

Politechnika Poznańska

Wydział Budowy Maszyn i Zarządzania

Instytut Mechaniki Stosowanej

Zakład Mechaniki Technicznej



**Zastosowanie algorytmów genetycznych
do wyznaczania optymalnego położenia
źródeł przy rozwiązywaniu wybranych
problemów mechaniki stosowanej**

Rozprawa doktorska

Promotor pracy dr hab. Tomasz Stręk

Poznań 2010

Spis treści

Streszczenie.....	4
Abstract.....	4
1 Wprowadzenie	5
1.1 Stan badań	5
1.2 Cel i zakres pracy	9
1.3 Tezy pracy.....	12
2 Optymalizacja	14
2.1 Wprowadzenie.....	14
2.2 Algorytmy ewolucyjne	17
2.2.1 Algorytmy genetyczne – podstawowe pojęcia oraz schemat.....	18
2.2.2 Kodowanie chromosomów	21
2.2.3 Populacja.....	22
2.2.4 Dopasowanie i funkcja oceny	23
2.2.5 Selekcja i reprodukcja.....	24
2.2.6 Operatory genetyczne: krzyżowanie i mutacja.....	26
3 Metoda rozwiązań podstawowych.....	28
3.1 Wprowadzenie.....	28
3.2 Metoda kollokacji brzegowej.....	28
3.3 Rozwiązania podstawowe	31
3.4 Punkty źródłowe	32
4 Metoda elementów skończonych.....	37
4.1 Wprowadzenie.....	37
4.2 Dyskretyzacja	39
4.3 Rozwiązanie dwuwymiarowego ustalonego zagadnienia przewodzenia ciepła metodą elementów skończonych	40

5	Optymalizacja położenia źródeł ciepła w dwuwymiarowym zagadnieniu ustalonego przewodzenia ciepła.....	44
5.1	Wprowadzenie.....	44
5.2	Geometria analizowanego zagadnienia i warunki brzegowe.....	45
5.3	Równanie rządzące	46
5.4	Obliczenia numeryczne	47
5.5	Wyniki numeryczne.....	50
5.5.1	Wyniki obliczeń dla obszaru okrągłego z trzema elementami grzejnymi - przypadek 1.....	51
5.5.2	Wyniki obliczeń dla obszaru okrągłego z czterema elementami grzejnymi - przypadek 2.....	53
5.5.3	Wyniki obliczeń dla obszaru kwadratowego z czterema elementami grzejnymi - przypadek 3.....	55
5.5.4	Wyniki obliczeń dla obszaru okrągłego z ośmioma elementami grzejnymi - przypadek 4.....	59
6	Wyznaczanie pozycji źródeł w metodzie rozwiązań podstawowych.....	61
6.1	Wprowadzenie.....	61
6.2	Zagadnienie biharmoniczne	63
6.2.1	Geometria i warunki brzegowe.....	64
6.2.2	Rozwiązanie równania biharmonicznego.....	64
6.2.3	Wyniki numeryczne.....	65
6.3	Zagadnienie Motza	68
6.3.1	Geometria i warunki brzegowe.....	68
6.3.2	Rozwiązanie.....	69
6.3.3	Wyniki numeryczne.....	70
7	Wyznaczanie efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła w jednokierunkowym włóknistym materiale kompozytowym.....	74
7.1	Wprowadzenie.....	74

7.2 Geometria problemu.....	75
7.3 Równanie rządzące i warunki brzegowe.....	76
7.4 Efektywny współczynnik przewodzenia.....	77
7.5 Rozwiązanie.....	77
7.6 Parametry zastosowanych metod.....	79
7.7 Wyniki numeryczne.....	80
7.7.1 Komórka zawierająca 3 włókna $\lambda_M < \lambda_F$, $R=0,25$	80
7.7.2 Komórka zawierająca 3 włókna $\lambda_M > \lambda_F$, $R=0,25$	83
7.7.3 Komórka zawierająca 4 włókna $\lambda_M < \lambda_F$, $R=0,25$	85
7.7.4 Komórka zawierająca 4 włókna $\lambda_M > \lambda_F$, $R=0,25$	87
7.7.5 Komórka zawierająca 3 włókna, $\lambda_M > \lambda_F$, $R=0,4$	92
7.7.6 Komórka zawierająca 3 włókna, $\lambda_M < \lambda_F$, $R=0,4$	93
7.8 Zastosowanie algorytmu genetycznego do rozmieszczenia punktów źródłowych i poprawienia dokładności rozwiązania.....	94
8 Wnioski i podsumowanie.....	98
Literatura.....	100
Załączniki.....	108
Załącznik 1 – kod programu - optymalizacja położenia źródeł ciepła z wykorzystaniem algorytmu genetycznego.....	108
Załącznik 2 – kod programu - rozwiązanie zagadnienia Motza metodą rozwiązań podstawowych.....	114
Załącznik 3 – kod programu - wyznaczenie efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła.....	118

Streszczenie

Praca poświęcona jest optymalizacji parametrów konstrukcji, struktur materiałów oraz parametrów metod obliczeniowych stosowanych w obliczeniach mechaniki stosowanej. Zaimplementowany algorytm genetyczny wykorzystywany jest do wyznaczania optymalnego położenia źródeł, które w zależności od rozpatrywanego problemu są źródłami ciepła w zagadnieniach ustalonego przewodzenia ciepła, jak również osobliwościami rozwiązań zastosowanej metody numerycznej – metody rozwiązań podstawowych. W pracy wykazano, że zastosowanie algorytmów genetycznych pozwala poprawić jakość wyników uzyskiwanych podczas rozwiązywania zagadnień z użyciem metody rozwiązań podstawowych – jako przykłady przeanalizowano równanie biharmoniczne oraz zagadnienie Motza. Ponadto w pracy wykazano skuteczność metod hybrydowych, łączących procedury optymalizacyjne z procedurami numerycznymi służącymi do obliczania wybranych problemów brzegowych. Zaprezentowano wyniki optymalizacji konstrukcji wymiennika ciepła, w którym źródła ciepła były optymalizowane przy pomocy algorytmu genetycznego, zaś rozwiązania zagadnienia ustalonego przewodzenia ciepła wykonano przy pomocy procedury implementującej metodę elementów skończonych. Przedstawiono także wyniki uzyskane w obliczeniach mających na celu optymalizację struktury kompozytu w celu uzyskania optymalnego współczynnika przewodzenia ciepła.

Abstract

The work is devoted to optimization of construction parameters, material structure and numerical method parameters used in applied mechanics calculations. The implemented genetic algorithm is used to determine optimal position of sources, which according to considered problem denote heat sources in steady heat transfer problems or singularities in the method of fundamental solutions used in numerical calculations. It has been shown that genetic algorithm application allows to improve the quality of results obtained in calculations using the method of fundamental solutions. Two problems were analysed as examples: biharmonic equation and the Motz problem. Furthermore, the effectiveness of hybrid methods (optimization method and numerical method used in solving boundary problems combined together) has been demonstrated. There are several examples of construction optimization of the heat exchanger presented, in which heat sources are optimized by genetic algorithm and the steady heat transfer problem is solved by the finite element method. The results obtained in optimization of composite structure, aimed to find optimal effective heat transfer coefficient, were also presented.

