla wszystkich płyt zestawiono w tabelach.

Podobnie jak we wcześniejszych rozdziałach rysunki zmiennej kontrolnej są reprezentacją grafiki rastrowej w kolorze czerwono-niebieskim. Kolor niebieski - wartość zmiennej kontrolnej $r = 0$ - odpowiada pierwszemu materiałowi, z przewodnością cieplną k_1 . Natomiast kolor czerwony - wartość zmiennej kontrolnej $r = 1$ - odpowiada drugiemu materiałowi, z przewodnością cieplną k_2 .

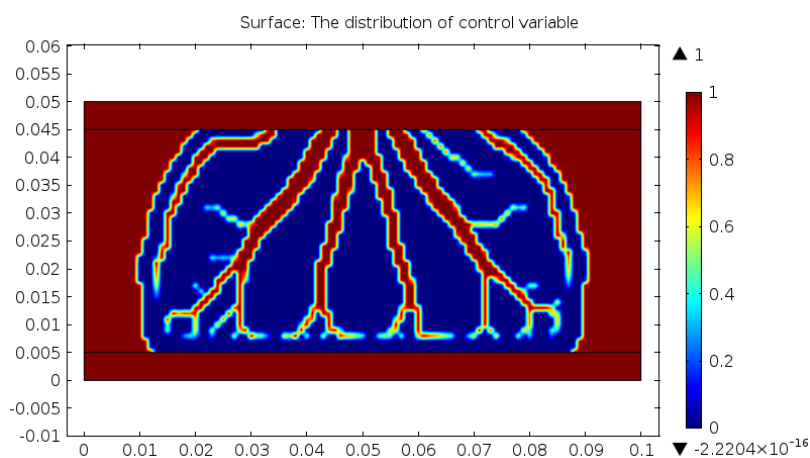
Rozważany model płyty miał kształt prostokąta o wymiarach 0.1 [m] x 0.05 [m]. Założono warunki brzegowe w postaci warunku Fouriera i warunku symetrii. Na całej długości górnego brzegu przyłożono chłodzenie konwekcyjne ze współczynnikiem przejmowania ciepła $h = 100 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} \right]$ i temperaturą $T_{\text{ext}} = 293.15[\text{K}]$. Na dwóch odcinkach długości 0.02 [m] na dolnym brzegu przyłożono strumień ciepła ze współczynnikiem przejmowania ciepła $h = 10 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} \right]$ i temperaturą $T_{\text{ext}} = 500[\text{K}]$, jak przedstawiono na rysunku 9.1. Źródło ciepła dla rozważanego przypadku jest równe $Q = 0 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right]$. Model został zdyskretyzowany siatką składającą się z 56280 czworobocznych elementów z funkcją kształtu Lagrange'a drugiego rzędu.



Rys. 9.1 Warunki brzegowe do optymalizacji termicznej

Funkcja celu została opisana wzorem 8.1, a nałożone na nią ograniczenia opisano za pomocą wzorów 8.3 i 8.4. Właściwości materiałów zostały zestawione w tabeli 8.2.1 w poprzednim rozdziale.

Na rysunku 9.2 przedstawiono rozkład zmiennej kontrolnej uzyskany w wyniku minimalizacji średniej wartości energii termicznej dla $A_{\text{frac}} = 0.4$.



Rys. 9.2 Rozkład zmiennej kontrolnej

W tabeli 9.1 zestawiono wyniki średniej wartości energii termicznej, które uzyskano z symulacji przeprowadzonych dla trzech rodzajów płyt warstwowych oraz płyty kompozytowej typu sandwich.

Typ płyty	Średnia wartość energii termicznej [m ² /s ²]
Optymalna płyta kompozytowa typu sandwich	1.4129e5
Kompozyt warstwowy 1 (warstwa z k_2 na środku)	1.69958e5
Kompozyt warstwowy 2 (warstwa z k_2 na dole)	1.79572e5
Kompozyt warstwowy 3 (warstwa z k_2 na górze)	1.6038e5

Tab. 9.1 Zestawienie średnich wartości energii termicznej dla różnych rodzajów płyt

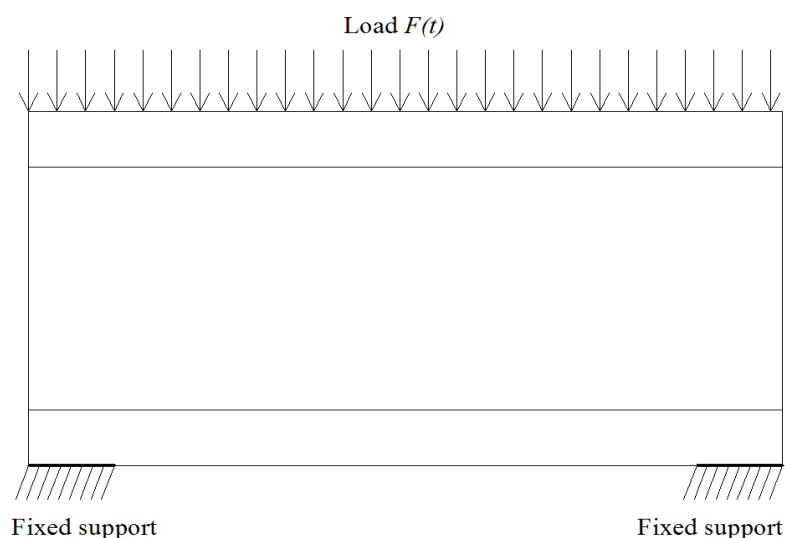
Również w tym przypadku, jak wynika z tabeli 9.1, proponowana płyta kompozytowa osiąga niższe wartości średniej energii termicznej niż płyty laminatowe, niezależnie od miejsca położenia warstwy materiału 2.

9.1 Wyznaczenie częstości własnych

W celu wyznaczenia częstości własnych w płycie kompozytowej przyłożono warunki brzegowe w postaci obciążenia $F(t)$ na całej długości górnego brzegu, takiego że:

$$F(t) = F_l \sin(\omega t), \text{ gdzie } F_l = 10000 \text{ [N/m}^2\text{]}. \quad (9.1.1)$$

Na dwóch odcinkach o długości 0.2[m] płyta została utwierdzona, jak przedstawiono na rysunku 9.1.1.



Rys. 9.1.1 Warunku brzegowe do analizy właściwości dynamicznych

Na potrzeby analizy właściwości dynamicznych płyty kompozytowej termicznie optymalnej właściwości takie jak przewodność cieplna, moduł Younga, współczynnik Poissona oraz gęstość zostały zapisane za pomocą schematu interpolacyjnego SIMP (wzory: 4.1.1.1, 8.2.1, 8.2.2, 8.2.3). Obliczenia wykonano przy użyciu MES oraz równania Navier'a wykorzystując liniowy związek konstytutywny między naprężeniami i odkształceniami (wzór 5.2.1.10).

Symulacje umożliwiły wyznaczenie sześciu pierwszych częstości własnych dla płyty kompozytowej. W tabeli 9.1.1 zestawiono wyniki dla płyty kompozytowej z wynikami dla trzech płyt warstwowych.

No.	1	2	3	4	5	6
Optymalna płyta kompozytowa typu sandwich	5502.93	7712.40	14618.93	15047.05	17713.10	19548.60
Kompozyt warstwowy 1 (warstwa z k_2 na środku)	3606.20	4482.82	7123.74	10376.22	11651.42	13137.66
Kompozyt warstwowy 2 (warstwa z k_2 na dole)	5468.04	8546.50	12111.30	12925.40	15020.60	15375.50
Kompozyt warstwowy 3 (warstwa z k_2 na górze)	2593.97	3718.00	5764.30	11591.82	15148.03	16681.87

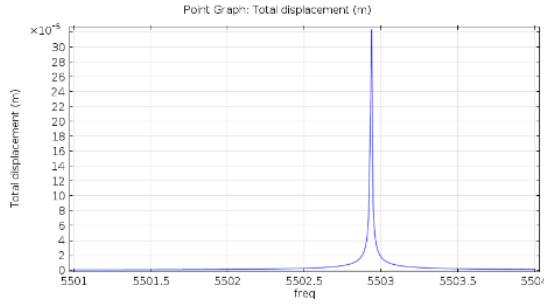
Tab. 9.1.1 Wartości częstości własnych

Jak pokazano w tabeli 9.1.1 dla większości kolejnych częstości własnych kompozytu termicznie optymalnego wartości tych częstości własnych są większe od częstości własnych laminatów.

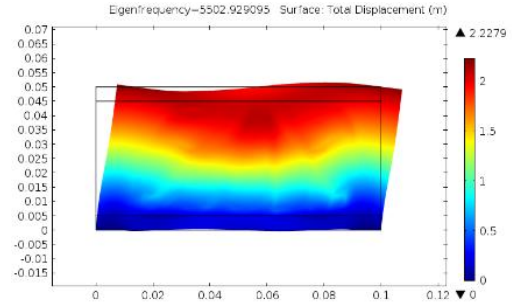
9.2 Odpowiedź układu na wymuszenie harmoniczne i postacie drgań własnych

Dla wszystkich badanych płyt wyznaczono odpowiedź układu na wymuszenie harmoniczne oraz postacie drgań własnych dla sześciu częstości własnych zestawionych w tabeli 9.1.1.

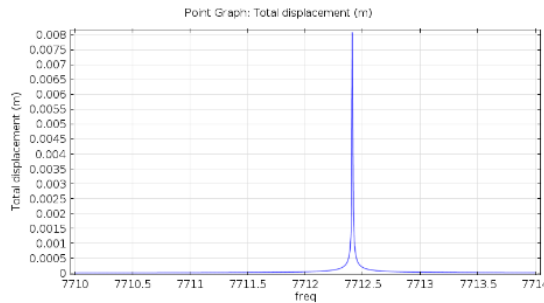
Rysunki 9.2.1 - 9.2.6 prezentują amplitudę drgań wymuszonych oraz postacie drgań własnych dla sześciu najmniejszych częstości własnych dla optymalnej płyty kompozytowej typu sandwich.