1 Wprowadzenie

1.1 Stan badań

Zagadnienia optymalizacji są obecnie nieodłącznym aspektem zarówno dziedzin technicznych jak i nietechnicznych. Minimalizacja kosztów, maksymalizacja parametrów konstrukcyjnych, skrócenie czasu pracy, poprawa efektywności procesów - to tylko nieliczne przykłady spotykane w codziennej praktyce. Współcześnie, proces optymalizacji można znacząco ułatwić poprzez przeprowadzenie eksperymentów numerycznych, zastępując tym przeprowadzenie długotrwałych i kłopotliwych badań empirycznych, przy czym często doświadczalne przeprowadzenie optymalizacji jest w ogóle niemożliwe z powodu złożoności rozważanego problemu. W takich przypadkach algorytmy optymalizacyjne oraz procedury obliczeniowe pozwalające symulować wybrane zagadnienia są nie tylko pomocą, ale wręcz niezbędnym narzędziem w pracy inżyniera. Zastosowanie metod optymalizacyjnych w projektowaniu konstrukcji jest przedmiotem wielu badań i opracowań [Ost2003]. Problem optymalizacji, czyli wyszukiwania rozwiązania lepszego niż znane dotychczas, może być sprowadzone do matematycznego zagadnienia wyznaczania ekstremum funkcji [Mil1999]. Często jednak, optymalizowana funkcja jest bardzo złożona, a proces optymalizacji bardzo skomplikowany. Do tej pory wypracowano wiele metod optymalizacyjnych, z czego niektóre są dedykowane do pewnych szczególnych typów zadań, a inne są uniwersalne.

Wiele zagadnień technicznych modelowanych przy pomocy równań różniczkowych rozwiązywanych jest przy pomocy metod numerycznych, przy czym najczęściej obecnie stosowaną metodą w praktyce inżynierskiej jest metoda elementów skończonych [Zie2000, Rak2005]. Metoda elementów skończonych (MES) jest metodą siatkową, co oznacza, że w celu uzyskania rozwiązania należy dyskretyzować rozważany obszar pokrywając go siatką węzłów wyznaczających elementarne podobszary. Inną znaną metodą siatkową jest metoda elementów brzegowych [Bre1992, Bur1995], która bazując na rozwiązaniu podstawowym przekształca równania opisujące zagadnienie w rozważanym obszarze do

brzegowych równań całkowych, co zmniejsza wymiar problemu i może przyspieszyć obliczenia. W metodzie tej dyskretyzacja na elementy następuje wyłącznie na brzegu obszaru.

Alternatywą dla metod siatkowych są tzw. metody bezsiatkowe stanowiące przedmiot intensywnych badań, jednak ich komercyjne wykorzystanie nie jest powszechne. Analizując literaturę można znaleźć zarówno zwolenników jak i przeciwników tych metod. Istnieją jednak pewne obiektywne kryteria, które przemawiają za wyborem konkretnej metody. Zwraca się szczególną uwagę [Cza2010] na to, iż zastosowanie metody elementów skończonych może rodzić problemy z zachowaniem ciągłości pola naprężeń, jak również z uwzględnieniem różnorodności właściwości materiałowych złożonych materiałów np. kompozytów. Z kolei wadą metod bezsiatkowych jest m.in. odpowiedni dobór parametrów samej metody, jak również pojawiające się w niektórych z metod problemy z implementacją i spełnieniem warunków brzegowych.

Wśród znanych i popularnych metod bezsiatkowych pozwalających na rozwiązywanie zagadnień brzegowych jest metoda Trefftza [Eis1995, Ake2000, Li2004b]. Jest to metoda, w której równanie rządzące jest spełnione w sposób ścisły przez wybrane funkcje próbne, co jest bardzo ważnym atutem tej metody. Metodę tę można stosować zarówno w rozwiązywaniu jednorodnych [Che1989, Kol1992, Zie1885] jak i niejednorodnych [Pou1998b, Kle2008] równań rządzących. Wyznaczenie całki szczególnej równania niejednorodnego możliwe jest m.in. przez zastosowanie radialnych funkcji bazowych [Che2002a, Che2002b, Ber2009]. Metodę tę można również z powodzeniem stosować w zagadnieniach zawierających osobliwości [Li2004b], jak również zagadnień obejmujących wiele połączonych obszarów [Che2006]. Jedną z możliwych implementacji metody Trefftza jest metoda kollokacji brzegowej, w której przybliżone spełnienie warunku brzegowego jest realizowane przez kollokację warunku w wybranych punktach na brzegu obszaru. Ponadto, jeśli w metodzie kollokacji jako funkcje próbne wykorzystana się rozwiązania podstawowe, wówczas metodę tę nazywa się metodą rozwiązań podstawowych. Obszerne omówienie tej metody można znaleźć w pracach Kołodzieja [Kol2001, Kol2009] a jej praktyczne zastosowanie

można znaleźć m.in. w pracach dotyczących mechaniki płynów [Str2000, Str2005, Jop2006] oraz przewodzenia ciepła [Kol1992].

W roku 2007 opublikowano pracę [Che2007] wykazującą, że metoda Trefftza jest równoważna metodzie rozwiązań podstawowych (MRP), w której funkcjami próbnymi są rozwiązania podstawowe rozważanego równania. Metoda ta, zaproponowana została po raz pierwszy przez Kupradze i Aleksidze [Kup1963, Kup1964a, Kup1964b], a jej numeryczną implementację zaprezentowano w pracach Mathona i Bogomolnego [Mat1977, Bog1985]. Metoda ta nazywana jest także metodą symulowanych ładunków [Kat1988, Nis2000, Nis2001, Nis2003].

Metoda rozwiązań podstawowych zyskała sporą popularność wśród specjalistów zajmujących się metodami bezsiatkowymi i obecnie jest stosowana w analizie bardzo wielu zagadnień, zarówno jednowymiarowych [Smy2001], dwuwymiarowych [Gol1995b, Kol2001, Jop2006], jak i trójwymiarowych [Pou2002]. W szczególności, wykorzystano metodę rozwiązań podstawowych do rozwiązania zagadnień z osobliwościami występującymi na brzegu w skutek nagłej zmiany warunku brzegowego [Geo1996, Gol2002] oraz w zagadnieniach nieliniowych [Usc2008].

Cechą charakterystyczną tej metody są punkty źródłowe często nazywane po prostu źródłami. Są to punkty, w których występują osobliwości rozwiązań podstawowych. Zarówno liczba, jak i położenie punktów źródłowych wpływają w istotny sposób na jakość rozwiązania, jednakże nie została do tej pory zaproponowana analityczna metoda pozwalająca na możliwie najlepsze rozmieszczenie tych punktów. W związku z powyższym stosuje się różne metody w celu rozmieszczenia tych punktów. Jedną z wariantów jest równomierne rozmieszczenie punktów na konturze w kształcie okręgu znajdującym się poza rozważanym obszarem [Bog1985], inną możliwością, najczęściej stosowaną, jest rozmieszczenie punktów źródłowych na konturze geometrycznie podobnym do brzegu rozważanego obszaru [Kar1992, Kar1995, Kar1992]. Ostatnia z wykorzystywanych metod polega na nieregularnym rozmieszczeniu punktów źródłowych. W przypadku nieregularnego rozmieszczenia punktów źródłowych można rozróżnić dwa podejścia: współrzędne punktów źródłowych są niewiadomymi wyznaczanymi w tym samym cyklu obliczeniowym, w którym

wyliczane są współczynniki wagowe metody rozwiązań podstawowych [Fai1988, Fai1989, Fai2003] co znacząco wpływa na trudność rozwiązania, gdyż zagadnienie staje się nieliniowe. Możliwe jest również rozmieszczanie punktów źródłowych losowo wokół obszaru przed wykonaniem procedury rozwiązującej układ równań metody rozwiązań podstawowych. Losowy układ punktów źródłowych analizowano w pracy Mitica [Mit2004] z której wynika, że taki układ punktów może być równie korzystny jak regularny rozkład punktów na konturze podobnym do geometrii obszaru. Nieregularny rozkład punktów źródłowych optymalizowany przez algorytm genetyczny zaprezentowano w pracach Nishimury [Nis2000, Nis2002, Nis2003], gdzie analizowano zagadnienie wyznaczania potencjału elektrycznego dwóch elektrod znajdujących się w określonej odległości od siebie. Istotny wpływ, jaki ma rozmieszczenie punktów źródłowych na jakość wyników uzyskiwanych przy pomocy metody rozwiązań podstawowych stał się podstawą do badań nad stabilnością i zbieżnością tej metody. Jest to przedmiot także najnowszych badań dotyczących tej metody [Kit1991, Bar2008, Che2008, Kle2008, Alv2009, Won2011]. Problematyka rozmieszczenia punktów źródłowych w metodzie rozwiązań podstawowych jest więc problemem ważnym i aktualnym.

Połączenie kilku metod numerycznych w celu poprawy uzyskiwanych wyników nazywane jest metodą hybrydową. Szczególne znaczenie ma w tej dziedzinie połączenie metod optymalizacyjnych z metodami służącymi do rozwiązywania konkretnych problemów technicznych. Jedną z popularniejszych metod używanych w takich połączeniach są algorytmy ewolucyjne, a w szczególności algorytmy genetyczne [Gen1997, Pas2005, Alm2009].

Optymalizacja konstrukcji, jak również struktury i właściwości materiałów kompozytowych to problemy do których często wykorzystuje się metody hybrydowe. Pozwala to na znaczące przyspieszenie procesu projektowania, a w wielu wypadkach jest jedynym sposobem na przeprowadzenie optymalizacji, ponieważ budowa prototypów jest niemożliwa lub nieuzasadniona ekonomicznie. Wśród problemów konstrukcyjnych podlegających optymalizacji można wyróżnić m.in. konstrukcje wymienników ciepła. Wiele najnowszych prac [Bia2004, Rav2005, Hil2006, Sel2006, Pon2008, Xie2008] poświęconych jest właśnie temu zagadnieniu.

Drugim, również bardzo istotnym i aktualnym problemem technicznym, jest zagadnienie optymalizacji struktury kompozytów. Optymalizacja topologii kompozytów może mieć na celu m.in. poprawę właściwości wytrzymałościowych materiału [Kar1995, Kru2007, Nai2008, Pal2008, Alm2009] lub poprawę właściwości termicznych materiału [Tur2005, Kal2002, Zho2008, Fan2009, Jop2010]. W szczególności, jednym z parametrów decydującym o właściwościach cieplnych kompozytu jest współczynnik przewodzenia ciepła, który dla każdego z materiałów wchodzących w skład kompozytu może być inny. W takim przypadku wyznacza się tzw. efektywny współczynnik przewodzenia ciepła, który reprezentuje współczynnik przewodzenia dla całego kompozytu. Badania dotyczące wyznaczania efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła przedstawiono m.in. w pracach Kołodzieja [Kol1989] oraz Lee [Lee2006].

1.2 Cel i zakres pracy

Celem pracy jest wykorzystanie metod hybrydowych w zagadnieniach mechaniki technicznej. Zastosowane w pracy metody hybrydowe obejmują połączenie algorytmu genetycznego realizującego zadanie optymalizacyjne oraz metody numerycznej służącej rozwiązywaniu określonego zagadnienia brzegowego – wykorzystano w tym celu metodę elementów skończonych oraz metodę rozwiązań podstawowych.

Wymienione w tytule pracy źródła występują w niniejszej pracy w dwóch odrębnych znaczeniach. Ta dwuznaczność związana jest z powszechnie przyjętą terminologią dotyczącą konkretnych dziedzin, w których są one wykorzystywane. W związku z tym, w pracy przez źródła rozumie się:

- źródła ciepła o określonej mocy generujące strumień ciepła w zagadnieniach ustalonego przewodzenia ciepła;
- źródła (punkty źródłowe) będące punktami, w których rozwiązania podstawowe - wykorzystywane w metodzie rozwiązań podstawowych, mają osobliwości.

W pracy analizowane są zagadnienia techniczne modelowane przy pomocy równania Laplace'a oraz równania biharmonicznego, co jest związane z dużą liczbą zagadnień mechanicznych, które są opisywane przy pomocy tych równań. Można do nich zaliczyć m.in. zagadnienia stacjonarnego przewodzenia ciepła, przepływów laminarny lepkiego płynu nieściśliwego, zagadnienia elastoplastyki i wiele innych. W szczególności, w niniejszej pracy przedstawiono dwa zagadnienia stanowiące przykład modelowania ustalonego przewodzenia ciepła.

Ponadto w pracy analizowany jest wpływ nieregularnego rozmieszczenia punktów źródłowych w metodzie rozwiązań podstawowych na jakość uzyskiwanych wyników.

Praca składa się z ośmiu rozdziałów, przeglądu aktualnego stanu badań oraz załączników z kodami programów obliczeniowych napisanych przez autora.

Rozdział drugi, zawiera podstawy teoretyczne optymalizacji. Rozdział obejmuje podstawy matematycznego sformułowanie zadania optymalizacyjnego, zdefiniowano w nim podstawowe pojęcia oraz omówienie metody optymalizacji jednokryterialnej i wielokryterialnej. W rozdziale zaprezentowana została zasada działania algorytmów ewolucyjnych wraz z wykorzystywaną terminologią. Przedstawiono także schemat działania algorytmu genetycznego, który zaimplementowany został na potrzeby badań niniejszej pracy.

Rozdział trzeci zawiera omówienie metody rozwiązań podstawowych, jako jednej z dwóch metod rozwiązywania zagadnień brzegowych wykorzystywanych w pracy. W szczególności przedstawiony został problem wyznaczania pozycji punktów źródłowych (źródeł), których rozmieszczenie wpływa na jakość wyników uzyskiwanych przy użyciu tej metody. Zaprezentowano także wybrane możliwe rozwiązania, wykorzystywane przez autorów korzystających z tej metody.

Rozdział czwarty zawiera opis metody elementów skończonych, podstawy teoretyczne metody oraz przykład rozwiązania tą metodą zagadnienia ustalonego przewodzenia ciepła. Metoda elementów skończonych to druga z metod wykorzystywanych w pracy do numerycznego rozwiązywania zagadnień brzegowych.

W rozdziale piątym pracy przedstawiono wyniki eksperymentu numerycznego, którego celem była optymalizacja konstrukcji wymiennika ciepła składającego się z elementów grzejnych umieszczonych wewnątrz ogrzewanego obszaru. Wewnątrz każdego z elementów grzejnych znajduje się źródło ciepła zapewniające utrzymanie stałej temperatury na brzegu elementu grzejnego. Jako funkcję celu w analizowanym zagadnieniu przyjęto maksymalną średnią wartość temperatury w rozważanym obszarze, przy czym pomijany jest rozkład temperatury w elementach grzejnych. Zaprezentowano analizę wymiennika o kształcie okrągłym z trzema, czterema oraz ośmioma elementami grzejnymi oraz konstrukcję wymiennika o kształcie kwadratowym z czterema elementami grzejnymi. Rozważane obszary są symetryczne, aby ułatwić ocenę wyników optymalizacji. W procedurze optymalizacyjnej nie wykorzystywano jednak informacji o symetrii, dzięki czemu może ona być równie skutecznie stosowana w analizie przypadków o kształtach niesymetrycznych.