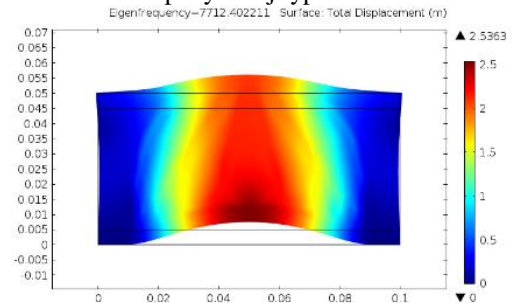
Rys. 9.2.1 a) Amplituda drgań wymuszonych dla optymalnej płyty kompozytowej typu sandwich



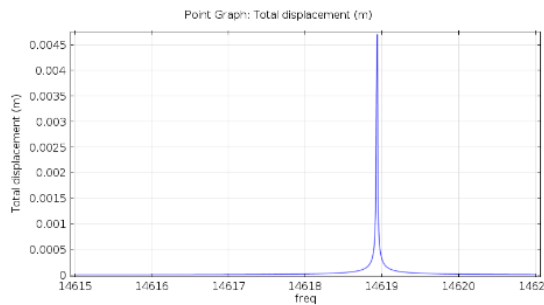
Rys. 9.2.1 b) Postać drgań własnych dla pierwszej częstotliwości własnej dla optymalnej płyty kompozytowej typu sandwich



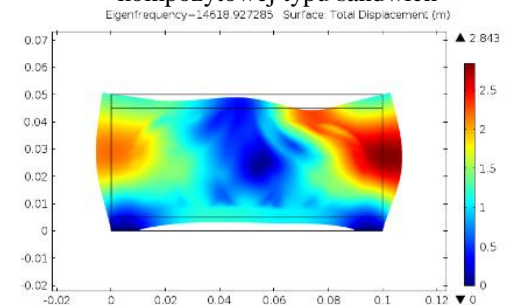
Rys. 9.2.2 a) Amplituda drgań wymuszonych dla optymalnej płyty kompozytowej typu sandwich



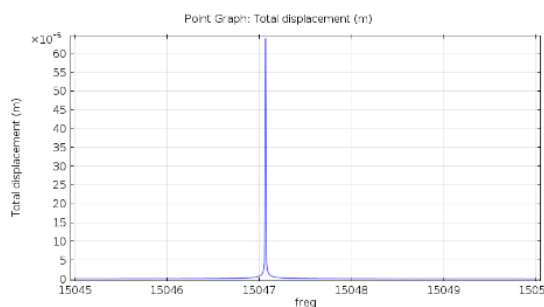
Rys. 9.2.2 b) Postać drgań własnych dla drugiej częstotliwości własnej dla optymalnej płyty kompozytowej typu sandwich



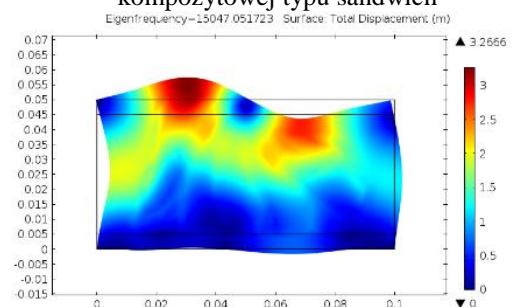
Rys. 9.2.3 a) Amplituda drgań wymuszonych dla optymalnej płyty kompozytowej typu sandwich



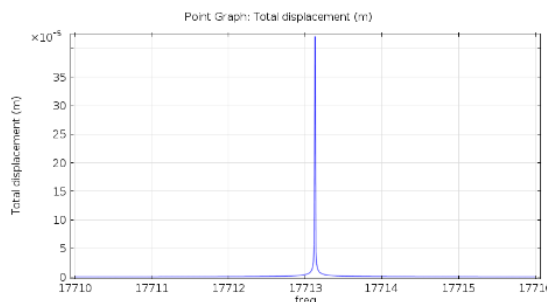
Rys. 9.2.3 b) Postać drgań własnych dla trzeciej częstotliwości własnej dla optymalnej płyty kompozytowej typu sandwich



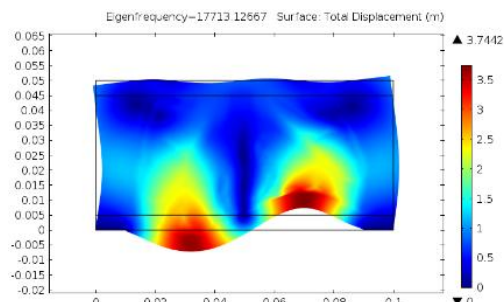
Rys. 9.2.4 a) Amplituda drgań wymuszonych dla optymalnej płyty kompozytowej typu sandwich



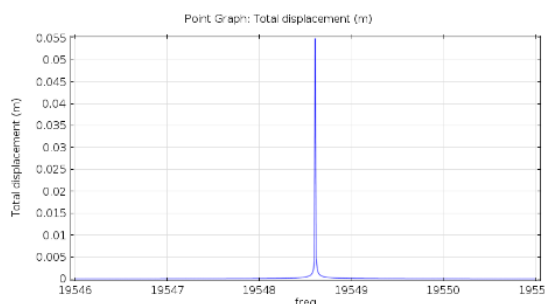
Rys. 9.2.4 b) Postać drgań własnych dla czwartej częstotliwości własnej dla optymalnej płyty kompozytowej typu sandwich



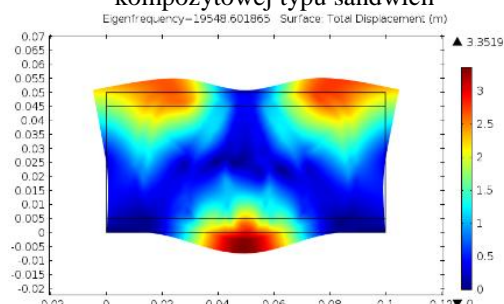
Rys. 9.2.5 a) Amplituda drgań wymuszonych dla optymalnej płyty kompozytowej typu sandwich



Rys. 9.2.5 b) Postać drgań własnych dla piątej częstości własnej dla optymalnej płyty kompozytowej typu sandwich

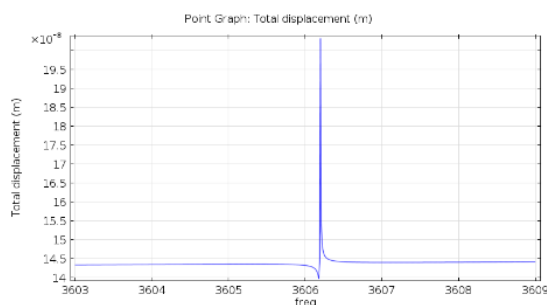


Rys. 9.2.6 a) Amplituda drgań wymuszonych dla optymalnej płyty kompozytowej typu sandwich

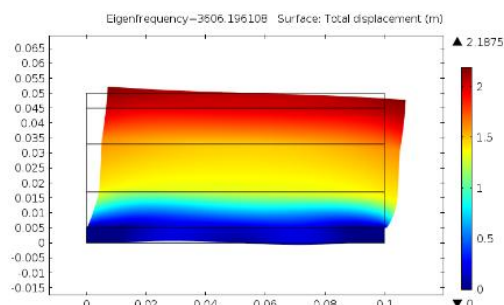


Rys. 9.2.6 b) Postać drgań własnych dla szóstej częstości własnej dla optymalnej płyty kompozytowej typu sandwich

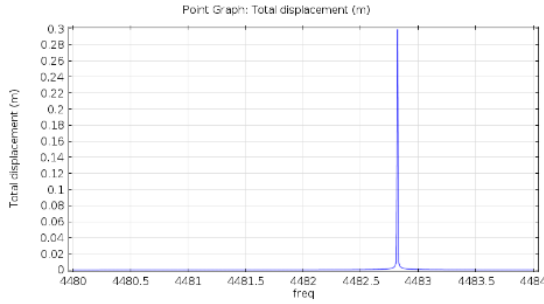
Na rysunkach od 9.2.7 do 9.2.12 zaprezentowano amplitudę drgań wymuszonych oraz postacie drgań własnych dla sześciu częstości własnych dla kompozytu warstwowego 1 w którym warstwa materiału 2 jest na środku.



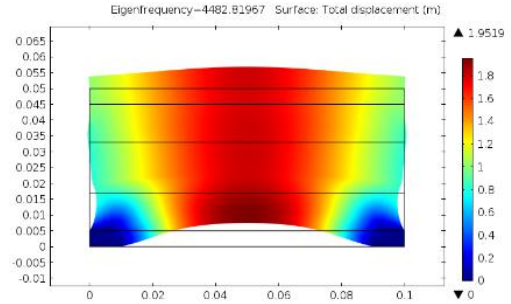
Rys. 9.2.7 a) Amplituda drgań wymuszonych dla kompozytu warstwowego 1



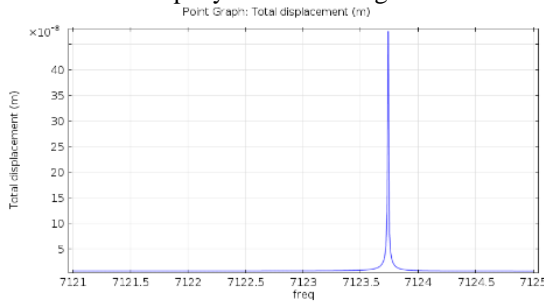
Rys. 9.2.7 b) Postać drgań własnych dla pierwszej częstości własnej dla kompozytu warstwowego 1



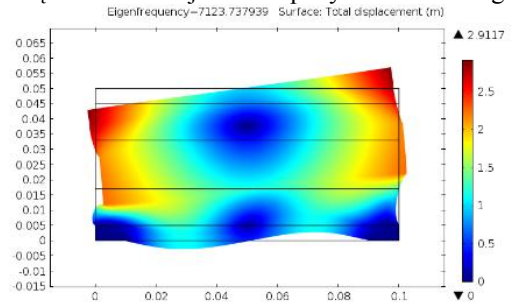
Rys. 9.2.8 a) Amplituda drgań wymuszonych dla kompozytu warstwowego 1



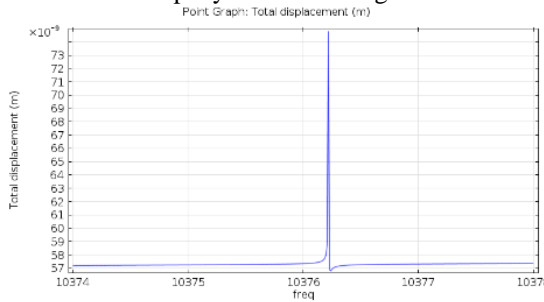
Rys. 9.2.8 b) Postać drgań własnych dla drugiej częstości własnej dla kompozytu warstwowego 1



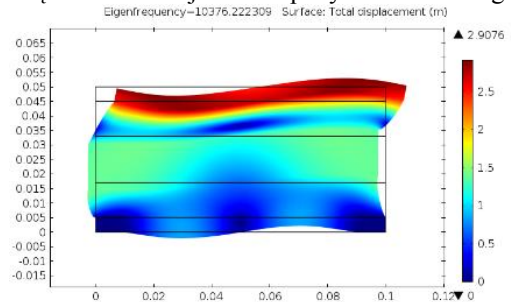
Rys. 9.2.9 a) Amplituda drgań wymuszonych dla kompozytu warstwowego 1



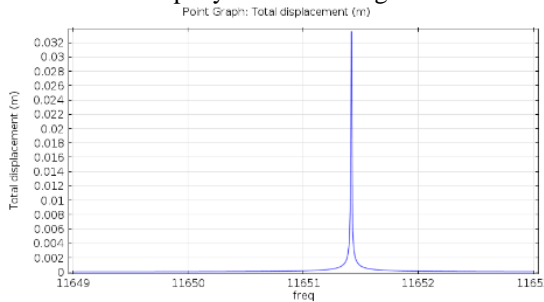
Rys. 9.2.9 b) Postać drgań własnych dla trzeciej częstości własnej dla kompozytu warstwowego 1