Rozdział szósty poświęcono optymalizacji parametrów metody rozwiązań podstawowych. Analizowano dwa przypadki: rozwiązanie równania biharmonicznego oraz rozwiązanie równania Laplace'a. W drugim przypadku uwzględniono osobliwość występującą na brzegu obszaru, co w praktyce obliczeniowej znacząco utrudnia uzyskanie dobrej jakości wyników numerycznych. Zaprezentowano uzyskane wyniki oraz zestawiono je z wynikami uzyskanymi dla typowego rozmieszczenia punktów źródłowych umieszczonych na konturze podobnym do rozważanej geometrii, znajdującym się blisko brzegu rozważanego obszaru.

W rozdziale siódmym pracy przedstawiono wyniki numerycznego eksperymentu mającego na celu konstrukcję kompozytu o określonym współczynniku przewodzenia ciepła. Zaprezentowano wyniki optymalizacji rozmieszczenia włókien w kompozycie włóknistym, jednokierunkowym. Przeprowadzono analizę przypadków z trzema włóknami (udział objętościowy włókien w osnowie: 15% oraz 38%) oraz z czterema włóknami (udział objętościowy włókien w osnowie 20%) znajdującymi się wewnątrz elementarnej komórki kompozytu. Rozważono przypadki, w których współczynnik przewodzenia ciepła matrycy był większy niż współczynnik przewodzenia

włókien, oraz przypadek odwrotny. Zaprezentowano uzyskane wyniki oraz błędy wynikające z zastosowanej metody rozwiązań podstawowych. Przedstawiono również wynik optymalizacji parametrów tej metody.

Ponadto praca zawiera trzy załączniki z wybranymi kodami programów. W istocie programów tych powstało więcej, a do załącznika wybrano te, które reprezentują trzy podstawowe procedury obliczeniowe wykorzystywane w pracy:

Załącznik 1 – kod programu zawierający stosowany algorytm genetyczny wykorzystywany także we wszystkich innych obliczeniach oraz procedurę sprzęgającą algorytm genetyczny z pakietem COMSOL obliczającym równanie przewodnictwa ciepła metodą MES;

Załącznik 2 – kod programu do rozwiązywania zagadnienia Motza zaprezentowanego w rozdziale 7 niniejszej pracy z wykorzystaniem metody rozwiązań podstawowych;

Załącznik 3 – kod programu do obliczania efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła z wykorzystaniem metody rozwiązań podstawowych.

1.3 Tezy pracy

Z dotychczasowych badań wynika, że nie istnieje skuteczna metoda służąca rozmieszczeniu punktów źródłowych w metodzie rozwiązań podstawowych. Analiza literatury oraz wstępne badania pozwalają na sformułowanie następującej tezy:

zastosowanie algorytmów genetycznych pozwala na optymalizację położenia źródeł MRP, co poprawia jakość uzyskiwanych wyników.

Optymalizacja konstrukcji i struktury materiałów jest przedmiotem wielu badań. W szczególności przedmiotem optymalizacji mogą być konstrukcje i struktury o określonych właściwościach cieplnych. Można w tym celu skorzystać z metod hybrydowych tj. łączących procedurę optymalizacyjną oraz procedurę numeryczną służącą rozwiązywaniu określonych zagadnień brzegowych. Dzięki

temu możliwa staje się optymalizacja parametrów konstrukcyjnych wymiennika ciepła pod kątem uzyskania maksymalnej średniej temperatury w rozważanym obszarze. Możliwa jest również optymalizacja struktury kompozytu włóknistego, jednokierunkowego, składającego się z dwóch materiałów (osnowy i włókien) o różnych właściwościach termicznych (różny współczynnik przewodzenia ciepła) w celu uzyskania kompozytu o określonym efektywnym współczynniku przewodzenia ciepła. W związku z powyższym można sformułować następującą tezę:

zastosowanie metod hybrydowych może być z powodzeniem stosowane w procesie konstruowania urządzeń i projektowania struktury materiałów o pożądanych właściwościach cieplnych.

2 Optymalizacja

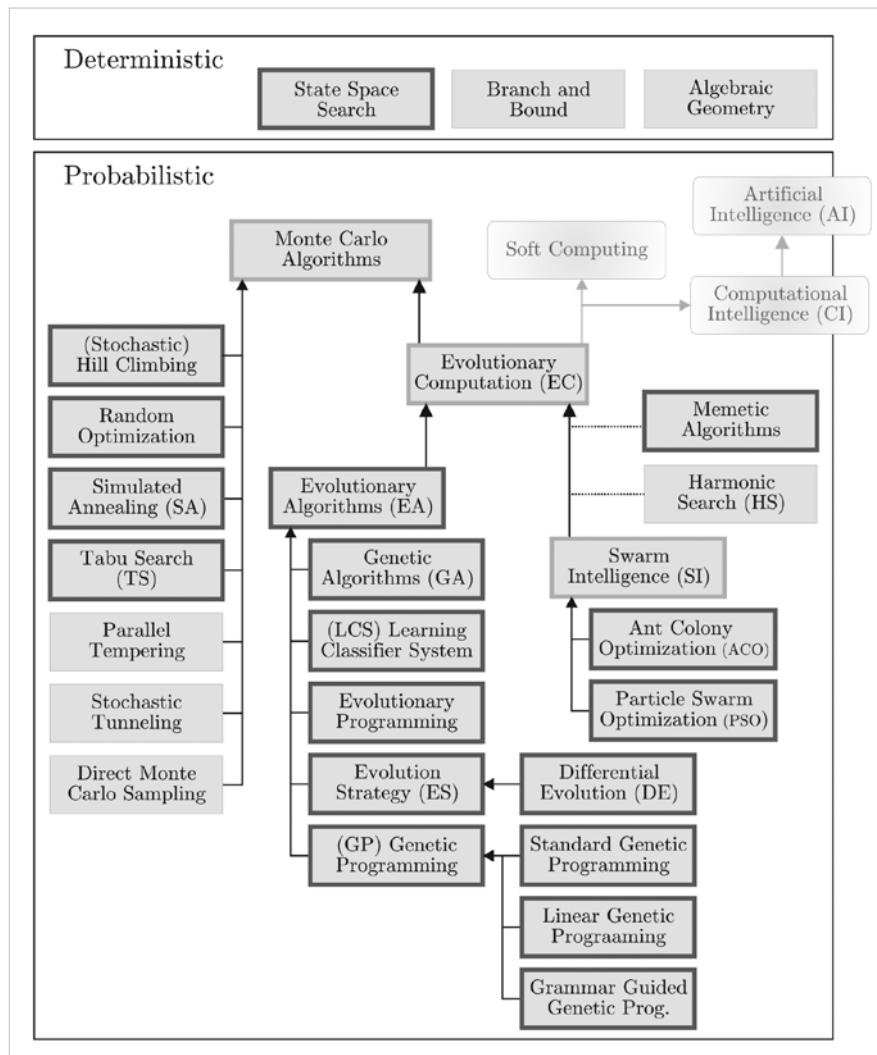
2.1 Wprowadzenie

Dla wielu zagadnień inżynierskich, w tym w szczególności z obszaru mechaniki, nie są znane rozwiązania analityczne, co powoduje konieczność skorzystania z metod numerycznych w celu wyznaczenia poszukiwanych wartości możliwie bliskich rozwiązaniu dokładnemu (o ile takie istnieje). Z drugiej strony, często pojawia się również konieczność znalezienia lub wybrania spośród znanych rozwiązań takiego, które najlepiej będzie spełniało postawione kryteria.

Problem znalezienia optimum pojawia się w wielu dziedzinach nauki, zaś w zagadnieniach inżynierskich jest obecny niemal cały czas. W związku z powyższym opracowano wiele metod mających ułatwić znalezienie najlepszego rozwiązania. Jako że problem ten jest tak istotny, powstała cała dyscyplina naukowa tj. badania operacyjne, która zajmuje się rozwiązywaniem problemów związanych z podejmowaniem optymalnych decyzji. Skoro proces optymalizacji polega na wyznaczeniu ekstremum pewnej funkcji, w związku z tym, dla niektórych zagadnień możliwe jest znalezienie tej wartości analitycznie. W praktyce inżynierskiej jednak, większość problemów obliczana jest numerycznie zaś znalezienie optimum odbywa się na drodze iteracyjnego przeszukiwania przestrzeni możliwych rozwiązań lub też poprzez przeszukiwanie losowe[Gol1995a].

Ogólny podział znanych metod optymalizacyjnych został przedstawiony na poniższym schemacie (rysunek 2.1). Przedstawiony schemat zachowany został w oryginalnej wersji językowej, jako że nazwy te są powszechnie stosowane, a nie wszystkie posiadają odpowiedniki w języku polskim. Zasadniczy podział na algorytmy deterministyczne i probabilistyczne związany jest ze sposobem działania. Algorytmy deterministyczne są zwykle stosowane, jeżeli dla danego zagadnienia można w dość łatwy i jednoznaczny sposób zdefiniować relację pomiędzy przestrzenią rozwiązań dopuszczalnych, a ich użytecznością dla danego zagadnienia. Jeżeli natomiast relacja opisująca „jakość” danego rozwiązania jest

bardziej złożona, lub kiedy wymiar przestrzeni wyszukiwania jest duży, wówczas korzysta się z algorytmów probabilistycznych [Wei2009].



Rysunek 2.1. Klasyfikacja algorytmów optymalizacji.
Źródło: [Wei2009]

Zadanie optymalizacji polega na wyznaczeniu najlepszego elementu \hat{x} ze zbioru U . Pojęcie najlepszego elementu zdefiniowane jest jako zbiór kryteriów optymalizacyjnych F :

$$F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}. \quad (2.1)$$

Kryteria te, sformułowane za pomocą funkcji matematycznych nazywane są funkcjami celu – to właśnie te funkcje podlegają optymalizacji, a więc to dla nich wyznacza się optimum [Ara2001] co można zapisać następująco:

$$f(x): U \rightarrow Y, Y \subseteq R. \quad (2.2)$$

W powyższym wzorze f oznacza maksymalizowaną funkcją celu, zbiór wartości Y jest podzbiorem liczb rzeczywistych, natomiast zbiór U określa się przestrzenią przeszukiwań. Podzbiór D zbioru U nazywany jest przestrzenią rozwiązań dopuszczalnych i może być tożsamy z zbiorem U lecz może także stanowić tylko podzbiór, z powodu ograniczeń narzuconych na zagadnienie - wykluczających niektóre z elementów przestrzeni przeszukiwań. Przestrzeń przeszukiwań może zawierać różne elementy takie jak liczby, zbiory, listy etc. i są one uzależnione od rodzaju optymalizowanego zagadnienia. Tym elementom funkcja celu przyporządkowuje liczbę rzeczywistą ze zbioru Y . Funkcja celu może być również zdefiniowana w sposób bardziej rozbudowany niż prosta funkcja matematyczna, może to być określony algorytm zawierający wiele ścieżek postępowania [Wei2009]. Biorąc pod uwagę funkcję celu, problemy optymalizacji można podzielić na dwa rodzaje: jednokryterialne (z jedną funkcją celu) i wielokryterialne (z wieloma funkcjami celu).

W przypadku optymalizacji jednokryterialnej zagadnienie sprowadza się do znalezienia takiego elementu \hat{x} dla którego funkcja celu przyjmuje wartość maksymalną:

$$f(\hat{x}) \geq f(x), \quad x \in D, \quad (2.3)$$

gdzie f oznacza funkcję celu, \hat{x} - optimum. Należy przy tym zaznaczyć, że zagadnienie wyznaczania minimum funkcji zawsze da się sprowadzić do zagadnienia wyznaczania maksimum korzystając z następującego przekształcenia:

$$\min f(x) = \max g(x) = -\max \{-f(x)\}, \quad (2.4)$$

gdzie $\min f(x)$ i $\max f(x)$ oznaczają kolejno minimum i maksimum funkcji $f(x)$. W praktyce obliczeniowej często spotyka się sytuację, w której wyznaczona w procedurze wartość \hat{x}_1 nie jest wartością optymalną dla całego zbioru D , lecz tylko w pewnym podzbiórze stanowiącym otoczenie punktu \hat{x}_1 , wówczas wartość \hat{x}_1 nazywana jest optimum lokalnym.

W przypadku maksymalizacji, maksimum lokalne definiowane jest następująco:

$$\bigwedge_{\hat{x}_l} \bigvee_{\varepsilon > 0} \{f(\hat{x}_l) \geq f(x), \bigwedge_{x \in D} |x - \hat{x}_l| < \varepsilon\}. \quad (2.5)$$

W niektórych przypadkach optymalizacji jednokryterialnej, jak i w przypadku optymalizacji wielokryterialnej okazuje się, że nie istnieje jedno optimum lecz wiele. W takim przypadku wyznaczyć można zbiór, nazywany zbiorem (lub wektorem) optymalnym zawierającym wszystkie rozwiązania optymalne.

W przypadku optymalizacji wielokryterialnej pojawia się problem związany z tym, że dość często stosowane kryteria cechuje różna istotność z punktu widzenia oczekiwanego rozwiązania. Zważywszy, że niektóre kryteria są mniej ważne, inne zaś bardziej, stosuje się różne metody pozwalające na uwzględnienie tego aspektu zagadnienia. Jedną z metod optymalizacji wielokryterialnej uwzględniającą ten problem jest metoda ważonych sum [Deb2001, Koz1992], która wyraża się następującym wzorem:

$$g(x) = \sum_{i=1}^N w_i f_i(x), \quad (2.6)$$

gdzie $g(x)$ jest zastępczą (złożoną) funkcją celu, f_i - funkcje celu, czyli wszystkie kryteria optymalizacji wielokryterialnej, w_i - wagi nadane poszczególnym kryteriom. Zastosowanie metody ważonych sum pozwala sprowadzić zagadnienie optymalizacji wielokryterialnej do optymalizacji jednej zastępczej funkcji celu przy uwzględnieniu wszystkich kryteriów oraz wag, które są im przypisane.