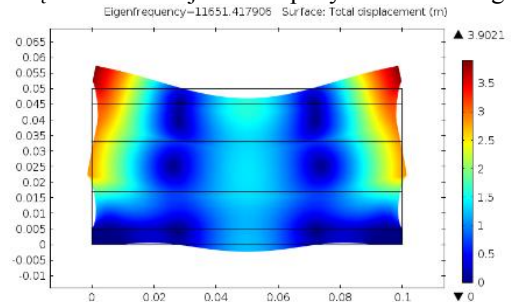
Rys. 9.2.10 a) Amplituda drgań wymuszonych dla kompozytu warstwowego 1



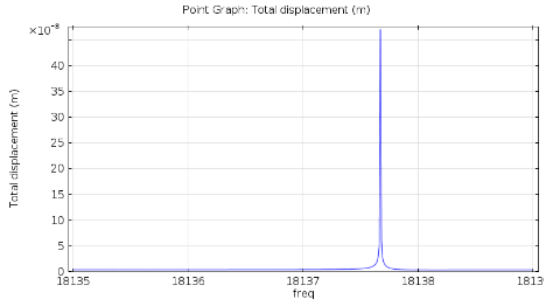
Rys. 9.2.10 b) Postać drgań własnych dla czwartej częstości własnej dla kompozytu warstwowego 1



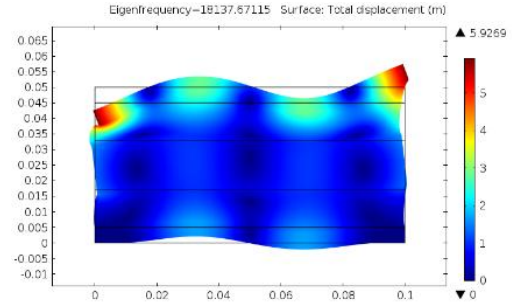
Rys. 9.2.11 a) Amplituda drgań wymuszonych dla kompozytu warstwowego 1



Rys. 9.2.11 b) Postać drgań własnych dla piątej częstości własnej dla kompozytu warstwowego 1

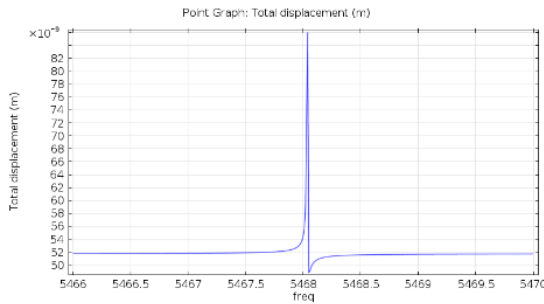


Rys. 9.2.12 a) Amplituda drgań wymuszonych dla kompozytu warstwowego 1

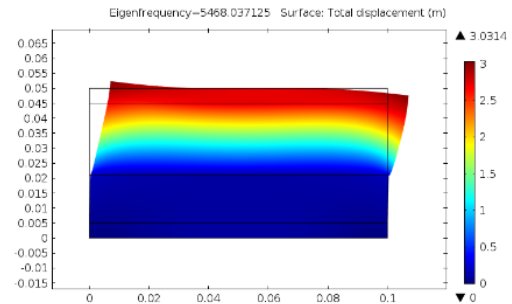


Rys. 9.2.12 b) Postać drgań własnych dla szóstej częstości własnej dla kompozytu warstwowego 1

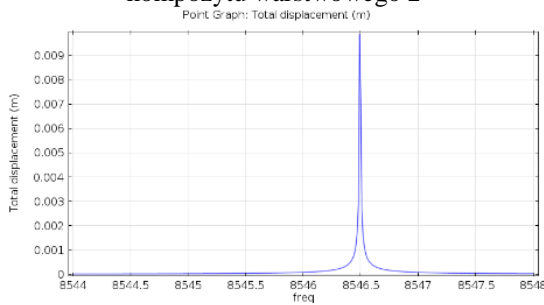
Rysunki 9.2.13 - 9.2.18 prezentują amplitudę drgań wymuszonych oraz postacie drgań własnych dla sześciu częstości własnych dla kompozytu warstwowego 2 w którym warstwa materiału 2 jest na dole.



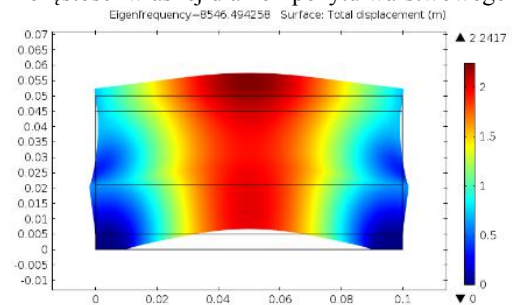
Rys. 9.2.13 a) Amplituda drgań wymuszonych dla kompozytu warstwowego 2



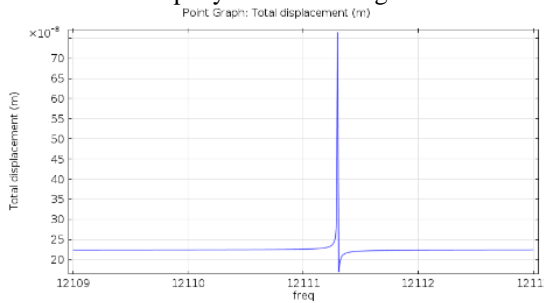
Rys. 9.2.13 b) Postać drgań własnych dla pierwszej częstości własnej dla kompozytu warstwowego 2



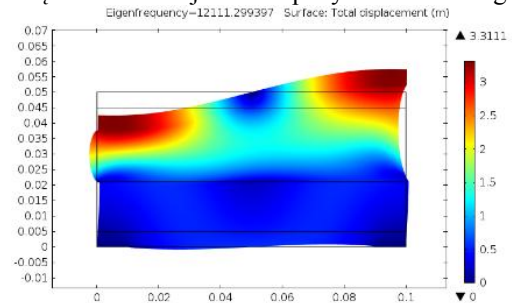
Rys. 9.2.14 a) Amplituda drgań wymuszonych dla kompozytu warstwowego 2



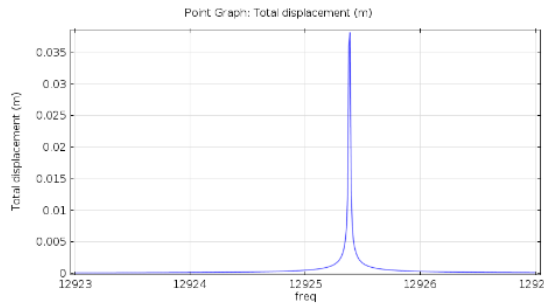
Rys. 9.2.14 b) Postać drgań własnych dla drugiej częstości własnej dla kompozytu warstwowego 2



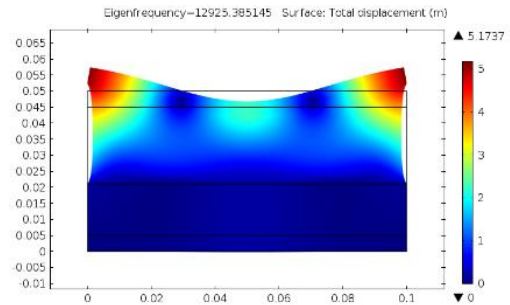
Rys. 9.2.15 a) Amplituda drgań wymuszonych dla kompozytu warstwowego 2



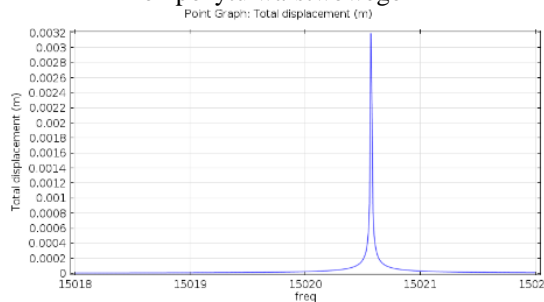
Rys. 9.2.15 b) Postać drgań własnych dla trzeciej częstości własnej dla kompozytu warstwowego 2



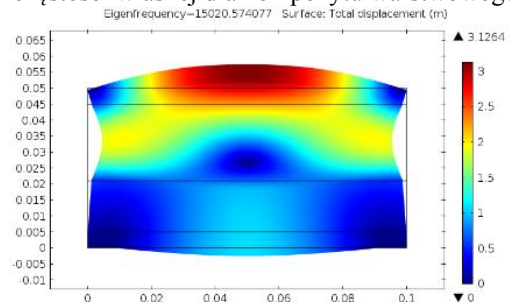
Rys. 9.2.16 a) Amplituda drgań wymuszonych dla kompozytu warstwowego 2



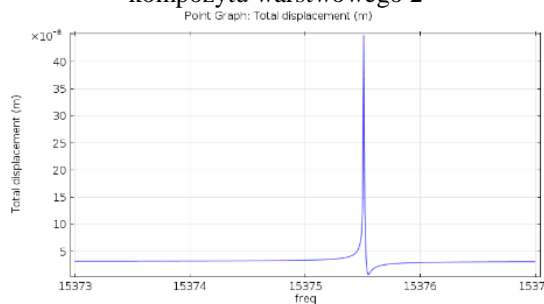
Rys. 9.2.16 b) Postać drgań własnych dla czwartej częstości własnej dla kompozytu warstwowego 2



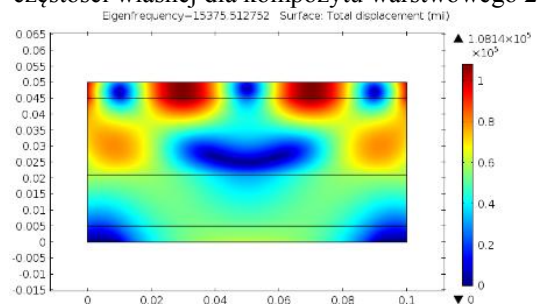
Rys. 9.2.17 a) Amplituda drgań wymuszonych dla kompozytu warstwowego 2



Rys. 9.2.17 b) Postać drgań własnych dla piątej częstości własnej dla kompozytu warstwowego 2

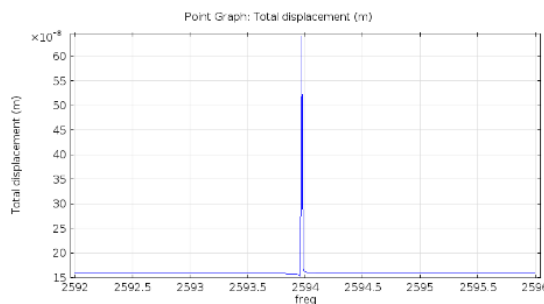


Rys. 9.2.18 a) Amplituda drgań wymuszonych dla kompozytu warstwowego 2

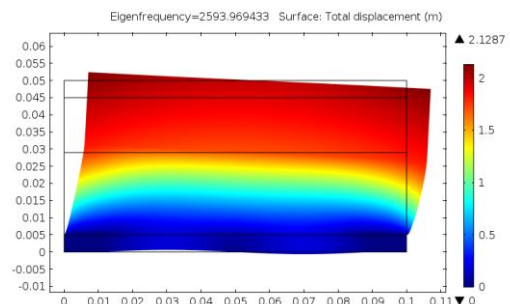


Rys. 9.2.18 b) Postać drgań własnych dla szóstej częstości własnej dla kompozytu warstwowego 2

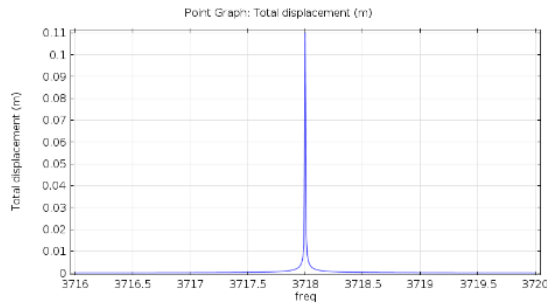
Na rysunkach 9.2.19 - 9.2.24 przedstawiono amplitudę drgań wymuszonych oraz postacie drgań własnych dla sześciu częstości własnych dla kompozytu warstwowego 3 w którym warstwa materiału 2 jest na górze.