2.2 Algorytmy ewolucyjne

Algorytmy genetyczne (AG) należą do szerszej klasy algorytmów ewolucyjnych. Cechą wspólną tych algorytmów jest nawiązanie do naturalnego procesu ewolucji, w związku z czym nazewnictwo zostało również zaczerpnięte z tej dziedziny. Zasadą działania algorytmu jest przetwarzanie populacji osobników, gdzie osobnik jest jednym z możliwych rozwiązań (dowolny

z punktów w przestrzeni poszukiwań), zaś populacja to zbiór takich punktów. Miarą jakości przetwarzanych osobników jest funkcja oceny (odpowiednik funkcji celu w standardowych algorytmach optymalizacyjnych). Funkcja oceny definiowana jest dla rozpatrywanego problemu i w każdej iteracji algorytmu (dla każdej populacji) zwraca wartość odpowiadającą przystosowaniu każdego z osobników. Im wyższa wartość przystosowania, tym osobnik bliższy jest rozwiązaniu optymalnemu. Ponieważ zasada działania algorytmu jest taka, że działa on na zakodowanej postaci możliwych rozwiązań, stąd też wprowadzono również pojęcia fenotypu oraz genotypu. Fenotyp to niezakodowana postać rozwiązania, czyli jeden z punktów w przestrzeni poszukiwań. Z kolei genotyp to zakodowana postać fenotypu (np. rozwiązanie przedstawione w postaci łańcucha binarnego), która składa się z jednego lub większej ilości chromosomów. W praktyce najczęściej spotykana jest sytuacja, w której jednemu osobnikowi odpowiada jeden chromosom, zdarza się natomiast również, że algorytm działa na niezakodowanej formie rozwiązań, a wówczas fenotyp jest tożsamy z genotypem. Chromosom zbudowany jest z elementarnych jednostek zwanych genami. Geny zawierają informacje charakterystyczne dla danego osobnika. Ze względu na to, że geny mogą występować w wielu odmianach, dla alternatywnych wariantów tego samego genu stosuje się termin allel. W przypadku standardowego algorytmu genetycznego z binarnym kodowaniem każdy z genów może występować w dwóch wariantach przyjmując odpowiednio wartość 1 lub 0. Drugą z istotnych cech genów jest ich umiejscowienie w chromosomie. Pozycja genu w chromosomie nazywana jest locus.

2.2.1 Algorytmy genetyczne – podstawowe pojęcia oraz schemat

Goldberg w swej pracy [Gol1995a] wskazał na następujące cechy charakterystyczną odróżniającą algorytmy genetyczne od innych bardziej tradycyjnych metod optymalizacyjnych:

- a) AG nie przetwarzają bezpośrednio parametrów zadawania, lecz ich zakodowaną postać;
- b) AG prowadzą poszukiwania, wychodząc nie z pojedynczego punktu, lecz z pewnej ich populacji;

- c) AG korzystają tylko z funkcji celu, nie z jej pochodnych lub innych pomocniczych informacji;
- d) AG stosują probabilistyczne, a nie deterministyczne reguły wyboru.

Podstawowy algorytm genetyczny został wprowadzony w pracy Hollanda [Hol1975] i opiera się na kilku podstawowych krokach: tj. selekcji, reprodukcji, krzyżowaniu i mutacji. Korzystając z wprowadzonej powyżej terminologii poniżej zamieszczono schemat działania algorytmu (rysunek 2.2) i opis poszczególnych kroków.

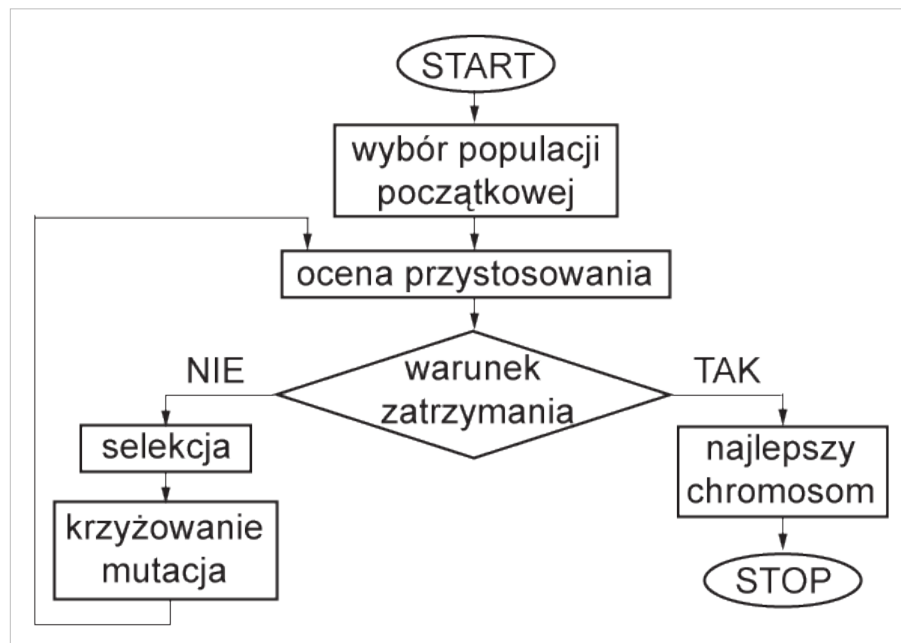
Inicjacja działania algorytmu – krok w którym generowana jest populacja początkowa (bazowa). Najczęściej wykorzystuje się do tego losową procedurę, która spośród wszystkich rozwiązań w przestrzeni przeszukiwania losuje zadaną przez projektanta liczbę możliwych rozwiązań. Ten krok wykonywany jest tylko raz podczas startu programu, podczas gdy kolejne kroki są powtarzane aż do spełnienia zadanego warunku zatrzymania.

Selekcja i reprodukcja – procedura selekcji ma za zadanie, w pewnym sensie, odzwierciedlać naturalną zasadę doboru naturalnego, zgodnie z którą przetrwają najlepiej przystosowani. W związku z tym proces selekcji opiera się na ocenie poszczególnych osobników, a następnie wyborze najlepiej przystosowanych. Oczywiście do oceny wartości przystosowania wykorzystywana jest funkcja oceny, która dla każdego osobnika oblicza właściwą wartość. Im wyższa wartość przystosowania, tym większe prawdopodobieństwo, że dany osobnik przetrwa (będzie przetwarzany w kolejnych etapach algorytmu). Proces selekcji zwykle przeprowadzany jest również losowo, co oznacza, że każdy chromosom ma szansę zostać wybrany do reprodukcji, aby utworzyć nowe pokolenie osobników. Należy jednak podkreślić, iż szanse poszczególnych osobników nie są równe, lecz zależą od wartości przystosowania. W wyniku selekcji tworzona jest nowa populacja tymczasowa (pula rodzicielska), która służy do stworzenia nowego pokolenia osobników. Im wyższa wartość przystosowania danego osobnika, tym większe prawdopodobieństwo jego reprodukcji. Co więcej, podczas losowania osobników do populacji tymczasowej losowanie za każdym razem obejmuje wszystkie

osobniki co oznacza, że w wyniku reprodukcji w populacji tymczasowej znajdzie się prawdopodobnie więcej kopii osobników o wyższej wartości przystosowania.

Operacje genetyczne – osobniki wybrane w procesie selekcji do populacji tymczasowej są przetwarzane przez operatory genetyczne: krzyżowanie oraz mutację. Procedura krzyżowania opiera się na dobieraniu w pary chromosomów z populacji tymczasowej oraz wzajemnym krzyżowaniu ich fragmentów. W przypadku krzyżowania ma również miejsce losowanie, w wyniku którego z pewnym, najczęściej z góry zadanim prawdopodobieństwem, podejmowana jest decyzja o krzyżowaniu danej pary chromosomów. Jeśli decyzja jest pozytywna wówczas następuje wymiana genów pomiędzy osobnikami. Kolejną operacją jest mutacja, która również może wystąpić z zadanim prawdopodobieństwem dla każdego z chromosomów. W wyniku tej procedury zmieniane są poszczególne (najczęściej losowo wybrane) geny w genotypie danego osobnika.

W wyniku zastosowania operatorów genetycznych na populacji tymczasowej powstaje nowa populacja – potomna, dla której znowu obliczane są wartości funkcji przystosowania zaś cały proces jest powtarzany do czasu spełnienia założonego warunku zatrzymania.



Rysunek 2.2 . Schemat działania algorytmu genetycznego

Przedstawiony powyżej schemat działania algorytmu genetycznego może być zrealizowany na wiele różnych sposobów w zależności od wybranej implementacji poszczególnych procedur. Poniżej przedstawiono bardziej precyzyjny opis, w jaki sposób mogą być realizowane procedury wykorzystywane w algorytmach genetycznych. Te procedury zostały zaimplementowane przez autora w pracy.

2.2.2 Kodowanie chromosomów

Wykorzystując algorytmy ewolucyjne standardowo mamy do wyboru jedną z dwóch metod kodowania rozwiązań do postaci chromosomu. Pierwsza z nich, tradycyjna, wywodząca się z pierwszych prac Hollanda zakłada, iż wszystkie rozwiązania kodowane są w łańcuchach binarnych, co oznacza, że każdy gen może przybierać wartość 0 lub 1. Druga z metod opiera się na zmiennopozycyjnej reprezentacji rozwiązań. Każda z tych metod ma swoje zalety i wady. Reprezentacja binarna wykazuje pewne wady [Mic2003] przy rozwiązywaniu zagadnień o dużej liczbie zmiennych decyzyjnych (wielowymiarowa przestrzeń przeszukiwania) oraz wymaganej dużej dokładności rozwiązania, jako że wiąże się to z bardzo rozbudowanym wektorem zero-jedynkowym reprezentującym rozwiązanie. Można również znaleźć opinie, iż kodowanie zmiennopozycyjne oraz generalnie każde inne, bardziej skomplikowane od tradycyjnego binarnego, stanowi niepotrzebną komplikację zadania co z kolei zwiększa i tak już dużą złożoność obliczeniową. Biorąc pod uwagę fakt, że w literaturze wskazuje się, iż nie można jednoznacznie stwierdzić, która z tych dwóch metod kodowania jest skuteczniejsza, w pracy zastosowano tradycyjną metodę kodowania za pomocą ciągów binarnych. Argumenty przemawiające za wybraniem tej właśnie metody to [Gwi2007]:

- stosunkowo niewielka liczba zmiennych decyzyjnych (wymiar przestrzeni poszukiwań),
- wąskie dziedziny zmiennych,
- żądana dokładność obliczeń na poziomie 3 cyfr znaczących.

Chromosomy są w tym przypadku ciągami (wektorami) składającymi się z genów, przy czym każdy gen może przybrać wartość 0 lub 1. W takim przypadku każdemu genowi odpowiada po prostu jeden bit, co pozwala na łatwe

manipulowanie wartościami poszczególnych genów przy użyciu standardowych operacji na bitach. Wektor taki reprezentuje jedno z potencjalnych rozwiązań w przestrzeni przeszukiwania, a więc koduje po jednej wartości każdej ze zmiennych decyzyjnych.

Przykładowo, dla k zmiennych decyzyjnych x_i , z których każda należy do z góry założonej dziedziny $D_i = [a_i, b_i]$ można określić liczbę N genów (bitów) potrzebnych do zakodowania wszystkich możliwych wartości x_i z żadaną dokładnością p_i . Aby zakodować wszystkie wartości zmiennych należy podzielić każdą z dziedzin D_i na $(b_i - a_i) \cdot 10^{p_i}$ przedziałów, wówczas istnieje taka, możliwie najmniejsza, liczba m_i , która dla każdego przedziału D_i spełnia warunek:

$$(b_i - a_i) \cdot 10^{p_i} \leq 2^{m_i} - 1. \quad (2.7)$$

Z powyższego wynika, że do zakodowania wszystkich zmiennych w postaci jednego chromosomu potrzeba $N = \sum_{i=1}^k m_i$ bitów, a więc taka też będzie liczba genów w chromosomie.

2.2.3 Populacja

Populacja początkowa, czyli zbiór rozwiązań będący podstawowym elementem niezbędnym do rozpoczęcia działania algorytmu, może być tworzona w sposób losowy lub deterministyczny. Oba te podejścia są stosowane w praktyce, zaś wybór jednego z nich uzależniony jest od konkretnego problemu oraz dostępnych danych.

W przypadku, kiedy stosowana jest metoda losowa, wówczas osobniki należące do populacji początkowej (czyli wszystkie składniki wektora rozwiązania) wyznaczone są w oparciu o wartość zmiennej losowej (zwykle o rozkładzie równomiernym). W tym przypadku wykorzystuje się najczęściej generatory liczb losowych zaimplementowane w danym kompilatorze wybranego języka programowania. Ze względu na wiarygodność rozkładu zmiennej losowej korzystniejsze jest jednak wykorzystanie generatorów z ustandaryzowanych bibliotek o zadanym rozkładzie.

Tworzenie populacji początkowej w sposób deterministyczny może być prowadzone na różne sposoby, jednak najczęściej jest ona podawana wprost przez

użytkownika. Podejście takie wykorzystywane jest wtedy, gdy populacja początkowa zawiera osobniki będące wynikiem obliczeń innego algorytmu lub będące efektem obliczeń samego algorytmu genetycznego z jakiegoś wcześniejszego cyklu obliczeniowego. Spotyka się również sytuacje, w których populacja początkowa powstaje ze zbioru wyników badań eksperymentalnych

2.2.4 Dopasowanie i funkcja oceny

Każdy z osobników (rozwiązań) jest oceniany przez funkcję oceny. Wartość jaką funkcja oceny przypisuje każdemu z osobników nazywana jest przystosowaniem (dopasowaniem, dostosowaniem) i reprezentuje jakość danego rozwiązania. Wartość przystosowania w zagadnieniach optymalizacji za pomocą AG jest zwykle traktowana jako funkcja celu, jakkolwiek często podlega pewnym przekształceniom. Przekształcenia spowodowane są pewnymi charakterystycznymi właściwościami funkcji oceny, które uniemożliwiają jej bezpośrednie zastosowanie do wszystkich problemów optymalizacji. Jest to szczególnie istotne przy stosowaniu procedury selekcji proporcjonalnej. W wypadku zastosowania innych procedur selekcji często jest możliwe pominięcie tych przekształceń.