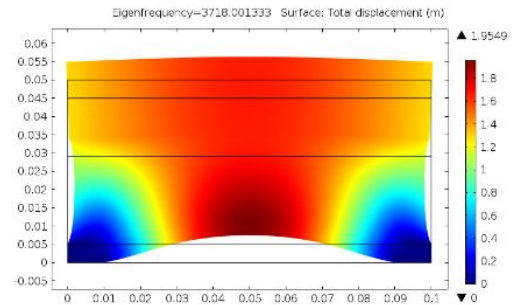
Rys. 9.2.19 a) Amplituda drgań wymuszonych dla kompozytu warstwowego 3



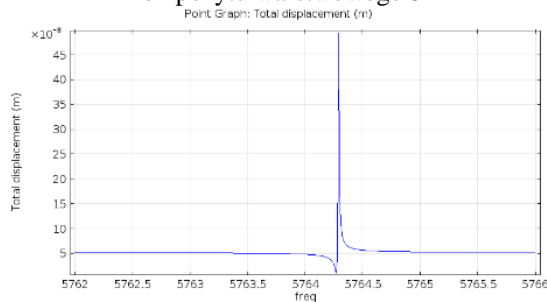
Rys. 9.2.19 b) Postać drgań własnych dla pierwszej częstości własnej dla kompozytu warstwowego 3



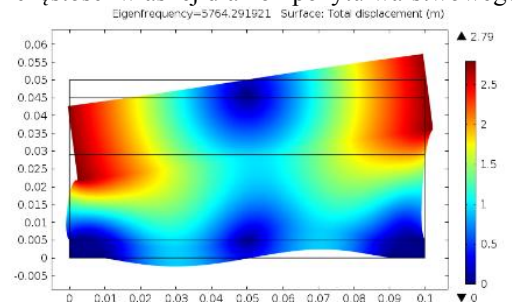
Rys. 9.2.20 a) Amplituda drgań wymuszonych dla kompozytu warstwowego 3



Rys. 9.2.20 b) Postać drgań własnych dla drugiej częstości własnej dla kompozytu warstwowego 3



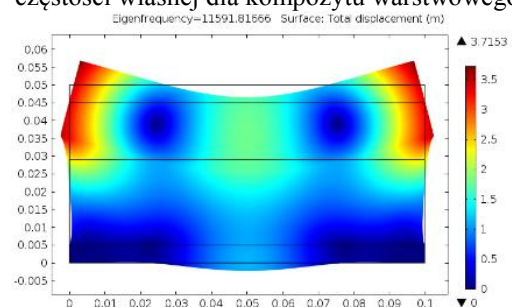
Rys. 9.2.21 a) Amplituda drgań wymuszonych dla kompozytu warstwowego 3



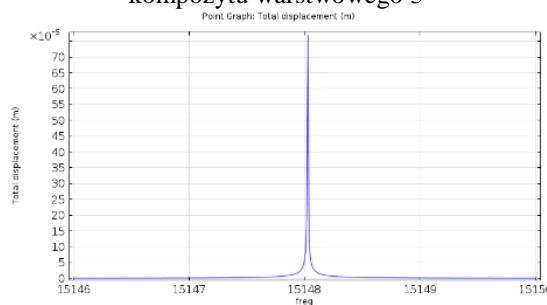
Rys. 9.2.21 b) Postać drgań własnych dla trzeciej częstości własnej dla kompozytu warstwowego 3



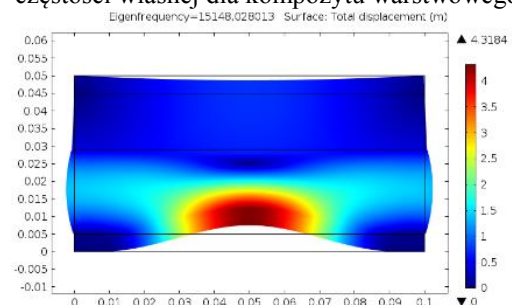
Rys. 9.2.22 a) Amplituda drgań wymuszonych dla kompozytu warstwowego 3



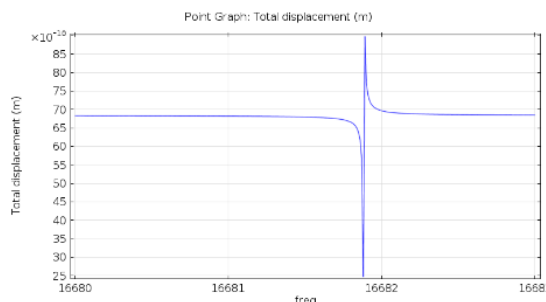
Rys. 9.2.22 b) Postać drgań własnych dla czwartej częstości własnej dla kompozytu warstwowego 3



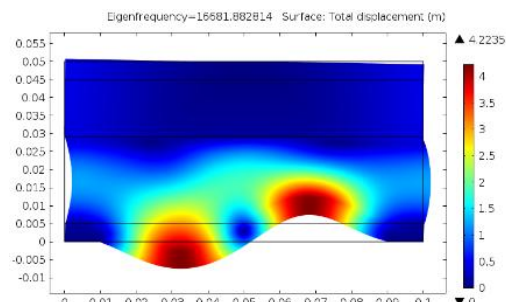
Rys. 9.2.23 a) Amplituda drgań wymuszonych dla kompozytu warstwowego 3



Rys. 9.2.23 b) Postać drgań własnych dla piątej częstości własnej dla kompozytu warstwowego 3



Rys. 9.2.24 a) Amplituda drgań wymuszonych dla kompozytu warstwowego 3



Rys. 9.2.24 b) Postać drgań własnych dla szóstej częstości własnej dla kompozytu warstwowego 3

9.3 Właściwości efektywne

Korzystając z danych zamieszczonych w tabeli 8.2.1 oraz wzorów 2.3.4 i 2.3.5 można wyznaczyć maksymalne i minimalne wartości poszczególnych właściwości opisanej wyżej płyty warstwowej typu sandwich wykonanej ze stali i pianki poliuretanowej. Wyniki obliczeń analitycznych zestawiono w tabeli 9.3.1.

Zakres wartości efektywnych właściwości	Jednostka
$6.58e9 < E_{\text{eff}} < 8.24e10$	$\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$
$0.32 < \nu_{\text{eff}} < 0.34$	-
$0.05 < k_{\text{eff}} < 23.22$	$\left[\frac{\text{W}}{\text{mK}} \right]$

Tab. 9.3.1 Efektywne właściwość płyty warstwowej typu sandwich wyznaczone analitycznie ze wzorów reguły mieszanin (2.3.1) i odwrotnej reguły mieszanin (2.3.2)

Następnie wyznaczono numerycznie efektywne moduł Younga, współczynnik Poissona oraz współczynnik przewodności cieplnej płyty warstwowej typu sandwich, wykorzystując wzory (2.3.6), (2.3.7) i (2.3.8). Wyniki obliczeń numerycznych zestawiono w tabeli 9.3.2.

Właściwość	Wartości efektywne	Jednostka
E_{eff}	2.69e10	$\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$
ν_{eff}	0.253	-
k_{eff}	0.201	$\left[\frac{\text{W}}{\text{mK}} \right]$

Tab. 9.3.2 Efektywne właściwość płyty warstwowej typu sandwich wyznaczone numerycznie

Łatwo zauważyć, że wartość efektywnego współczynnika Poissona wyznaczona numerycznie nie mieści się w zakresie wartości wyznaczonych analitycznie. Obliczenia numeryczne potwierdziły tezę, że reguła mieszanin nie znajduje swojego zastosowania w przypadku wyznaczania właściwości sprężystych bardziej skomplikowanych struktur [Eva1992].

10. Podsumowanie i wnioski

W pracy przedstawiono zagadnienie modelowania i analizy właściwości dynamicznych kompozytu optymalnego termicznie (o optymalnych właściwościach termicznych). Aby uzyskać kompozyt optymalny termicznie przeprowadzono szereg optymalizacji jego właściwości takich jak: średnia wartość temperatury, średnia wartość modułu gradientu temperatury, średnia wartość energii termicznej czy też średnia wartość energii odkształcenia. Za pomocą zaproponowanych algorytmów przeprowadzono optymalizację dla modeli 1D i 2D o różnych kształtach i z różnymi warunkami brzegowymi. W przypadku modelu 1D zastosowano połączenie algorytmu Nelder-Meada z metodą elementów skończonych, natomiast do analizy modeli 2D użyto połączenia metody optymalizacyjnej SNOPT z metodą elementów skończonych. Wyniki optymalizacji przeprowadzonej dla modeli 2D płyt kompozytowych typu sandwich zostały porównane z wynikami obliczeń optymalizacyjnych przeprowadzonych dla modeli płyt warstwowych (laminatów). Wszystkie symulacje wykonano w programie COMSOL Multiphysics.

Wyniki obliczeń numerycznych wykonanych przy wykorzystaniu poszczególnych metod zaprezentowano w rozdziałach od szóstego do dziewiątego.

W rozdziale szóstym wykazano, że korzystając z metody hybrydowej polegającej na połączeniu algorytmu Nelder-Meada z MES, możliwe jest przeprowadzenie rekonstrukcji parametrów termicznych materiału. Symulacje przeprowadzone dla określonych modeli i zdefiniowanych warunków brzegowych umożliwiły wyznaczenie parametrów takich jak: współczynnik przewodzenia ciepła materiału izotropowego lub FGM, współczynnik powierzchniowej wymiany ciepła na brzegach obszaru oraz temperatura zewnętrzna wokół obu końców obszaru. Istnieje również możliwość obliczenia tych parametrów w taki sposób, aby znajdowały się one w określonych zakresach odpowiednich dla badanego materiału (ze stosownymi ograniczeniami). Możliwe jest też wyznaczenie współczynnika przewodności cieplnej w postaci wielomianu, co znajduje swoje zastosowanie na przykład w materiałach gradientowych. Przedstawiona metoda obliczeniowa może być skuteczną alternatywą eksperymentalnego wyznaczania parametrów termicznych w kompozytach. Połączenie algorytmu Nelder-Meada z MES może być użyte do wielu zagadnień. Znajduje swoje

zastosowanie w przypadku, gdy nie można lub trudno jest wyznaczyć gradient funkcji celu. Zaproponowana metoda może być wykorzystana w zagadnieniach przepływu ciepła.

Rozdział siódmy był poświęcony wykorzystaniu metody optymalizacji geometrii kształtu faz w kompozycie dwufazowym. Obliczenia zostały przeprowadzone przy wykorzystaniu metody elementów skończonych oraz metody optymalizacyjnej SNOPT z zastosowanym modelem SIMP. Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, że zaproponowana metoda prowadzi do uzyskania mniejszych wartości w przypadku minimalizacji i większych wartości w przypadku maksymalizacji średniej wartości temperatury oraz średniej wartości modułu gradientu temperatury. Symulacje wykazały, że w przypadku zagadnień z danymi warunkami temperaturowymi na brzegu przy minimalizacji średniej wartości temperatury złożone formy kształtu pojawiają się przy boku z niższą temperaturą, a w przypadku maksymalizacji przy boku z wyższą temperaturą. W obu przypadkach otrzymane kształty mają skomplikowaną linię brzegową pomiędzy zastosowanymi materiałami. Bardziej skomplikowana i zarazem dłuższa linia międzyfazowa, która rozdziela oba materiały, umożliwia większe nagrzewanie całego obszaru, jeśli materiał lepiej przewodzący jest przy brzegu z wyższą temperaturą. Jeżeli natomiast materiał lepiej przewodzący jest rozłożony w kontakcie z brzegiem o niższej temperaturze to w całym obszarze dominuje chłodzenie rozważanego obszaru. Stosując warunki brzegowe drugiego rodzaju uzyskane różnice w badanych przykładach, pomiędzy kompozytem warstwowym a zoptymalizowanym kształtem, okazały się mniejsze. Otrzymane zoptymalizowane kompozyty dwufazowe mogą znaleźć swoje zastosowanie w wymiennikach ciepła.

W rozdziale siódmym przeanalizowano również wpływ regularyzacji, siatki elementów skończonych oraz parametru kary p metody SIMP na wyniki optymalizacji struktury kompozytu. Symulacje wykazały, że dokładność rozkładu zmiennej kontrolnej zwiększa się wraz ze wzrostem ilości elementów skończonych. Na wynik minimalizacji ma również wpływ jakość dyskretyzacji modelu. Dokładna siatka, z odpowiednio dużą ilością elementów skończonych pozwala uzyskać wyniki porównywalnie dobre z tymi, które uzyskano w wyniku regularyzacji. Obliczenia wykazały również, że najdokładniejszą strukturę, w przypadku materiałów zastosowanych w analizie, można osiągnąć, gdy parametr kary ma wartość $p=3$. Rozkład zmiennej kontrolnej w

prezentowanych przykładach nie jest symetryczny. Można zaobserwować proces załamania symetrii spowodowany bifurkacją, co jest potwierdzeniem tez przedstawionych w artykule Watada i współautorów [Wat2011].

Wyniki badań przedstawione w rozdziale ósmym pozwalają wnioskować, że zaproponowana płyta kompozytowa osiąga niższe wartości średniej energii termicznej niż płyty laminatowe, niezależnie od miejsca rozłożenia warstwy drugiego materiału. Dodatkowo, kolejny etap obliczeń wykazał, że w przypadku minimalizacji średniej wartości energii termicznej i średniej wartości energii odkształcenia jednocześnie, gdy wagi $w_t=w_s=1/2$, rozkład zmiennej kontrolnej jest zbliżony do rozkładu zmiennej kontrolnej w przypadku, gdy minimalizowana jest jedynie średnia wartość energii termicznej. To pozwala stwierdzić, że energia termiczna dominuje w tym przypadku obliczeniowym. Odwrotnie jest natomiast w sytuacji, gdy analizowane są wyniki minimalizacji średniej wartości energii termicznej i średniej wartości energii odkształcenia jednocześnie z różnymi wagami. Wtedy rozkład zmiennej kontrolnej jest zbliżony do rozkładu zmiennej kontrolnej w przypadku, gdy minimalizowana jest jedynie wartość energii odkształcenia. Mniejsza wartość energii odkształcenia to większa sztywność konstrukcji i mniejsza możliwość uszkodzenia.

Ponieważ wykonane badania wykazały znaczący wpływ rodzaju przeprowadzonej optymalizacji (optymalizacja średniej wartości energii termicznej lub odkształcenia), koniecznym stało się zbadanie, w jaki sposób optymalizacja jednej właściwości wpływa na inne właściwości. W związku z tym ostatni etap badań polegał na przeprowadzeniu analizy właściwości dynamicznych struktur termicznie optymalnych. W pierwszym kroku wykonano optymalizację struktury 2D, dzięki której uzyskano płytę kompozytową termicznie optymalną. Natomiast w drugim kroku przeprowadzono analizę właściwości dynamicznych otrzymanej płyty kompozytowej. W związku z tym wyznaczono częstotliwości własne w płycie kompozytowej oraz wykreślono odpowiedź układu na wymuszenia harmoniczne i postacie drgań własnych dla poszczególnych częstotliwości własnych. Dodatkowo wyznaczono analitycznie zakres wartości właściwości efektywnych, a także numerycznie efektywne właściwości płyty warstwowej typu sandwich. Umożliwiło to potwierdzenie tezy, że reguła mieszanin nie znajduje swojego zastosowania w przypadku wyznaczania właściwości sprężystych bardziej skomplikowanych struktur [Eva1992].

Dzięki najnowszym technikom komputerowym możliwe jest wspomaganie projektowania, modelowanie różnych materiałów (ang. computational materials) o różnych kształtach oraz optymalizacja ich parametrów. Mimo że obliczenia bywają czasochłonne, znacznie wpływają na obniżenie kosztów projektowania, produkcji oraz eksploatacji materiału kompozytowego. Metody numerycznego modelowania materiałów kompozytowych znajdują swoje zastosowanie w wielu dziedzinach nauki.

Zaproponowane w rozprawie metody oraz struktury kompozytowe o zadanych właściwościach termicznych lub termiczno-mechanicznych mogą znaleźć zastosowanie przy projektowaniu oraz konstruowaniu:

- a) zoptymalizowanych urządzeń chłodzących (radiatorów)
- b) urządzeń elektronicznych
- c) elementów budowlanych (np. cegieł o zwiększonej izolacyjności przy jednoczesnym zwiększeniu ich wytrzymałości)
- d) elektrod akumulatorów do odzyskiwania energii w przypadku małych różnic temperatury z wykorzystaniem efektu galwanicznego.

Otrzymane w przeprowadzonych badaniach numerycznych wyniki oraz ich analiza pozwalają stwierdzić, że teza i cele pracy zostały potwierdzone.

Literatura

- [Bal2000] Balland L., Estel L., Cosmao J.-M., Mouhab N., *A genetic algorithm with decimal coding for the estimation of kinetic and energetic parameters*, Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems, Vol. 50, pp. 121–135, 2000
- [Ame2005] Ameen M., *Computational elasticity*, Alpha Science, UK, 2005
- [Ara2004] Arabas J., *Wykłady z algorytmów ewolucyjnych*, WNT, Warszawa, 2004
- [Aro2004] Arora J. S., *Introduction to optimum design*, Elsevier, USA, 2004
- [Bec2009] Beck A., Teboulle M., *A Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm for Linear Inverse Problems*, Imaging Sciences, Vol. 2, Issue 1, pp. 183–202, SIAM, 2009
- [Bej2003] Bejan A., Kraus A. D. (Ed.), *Heat transfer handbook*, Wiley, New Jersey, 2003
- [Ben1999] Bendsoe M. P., Sigmund O., *Material interpolation schemes in topology optimization*, Archive of Applied Mechanics, Vol. 69, pp. 635–654, Springer, 1999
- [Ben2003] Bendsoe M. P., Sigmund O., *Topology optimization. Theory, Methods and Applications*, Springer, 2003
- [Ben2005] Bendsoe M. P., Lund E., Olhoff N., Sigmund O., *Topology optimization – broadening the areas of application*, Control and Cybernetics, Vol. 34 (1), pp. 7–35, 2005
- [Ber2002] Bertero M., Poggio T.A., Torre V., *Ill-posed problems in early vision*, IEEE, Vol. 76, Issue 8, pp. 869–889, 2002
- [Bes2001] Bessaou M., Siarry P., *A genetic algorithm with real-value coding to optimize multimodal continuous functions*, Struct Multidisc Optim, Vol. 23, pp. 63–74, 2001
- [Bla2013] Blazek K. D., Stolk C., Symes W. W., *A mathematical framework for inverse wave problems in heterogeneous media*, Inverse Problems, Vol. 29, No 6, p. 065001, IOP Science, 2013
- [Bog1995] Boggs P. T., Tolle J. W., *Sequential Quadratic Programming*, Acta Numerica, Volume 4, pp 1–51, 1995

- [Bon1997] Bonnans J. F., Gilbert J. C., Lemaréchal C., Sagastizábal C. A., *Numerical Optimization. Theoretical and Practical Aspects*, Springer, 1997
- [Bor2005] Borukhova V. T. , Timoshpol'skii V. I., *Functional identification of the nonlinear thermal-conductivity coefficient by gradient methods. I. Conjugate operators*, Journal of Engineering Physics and Thermophysics, Vol. 78, No. 4, 2005
- [Bri1999] Bricker D. L., *Sequential Quadratic Programming*, dostępne na: www.engineering.uiowa.edu/~dbricker/Stacks_pdf2/SQP.pdf, 1999 (dostęp 07.05.2015)
- [Bri2013a] Briseghella B., Fenu L., Lan C., Mazzarolo E., Zordan T., *Application of Topological Optimization to Bridge Design*, J. Bridge Eng., Vol. 18, Issue 8, pp. 790–800, 2013
- [Bri2013b] Briseghella B., Fenu L., Feng Y., Mazzarolo E., Zordan T., *Topology optimization of bridges supported by a concrete shell*, Structural Engineering International: Journal of the International Association for Bridge and Structural Engineering (IABSE), Vol. 23, Issue 3, pp. 285-294, 2013
- [Bur1999] Burczyński T., Orantek P., *Połączenie Algorytmów Genetycznych i Gradientowych*, Proceedings of the 3rd National Conference on Evolutionary Computation and Global Optimization, Potok Złoty, 1999
- [Bur2005] Burmen A., Puhan J., Tuma T., *Grid Restrained Nelder-Mead Algorithm*, Computational Optimization and Applications, Vol. 34, pp. 359–375, 2005
- [Cam2014] Campbell T. A., Tibbits S., Garrett B., *Programowalny świat*, Świat Nauki, nr 12 (280), 2014
- [Car2006] Carbajal G., Sobhan C.B., Peterson G.P., Queheillalt D.T., Wadley H.N.G., *Thermal response of a flat heat pipe sandwich structure to a localized heat flux*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 49, pp. 4070–4081, 2006
- [Car2010] Carlsson L.A., Kardomateas G.A., *Structural and Failure Mechanics of Sandwich Composites*, Springer, 2010
- [Ced2013] Ceder G., Persson K., *How Supercomputers Will Yield a Golden Age of Materials Science*, Scientific American, November 19, 2013
- [Che1999] Chen Z., Jiang J., Li Y., Yu R., *Nonlinear mapping using real-valued genetic algorithm*, Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems, Vol. 45, pp. 409–418, 1999

- [Dag2012] Dagastine G., *Numerical Simulation-Based Topology Optimization Leads to Better Cooling of Electronic Components in Toyota Hybrid Vehicles*, Comsol news, pp. 4-7, 2012
- [Ded2009] Dede E. M., *Multiphysics Topology Optimization of Heat Transfer and Fluid Flow Systems*, Proceedings of the COMSOL Conference, Boston, 2009
- [Ded2012] Dede E. M., *Optimization and Design of a Multipass Branching Microchannel Heat Sink for Electronics Cooling*, J. Electron. Packag., Vol.134, Issue 4 pp.041001, 2012
- [Dłu2006] Długosz A., Burczyński T., Kuś W., *Parallel evolutionary algorithms in shape optimization of heat exchangers under thermomechanical loading*, Evolutionary Computation and Global Optimization, No 156, Warsaw University of Technology Publishing House, pp. 97-105, 2006
- [Dłu2007] Długosz A., Burczyński T., *Multiobjective optimization of heat radiators using evolutionary algorithms*, Evolutionary Computation and Global Optimization, No 165, Warsaw University of Technology Publishing House, pp. 43-50, 2008
- [Dob2006] Dobrzański L. A., *Materiały inżynierskie i projektowanie materiałowe: podstawy nauki o materiałach i metaloznawstwo*, WNT, Warszawa, 2006
- [Eng2000] Engl H. W., Hanke M., Neubauer A., *Regularization of Inverse Problems*, Springer, 2000
- [Eva1992] Evans K.E., Nkansah M.A., Hutchinson I.J., *Modelling negative poisson ratio effects in network-embedded composites*, Acta Metallurgica et Materialia, Vol. 40, Issue 9, pp. 2463–2469, 1992
- [Fag2001] Fagerberg L., *Wrinkling in Sandwich Panels for Marine Applications*, Report 2001-17, Royal Inst. Technology, Stockholm, Sweden, 2001
- [Fin1980] Findeisen W., Szymanowski J., Wierzbicki A., *Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji*, PWN, Warszawa, 1980
- [Fle2000] Fletcher R., *Practical Methods of Optimization*, Wiley, Great Britain, 2000
- [Gil1982] Gill P. E., Murray W., Wright M. H., *Practical optimization*, Emerald, UK, 1982
- [Gol1998] Goldberg D. E., *Algorytmy genetyczne i ich zastosowanie*, WNT, Warszawa, 1998

- [Gol2000] Golub G. H., H. A. van der Vorst, *Eigenvalue computation in the 20th century*, Elsevier, Vol. 123, Issues 1–2, pp. 35-65, 2000
- [Gon2013] Goncharsky A. V., Romanov S. Y., *Supercomputer technologies in inverse problems of ultrasound tomography*, Inverse problems, Volume 29, Number 7, 075004, IOP Science, 2013
- [Gou1994] Gould P. L., *Introduction to Linear Elasticity*, Springer, 1994
- [Gre2013] Greaves G. N., *Poisson's ratio over two centuries: challenging hypotheses*, Notes & Records of Royal Society, Vol. 67, pp. 37-58, 2013
- [Gri2006] Grima J. N., Zammit V., Gatt R., *Negative Thermal Expansion*, Xjenza, Vol. 11, pp. 17-29, 2006
- [Gue2011] Guellal M., Kessai A., Charifi M., Touabti M. C., *Inverse problem for estimating the thermal conductivity of Functionally Graded Material (FGM)*, Proceedings of First Euro-Mediterranean Conference on Materials and Renewable Energies (EMCMRE-1), 21-25 November 2011
- [Han2006] Gersborg-Hansen A., Bendsøe M. P., Sigmund O., *Topology optimization of heat conduction problems using the finite volume method*, Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol. 31, Issue 4, pp. 251-259, 2006
- [Han2009] Hansen N., *Benchmarking the Nelder-Mead Downhill Simplex Algorithm With Many Local Restarts*, Proceedings of the 11th Annual Conference Companion on Genetic and Evolutionary Computation Conference, pp. 2403-2408, 2009
- [Hee1990] Heermann W.D., *Computer Simulation Method in Theoretical Physics*, Springer Verlag, Berlin, 1990
- [Her2000] Herrera F., Lozano M., *Two-Loop Real-Coded Genetic Algorithms with Adaptive Control of Mutation Step Sizes*, Applied Intelligence, Vol. 13, pp. 187–204, 2000
- [Hof2000] Hoffmann T. J., *Podstawy mechaniki technicznej*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, 2000
- [Hos2007] Hossein Ghiasi M., Pasini D., Lessard L., *Improved Globalized Nelder-Mead Method for Optimization of a Composite Bracket*, Proceeding of the 16 th International Conference on Composite Materials, Kyoto, Japan, GE224461, 2007.
- [Hua2010] Huang H., Xue D., *Topology optimization on the movable platen of plastic injection machine*, Applied Mechanics and Materials, 37-38, pp. 1595-1599, 2010

- [Jak1986] Jakubowicz A., Orłoś Z., *Wytrzymałość materiałów*, WNT, Warszawa, 1968
- [Jan2000] Janna W. S., *Engineering heat transfer*, CRC Press, USA, 2000
- [Jop2007] Jopek H., Strek T., *Computer simulation of heat transfer through a ferrofluid*, Physica Status Solidi b, Volu. 244, Issue 3, pp. 1027-1037, 2007
- [Jop2011] Jopek H., Stręk T., *Optimization of the Effective Thermal Conductivity of a Composite*, InTech, 2011
- [Kam2004] Kamiński M. M., *Computational Mechanics of Composite Materials: Sensitivity, Randomness and Multiscale Behaviour (Engineering Materials and Processes)*, Springer, 2004
- [Kao2008] Koa Y.-T., Zahara E., *A hybrid genetic algorithm and particle swarm optimization for multimodal functions*, Applied Soft Computing, Vol. 8, Issue 2, pp. 849–857, 2008
- [Kas2009] Kasen S. D., Valdevit L., Wadley H. N. G., Evans A. G., Steeves C. A., He M. Y., *Feasibility of Metallic Structural Heat Pipes as Sharp Leading Edges for Hypersonic Vehicles*, J. Appl. Mech., Vol. 76, Issue 3, pp. 031014, 2009
- [Kim2001] Kim, H. S., Hong, S. I., Kim, S. J., *On the rule of mixtures for predicting the mechanical properties of composites with homogeneously distributed soft and hard particles*, Journal of Materials Processing Technology, Vol. 112, Issue 1, pp. 109-113, 2001
- [Kin2001] Kindinger J., *Lightweight structural cores*, Composites, ASM Handbook, vol. 21, pp. 180-183, 2001
- [Kue2009] Kuehmann C. J., Olson G. B., *Computational materials design and engineering*, Materials Science and Technology, Vol. 25, No 4, pp. 472-478, 2009
- [Kus2009] Kusiak J., Danielewska-Tulecka A., Oprocha P., *Optymalizacja. Wybrane metody z przykładami zastosowań*, PWN, Warszawa, 2009
- [Lau2005] Lautrup B., *Physics of Continuous Matter, Exotic and Everyday Phenomena in the Macroscopic World*, IOP, Bristol, 2005
- [Lee2008] Lee D. H., *Characterization of a Thin Hard Layer on a Soft Substrate--- Theory and Its Application on a Surface-modified PDMS*, ProQuest, 2008

- [Lee2014] Lee S. W., Yang Y., Lee H. W., Ghasemi H., Kraemer D., Chen G., Cui Y., *An electrochemical system for efficiently harvesting low-grade heat energy*, Nature Communications, Vol. 5, pp. 3942, 2014
- [Leu2013] Leung S. N., Khan M. O., Chan E., Naguib H., Dawson F., Adinkrah V., Lakatos-Hayward L., *Analytical modeling and characterization of heat transfer in thermally conductive polymer composites filled with spherical particulates*, Composites Part B: Engineering, Volume 45, Issue 1, pp. 43-49, 2013
- [Lor1987] Lorenzi A., *Identification of the thermal conductivity in the nonlinear heat equation*, Inverse Problems, Vol. 3 pp. 437-451, 1987
- [Lue2004a] Luersen M. A., Le Riche R., *Globalized Nelder-Mead method for engineering optimization*, Computers & Structures, Volume 82, Issues 23-26, pp. 2251-2260, ELSEVIER, 2004
- [Lue2004b] Luersen M.A., Le Riche R., Guyon F., *A constrained, globalized, and bounded Nelder-Mead method for engineering optimization*, Struct. Multidisc. Optim., Vol. 27, pp. 43-54, 2004
- [Łuk2014] Łukasiak T., *Two-phase isotropic composites with prescribed bulk and shear moduli*, Recent Advances in Computational Mechanics, CRC Press, 2014
- [Mag2012] Magnucki K., Szyc W., *Wytrzymałość i stateczność belek i płyt trójwarstwowych z rdzeniem z pianki aluminiowej*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, 2012
- [Mag2013] Magnucki K., Jasion P., Krus M., Kuligowski P., Wittenbeck L., *Strength and buckling of sandwich beams with corrugated core*, Journal Of Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 51, Issue 1, pp. 15-24, 2013
- [Maj2007] Majchrzak E., Dziewoński M., Jasiński M., *Identification of thermal conductivity by means of the gradient method and the BEM*, Prace Naukowe Instytutu Matematyki i Informatyki Politechniki Częstochowskiej, Vol. 6, nr 1, pp. 147-158, 2007
- [Mas1970] Mase G. E., *Theory and problems of continuum mechanics*, McGraw-Hill, 1970
- [Mas2009] Mastorakis N.E., *Genetic algorithms with Nelder-Mead optimization in the variational methods of boundary value problems*, Journal WSEAS Transactions on Mathematics, Vol. 8, Issue 3, pp. 107-116, 2009
- [McC1985] McCullough R., *Generalized Combining Rules for Predicting Transport Properties of Composite Materials*, Composites Science and Technology, Vol. 22, pp.3-21, 1985

- [McC1985] McCullough R.L., *Generalized combining rules for predicting transport properties of composite materials*, Composites Science and Technology, Vol. 22, Issue 1, pp. 3-21, 1985
- [Mej1999] Mejias M. M., Orlande H. R. B., Ozisik M. N., *A comparison of different parameter estimation techniques for the identification of thermal conductivity components of orthotropic solids*, Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice, Proceedings of 3rd Int. Conference on Inverse Problems in Engineering, Port Ludlow, WA, USA, June 13-18, 1999
- [Mic2003] Michalewicz Z., *Algorytmy genetyczne+struktury danych=programy ewolucyjne*, WNT, Warszawa, 2003
- [Mie2013] Mierzwiczak M., Kołodziej J. A., *The inverse determination of the thermal contact resistance components of unidirectionally reinforced composite*, Inverse Problems in Science and Engineering, Vol. 21, No. 2, pp. 283–297, 2013
- [Mil2010] Milenin A., *Podstawy Metody Elementów Skończonych. Zagadnienia termomechaniczne*, AGH, Kraków, 2010
- [Mon2013] Montesano M. J., *Trends in Military System Thermal Management*, dostępne na www.thermacore.com/news/trends-in-military-system-thermal-management.aspx (dostęp 22.01.2015), 2013
- [Mur2010] Murin J., Kompiš V., Kutis V., *Computational Modelling and Advanced Simulations*, Springer, 2010
- [Nan2009] Nansen N., *Benchmarking the Nelder-Mead Downhill Simplex Algorithm With Many Local Restarts*, Genetic and Evolutionary Computation Conference, GECCO 2009, Proceedings, Montreal, Quebec, Canada, Companion Material .ACM, pp. 2403-2408, 2009
- [Nel1965] Nelder J. A., Mead R., *Simplex method for function minimization*, Computer Journal, Vol. 7. No. 4, pp 308-313, 1965
- [Nie2012a] Nienartowicz M, Stręk T., *Differential Evolution in System Parameters Identification*, Vibrations in Physical Systems, Vol. XXV, pp. 373-379, 2012
- [Nie2012b] Nienartowicz M., Stręk T., *Identification of Thermal Conductivity of Modern Materials using the Finite Element Method and Nelder - Mead's Optimization Algorithm*, Finite Element Analysis - From Biomedical Applications to Industrial Developments, InTech, pp. 287-318, 2012

- [Nie2013a] Nienartowicz M., *Optymalizacja właściwości termicznych materiału kompozytowego z wykorzystaniem metody optymalizacji geometrii kształtu*, Wybrane problemy naukowo-badawcze mechaniki i inżynierii materiałowej, P.P.-H. "DRUKARNIA" Sp. z o.o., Płock, pp.199-211, 2013
- [Nie2013b] Nienartowicz M., Strek T., *Topology optimization for thermal properties of a composite material*, Proceedings of 20th International Conference on Computer Methods in Mechanics. Short Papers CMM2013, pp. MS05-25 - MS05-26, Poznań, 27-31.08.2013,
- [Nie2014a] M. Nienartowicz, T. Strek, *Topology optimization of the effective thermal properties of two-phase composites*, Recent Advances in Computational Mechanics, CRC Press, 2014
- [Nie2014b] Nienartowicz M., Strek T., *Finite Element Analysis of dynamic properties of thermally optimal two-phase composite structure*, Vibrations in Physical Systems, Vol. XXVI, pp. 203-210, 2014
- [Nie2014c] Nienartowicz M., Strek T., *Finite element analysis of sandwich two-phase composite*, Proceedings of the International Symposium on trends in continuum physics, TRECOP'14, pp. 33-34, 2014
- [Ora2006] Orantek P., Burczyński T., *The evolutionary algorithm in stochastic optimization and identification problems*, *Evolutionary Computation and Global Optimization*, No 156, Warsaw University of Technology Publishing House, pp. 309-319, 2006
- [Ott1981] Ott H.J., *Thermal conductivity of composite materials*, *Plastics and Rubber Processing and Applications*, Vol. 1, Issue 1, pp. 9-24, 1981
- [Pau2005] Paulino G. H., Silva E. C. N., *Design of Functionally Graded Structures Using Topology Optimization*, *Materials Science Forum*, Vols. 492-493, pp. 435-440, 2005
- [Paz2015] Pazos F., Bhaya A., *Adaptive choice of the Tikhonov regularization parameter to solve ill-posed linear algebraic equations via Liapunov Optimizing Control*, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 279, pp. 123-132, 2015
- [Pha2011] Pham N., Wilamowski B. M., *Improved Nelder Mead's Simplex Method and Applications*, *Journal of Computing*, Vol. 3, Issue 3, pp. 55-63, 2011
- [Pot1998] Potgieter E., Stander N., *The genetic algorithm applied to stiffness maximization of laminated plates: review and comparison*, *Structural optimization*, Vol. 15, Issue 3-4, pp. 221-229, 1998

- [Pri2002] Price C. J. , Coope I. D., Byatt D., *A convergent variant of the Nelder–Mead algorithm*, Journal Of Optimization Theory And Applications, Vol. 113, No. 1, pp. 5–19, 2002
- [Que2008] Queheillalt D. T., Carbajal G., Peterson G.P., Wadley H. N.G., *A multifunctional heat pipe sandwich panel structure*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 51, pp. 312–326, 2008
- [Rao2012] Rao K. K., Rao J. K., *Thermostructural analysis of honeycomb sandwich panels*, International journal of engineering science and advanced technology, Vol. 2, Issue 5, pp. 1402 – 1409, 2012
- [Sad2009] Sadd M. H., *Elasticity. Theory, Applications and Numerics*, Academic Press, 2009
- [San2014] Sanogo S., Messine F., Henaux C., Vilamot R., *Topology optimization for magnetic circuits dedicated to electric propulsion*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 50, Issue 12, art. no. 6857998, 2014
- [Sid2013] Siddiquia M. O. R., Suna D., *Finite element analysis of thermal conductivity and thermal resistance behaviour of woven fabric*, Computational Materials Science, Vol. 75, pp. 45–51, 2013
- [Sil2005] Silva E. C. N., Paulino G. H., *Topology optimization design of Functionally Graded Structures*, Proceedings of 6th World Congresses of Structural and Multidisciplinary Optimization, Rio de Janeiro, Brazil, 30 May - 03 June 2005
- [Siv2008] Sivanandam S. N., Deepa S. N., *Introduction to Genetic Algorithms*, Springer, Berlin, 2008
- [Str2012] Streck T., Jopek H., *Effective mechanical properties of concentric cylindrical composites with auxetic phase*, Phys. Status Solidi B, Vol. 249, No. 7, pp. 1359-1365, 2012
- [Str2013] Stręk T., Jopek H., Maruszewski B. T., Nienartowicz M., *Computational analysis of sandwich-structured composites with an auxetic phase*, Phys. Status Solidi B, Vol. 251, pp. 354-366, 2013
- [Sul2006] Al-Sulaiman F. A., Al-Nassar Y. N., Mokheimer E.M., *Prediction of the Thermal Conductivity of the Constituents of Fiber-Reinforced Composite Laminates: Voids Effect*, Journal of Composite Materials, Vol. 40, pp.797-814, 2006
- [Tab1996] Taber C. S., Timpone R. J., *Computational Modeling*, SAGE Publications, 1996

- [Tak2012] Takenaka K., *Negative thermal expansion materials: technological key for control of thermal expansion*, Science and technology of advanced materials, Vol. 13, pp. 013001, IOP Publishing, 2012
- [Tan2009] Tang D., Teng Z., Canton G., Yang C., Ferguson M., Huang X., Zheng J., Woodard P. K., Yuan C., *Sites of Rupture in Human Atherosclerotic Carotid Plaques are Associated with High Structural Stresses: an In Vivo MRI-Based 3D Fluid-Structure Interaction Study*, Stroke, Vol. 40, Issue 10, pp. 3258–3263, 2009
- [Tia2004] Tian J., Lu T. J., Hodson H. P., *Thermal-hydraulic performance of sandwich structures with crossed tube truss core and embedded heat pipes*, Proceedings of 13th International Heat Pipe Conference, Shanghai, 21-25 September, 2004
- [Tia2007] Tian J., Lu T.J., Hodson H.P., Queheillalt D.T., Wadley H.N.G., *Cross flow heat exchange of textile cellular metal core sandwich panels*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 50, pp. 2521–2536, 2007
- [Tur1956] Turner M. J., Clough R. W., Martin H. C., Topp L. J., *Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures*, J. Aeronaut. Sci, Vol. 23, pp. 805-824, 1956
- [Vin1999] Vinson J.R., *The Behavior of Sandwich Structures of Isotropic and Composite Materials*, Technomic, Basel, 1999
- [Wan2008] Wang M., Pan N., *Modeling and prediction of the effective thermal conductivity of random open-cell porous foams*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 51, Issue 5-6, pp. 1325-1331, 2008
- [Wat2011] Watada R., Ohsaki M., Kanno Y., *Non-uniqueness and symmetry of optimal topology of a shell for minimum compliance*, Struct Multidisc Optim, Vol. 43, pp.459–471, 2011
- [Web2003] Weber E.H., Clingerman M.L., King J.A., *Thermally conductive nylon 6,6 and polycarbonate based resins. II. Modeling*, Journal of Applied Polymer Science, Vol. 88, Issue 1, pp. 123-130, 2003
- [Wei2009] Weise T., *Global Optimization Algorithms – Theory and Application*, Available from www.it-weise.de/projects/book.pdf, 2009 (dostęp 07.02.2015)
- [Wen2006] Wen T., Tian J., Lu T.J., Queheillalt D.T., Wadley H.N.G., *Forced convection in metallic honeycomb structures*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 49, pp. 3313–3324, 2006

- [Wiś2009] Wiśniewski S., Wiśniewski T. S., *Wymiana ciepła*, WNT, Warszawa, 2009
- [Wu2007] Wu C., Tzeng G., Goo Y., Fang W., *A real-valued genetic algorithm to optimize the parameters of support vector machine for predicting bankruptcy*, Expert Systems with Applications, Vol. 32, pp. 397–408, 2007
- [www01] www.me.rochester.edu/courses/ME443/NASTRAN/ (Data: 2009) (dostęp 25.01.2015)
- [www02] www.materials.unsw.edu.au/tutorials/online-tutorials/2-fibre-reinforced-composites (dostęp 25.01.2015)
- [www03] www.colorado.edu/news/releases/2013/10/22/cu-boulder-researchers-develop-4d-printing-technology-composite-materials (2013) (dostęp 25.01.2015)
- [www04] www.en.wikipedia.org/wiki/Thermal_conductivity (dostęp 25.01.2015)
- [www05] www.nibib.nih.gov/science-education/science-topics/computational-modeling (dostęp 25.01.2015)
- [www06] www.heluz.pl/katalog/bloczki-do-murow-obwodowych-i-cian-wewnetrznych/bloczki-heluz-family/heluz-family-44-2in1-8473.xhtml (dostęp 21.01.2015)
- [www07] www.wienerberger.pl/porotherm-44-t-profi.html?lpi=1119356883967 (dostęp 21.01.2015)
- [www08] plyty-warstwowe.pl/plyty-warstwowe (dostęp 21.01.2015)
- [www09] www.monolithic.org/domes (dostęp 21.01.2015)
- [Yan2011] Yang H., Qing-Qing N., Atsuhiko Y., Yoshihiko T., Toshiaki N., *The Development of Composites with Negative Thermal Expansion Properties Using High Performance Fibers*, Advanced Composite Materials, Vol. 20, Issue 5, pp. 463-475, 2011
- [Yin2005] Yin H. M., Paulino G. H., Buttlar W. G., Sun L. Z. S., *Effective thermal conductivity of two-phase functionally graded particulate composites*, Journal of applied physics, Vol. 98, p. 063704, 2005
- [Zdu2002] Zdunek R., Pralat A., *Estimation of Tikhonov Regularization Parameter for Image Reconstruction in Electromagnetic Geotomography*, Proceedings of the 2-nd International Symposium on Process Tomography, Wrocław, Poland, September, 2002

- [Zen1997] Zenkert D., *Sandwich Construction*, EMAS Publishing, UK, 1997
- [Zha2014] Zhang W., Zhong W., Guo X., *An explicit length scale control approach in SIMP-based topology optimization*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 282, pp. 71-86, 2014
- [Zie2000] Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., *The Finite Element Method*, Vol. 1: The Basis, (5th ed.), Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000

Załączniki 1

Kod algorytmu hybrydowego łączący algorytm Nelder-Meada z metodą elementów skończonych.

1. Plik startowy:

```
% Oczekiwany rozkład temperatury T1: 300.481+171.955*z-72.9167*z^2 (por. wzor (6.2.4))
```

```
% sympleks A
```

```
% k(z) poszukiwane w zakresie 20<k(z)<120
```

```
pstart1=[20 110 -55 0;  
         30 120 -50 1;  
         40 130 -45 1;  
         50 140 -40 0;  
         25 140 -60 1];
```

```
kz1=20;
```

```
kz2=120;
```

```
% zapisywanie do pliku
```

```
sciezka1='E:/wyniki/funkcja/kz_wyn_A1';
```

```
sciezka2='E:/wyniki/funkcja/T-T_wyn_A1';
```

```
sciezka3='E:/wyniki/funkcja/T_wyn_A1';
```

```
global fid
```

```
filename='E:/wyniki/funkcja/resA1.txt';
```

```
[step, p, Fxyz, pmin]=nelder_odecinki9(pstart1,kz1,kz2,filename)
```

```
pmin1=pmin;
```

```
odecinki9bis(pmin1,sciezka1,sciezka2,sciezka3)
```

```
clear('all')
```

```
% sympleks B
```

```
% k(z) poszukiwane w zakresie 20<k(z)<120
```

```
pstart2=[50 200 -65 5;  
        -40 -100 -90 15;  
        45 180 5 20;  
        80 90 -10 25;  
        70 180 -120 30];
```

```
kz1=20;
```

```
kz2=120;
```

```
% zapisywanie do pliku
```

```
sciezka1='E:/wyniki/funkcja/kz_wyn_B1';
```

```
sciezka2='E:/wyniki/funkcja/T-T_wyn_B1';
```

```
sciezka3='E:/wyniki/funkcja/T_wyn_B1';
```

```
global fid
```

```
filename='E:/wyniki/funkcja/resB1.txt';
```

```
[step, p, Fxyz, pmin]=nelder_odecinki9(pstart2,kz1,kz2,filename)
```

```
pmin1=pmin;
```

```
odecinki9bis(pmin1,sciezka1,sciezka2,sciezka3)
```

```
clear('all')
```

```
% sympleks C
```

```
% k(z) poszukiwane w zakresie 20<k(z)<120
```

```
pstart3=[100 400 -70 10;  
        -50 -200 -130 20;  
        50 250 20 100;  
        110 20 -150 250;  
        100 200 -300 70];
```

```

kz1=20;
kz2=120;
% zapisywanie do pliku
sciezka1='E:/wyniki/funkcjaI/kz_wyn_C1';
sciezka2='E:/wyniki/funkcjaI/T-T_wyn_C1';
sciezka3='E:/wyniki/funkcjaI/T_wyn_C1';
global fid
filename='E:/wyniki/funkcjaI/resC1.txt';
[step, p, Fxyz, pmin]=nelder_odeinki9(pstart3,kz1,kz2,filename)
pmin1=pmin;
odeinki9bis(pmin1,sciezka1,sciezka2,sciezka3)
clear('all')

```

2. Algorytm Nelder'a-Mead'a

```

function [step, p, Fxyz, pmin]=nelder_odeinki9(p,kz1,kz2,filename)
fid = fopen(filename,'wt');
form = '%25.5e';

% Dane wejściowe
al=1;           % odbicie
ga=2;          % ekspansja
be=0.5;        % zwezenie
si=0.5;        % redukcja
eps=1e-5;      % dokladnosc rozwiazania
maxstep=800;   % maksymalna liczba iteracji
n=4;           % ilosc wierzchołkow sympleksu
stop=0;
step=0;

while stop<1
    step=step+1;

% obliczanie wartosci funkcji w wierzchołkach sympleksu
    for i=1:n+1
        xyz=p(i,:);
        pom=odeinki9(xyz,kz1,kz2);
        Fxyz(i,1)=pom;
    end
    [Fxyz,ind]=sortrows(Fxyz);
    fpmin=Fxyz(1);
    fpmax=Fxyz(n+1);
    p=p(ind,:);

% wyznaczenie punktow pmin i pmax
    pmin=p(1,:);
    pmax=p(n+1,:);

% wyznaczenie srodka ciezkości  $\bar{p}$  wierzchołkow sympleksu
    pm=sum(p(1:n,:));
    pm=pm/n;
    podb=pm+al*(pm-pmax);
    fpodb=odeinki9(podb,kz1,kz2);

    if fpodb<fpmin
        pe=pm+ga*(podb-pm);
        fpe=odeinki9(pe,kz1,kz2);
        if fpe<fpodb

```

```

        % ekspansja
        pmax=pe;
    else
        % odbicie
        pmax=podb;
    end
else
    if(fpmin<=fpodb)&(fpodb<fpmax)
        pmax=podb;
    else
        pz=pm+be*(pmax-pm);
        fpz=odcinki9(pz,kz1,kz2);
        if fpz>=fpmax
            for i=1:n+1
                % shrinking
                p(i,:)=si*(p(i,:)+pmin);
            end
        else
            % zawezenie
            pmax=pz;
        end
    end
end
end
p(1,:)=pmin;
p(n+1,:)=pmax;

% warunki stopu
if abs(fpmin-fpmax)<eps
    stop=1;
end;
if step>maxstep
    stop=1;
end;

% zapisywanie wynikow
% save -----
fprintf(fid,'step=');
fprintf(fid,num2str(step));
fprintf(fid,'\n');

fprintf(fid,'fpmin=');
fprintf(fid,num2str(fpmin,form));
fprintf(fid,'\n');

fprintf(fid,'pmin=');

for iZ = 1:n
    fprintf(fid,num2str(pmin(iZ),form));
    fprintf(fid,' ');
end
fprintf(fid,'\n');
fprintf(fid,'\n');
% end save -----
end % of while
fclose(fid);
pmin

```

3. Metoda Elementów Skoczonych:

```
% COMSOL Multiphysics Model M-file
function I=odcinki9(par,kz1,kz2)
fclear fem
% COMSOL version
clear vrsn
vrsn.name = 'COMSOL 3.5';
vrsn.ext = '';
vrsn.major = 0;
vrsn.build = 494;
vrsn.rcs = '$Name: $';
vrsn.date = '$Date: 2008/09/19 16:09:48 $';
fem.version = vrsn;
%-----
% Definiowanie geometrii
g1=rect2(1,1,'base','corner','pos',[0,0]);
fem.const = {'p1',par(1),'p2',par(2),'p3',par(3),'p4',par(4),'kmin',kz1,'kmax',kz2};

% Analizowana geometria
clear s
s.objs={g1};
s.name={'R1'};
s.tags={'g1'};
fem.draw=struct('s',s);
fem.geom=geomcsg(fem);

% Dyskretyzacja obszaru obliczeniowego za pomoca siatki elementow skoczonych
fem.mesh=meshinit(fem,'hauto',5);

% Refine mesh
fem.mesh=meshrefine(fem,'mcase',0,'rmethod','regular');

% Warunki brzegowe
clear appl
appl.mode.class = 'HeatTransfer';
appl.mode.type = 'axi';
appl.sshape = 2;
appl.assignsuffix = '_ht';
clear prop
prop.analysis='static';
appl.prop = prop;
clear bnd
bnd.type = {'q0','ax','T','T'};
bnd.T0 = {273,273,400,300}; %Temperatury T01 i T02
bnd.ind = [2,4,3,1];
appl.bnd = bnd;
clear equ
equ.k = 'kz';
equ.ind = [1];
appl.equ = equ;
fem.appl{1} = appl;
fem.sdim = {'r','z'};
fem.frame = {'ref'};
fem.border = 1;
fem.outform = 'general';
clear units;
units.basesystem = 'SI';
fem.units = units;
```

```

% Wielomianowa postac rozkladu przewodnosci cieplnej (por. wzor 6.2.1)
fem.globalexpr = {'kz','p1+p2*z+p3*z^2+p4*z^3'};

% ODE Settings
clear ode
clear units;
units.basesystem = 'SI';
ode.units = units;
fem.ode=ode;
% Multiphysics
fem=multiphysics(fem);
% Extend mesh
fem.xmesh=mesheextend(fem);

% Rozwiazywanie problemu
fem.sol=femstatic(fem, ...
    'solcomp',{'T'}, ...
    'outcomp',{'T'}, ...
    'blocksize','auto');

% Zapisywanie wynikow MES dla danej iteracji
fem0=fem;

% Calki dla pierwszej funkcji (por. wzor (6.2.5))
I1=postint(fem,'abs(T-(300.481+171.955*z-
72.9167*z^2))','unit','m*K','recover','off','dl',[1],'edim',1,'solnum','end');
I2=postint(fem,'kz>kmin','unit','m*K','recover','off','dl',[1],'edim',1,'solnum','end');
I3=postint(fem,'kz<kmax','unit','m*K','recover','off','dl',[1],'edim',1,'solnum','end');
% Calka minimalizowana (por. wzor (6.2.2))
I=I1+5*(1-I2)+5*(1-I3);

[I1 I2 I3 I]

```