Pierwsze z ograniczeń związane jest z zastosowaną metodą selekcji (selekcja proporcjonalna – opisana poniżej) wymagającej, aby jej argumenty, tj. wartości przystosowania, były liczbami nieujemnymi. Aby zapobiec takiej sytuacji, w wypadku wystąpienia ujemnych wartości przystosowania wszystkie wartości przystosowania są przesuwane o pewną stałą wartość C_1 , tak aby w wyniku otrzymać wyłącznie wartości nieujemne:

$$\max f(x) = \max \{g(x) + C_1\}. \quad (2.8)$$

Kolejne z ograniczeń wynika z tradycyjnego ujęcia procesu optymalizacji realizowanego przez kanoniczny algorytm genetyczny, który polega na wyszukiwaniu maksimum. Z tego powodu, w przypadkach kiedy istotą optymalizowanego zagadnienia jest wyznaczenie minimum, stosuje się przekształcenie, w którym przyjmuje się pewną stałą wartość C_2 i od niej odejmowane są wartości poszczególnych dopasowań. Wartość stałej może być przyjmowana na kilka sposobów, m.in. poprzez arbitralne narzucenie jej przez

twórcę programu znającego charakterystykę zagadnienia i wiedzącego, iż jest to wartość większa niż największa możliwa wartość funkcji dopasowania. Wartość stałej może być również przyjmowana jako największa wartość dopasowania wyznaczona w danej iteracji (lub wybranej liczbie ostatnich iteracji).

Trzecie przekształcenie może mieć istotne znaczenie w początkowym oraz końcowym etapie działania algorytmu genetycznego z selekcją proporcjonalną. Przekształcenie nazywane jest skalowaniem przystosowania i stosowane jest w celu uniknięcia problemu przedwczesnej zbieżności oraz dominacji określonej grupy rozwiązań. Problem przedwczesnej zbieżności może wystąpić na początku działania algorytmu, w chwili znalezienia przez algorytm rozwiązania o bardzo dużej, w stosunku do pozostałych rozwiązań, wartości funkcji dopasowania. Taka sytuacja mogłaby doprowadzić do zdominowania populacji przez ten chromosom, co w konsekwencji prowadzi do szybkiego wyeliminowania innych rozwiązań z populacji, a tym samym symulowany przez algorytm proces doboru naturalnego przestaje działać i algorytm nie znajduje już żadnych lepszych rozwiązań. Jest to niepożądana sytuacja, ponieważ fakt, iż to jedno rozwiązanie jest w początkowym etapie znacząco lepsze od innych nie oznacza wcale, że jest to rozwiązanie choćby zbliżone do optymalnego. Drugi problem narasta wraz z działaniem algorytmu, jako efekt wynajdowania rozwiązań bliskich sobie, kiedy kilka porównywalnie dobrych rozwiązań dominuje w populacji, co zmniejsza różnorodność i również obniża skuteczność metody. Aby zaradzić tym dwóm problemom stosuje się skalowanie (na przykład liniowe) po to, aby rozwiązania o średniej wartości przystosowania nie zostały całkowicie pominięte, lecz miały szansę na to, by choć raz zostały wybrane do kolejnego pokolenia, podczas gdy rozwiązania o najwyższej wartości przystosowania będą prawdopodobnie wybrane wielokrotnie.

2.2.5 Selekcja i reprodukcja

Procedura selekcji służy do wyboru rodziców, z których powstanie nowe pokolenie. Przez rodziców rozumie się tutaj oczywiście rozwiązania otrzymane w danej iteracji, zaś kolejne pokolenie odpowiada kolejnej iteracji algorytmu. Utworzenie kolejnego pokolenia jest zwykle procesem dwuetapowym. W pierwszym kroku na podstawie wartości funkcji dopasowania wybierany jest

zbiór rodziców, w kolejnym zaś rozwiązaniu te poddawane są procedurom zwanym operatorami genetycznymi. Opracowano wiele metod służących do selekcji osobników mających utworzyć nowe pokolenie na podstawie wartości ich dopasowania. W praktyce jednak stosuje się zwykle jedną z dwóch metod: selekcję turniejową lub selekcję proporcjonalną zwaną też metodą koła ruletki.

Selekcja proporcjonalna opiera się na zdefiniowaniu zmiennej losowej, która dla każdego rozwiązania w populacji przyporządkowuje prawdopodobieństwo jego reprodukcji. Jest to liniowa zależność (2.9), która jest uzależniona od wartości funkcji dopasowania [Koz1992]. To właśnie liniowy charakter tej procedury jest wyjaśnieniem jej nazwy. Często stosowanym określeniem jest również metoda koła ruletki (niesprawiedliwego koła), ponieważ ilustruje się działanie tej procedury podając za wzór koło ruletki, którego pola nie są równe. Wielkość wycinka koła w procedurze selekcji odpowiada wprost stosunkowi dopasowania danego rozwiązania do sumy dopasowań wszystkich rozwiązań danej populacji. Tego rodzaju rozwiązanie realizuje założenie o zwiększaniu szans reprodukcji osobników o największej wartości funkcji dopasowania, nie pozbawia jednak szans na reprodukcję osobników o wartości najmniejszej, jako że prawdopodobieństwo wylosowania każdego z osobników jest zawsze większe od zera:

$$P_r(x_i) = \frac{f(x_i)}{\sum_{k=1}^n f(x_k)}, \quad (2.9)$$

gdzie N – liczba wszystkich chromosomów, $P_r(x_i)$ prawdopodobieństwo selekcji rozwiązania x_i do następnego pokolenia.

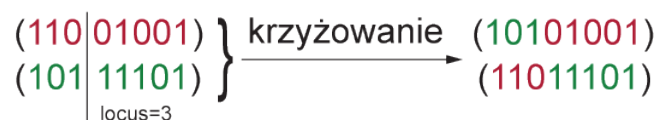
Selekcja turniejowa przeprowadzana jest w dwóch etapach. W pierwszym kroku dokonuje się losowania osobników do populacji tymczasowej i tylko te osobniki biorą udział w „turnieju”, co oznacza, że spośród tej populacji tymczasowej wybierany jest osobnik o najwyższej wartości funkcji dopasowania do kolejnego pokolenia. Tę dwustopniową procedurę stosuje się tak długo, aż zostanie utworzona populacja kolejnego pokolenia o wymaganej liczbie osobników. Istnieją dwa możliwe warianty stosowania tej metody – ze zwracaniem oraz bez zwracania przy czym częściej stosowany jest pierwszy. W zależności od wyboru wariantu metody różna jest wartość oczekiwana liczby kopii osobników w kolejnym pokoleniu. Parametrem, który pozwala wpływać na działanie tej

metody jest licznosc populacji tymczasowej. W szczegolnym przypadku mozliwe jest przeprowadzanie turniejow pomiedzy dwoma osobnikami.

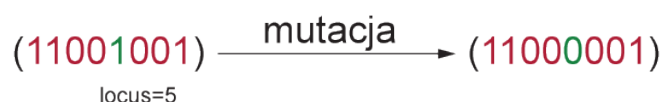
2.2.6 Operatory genetyczne: krzyzowanie i mutacja

W zalezności od przyjetego systemu kodowania (binarne lub zmiennopozycyjne) stosuje się różne procedury do zaimplementowania operatorów genetycznych. Niezależnie jednak od wybranej metody kodowania stosuje się dwa podstawowe operatory genetyczne: krzyzowanie i mutację. W przypadku klasycznych algorytmów genetycznych, gdzie operuje się na ciągach binarnych obydwie te operacje również przeprowadzane są na konkretnych bitach lub ciągach bitów.

Krzyzowanie jest procedurą, która na podstawie chromosomów rodzicielskich tworzy chromosomy potomne wymieniając fragmenty łańcuchów binarnych. W najbardziej typowym przypadku z populacji rodzicielskiej losowane są dwa chromosomy. W następnym kroku losowane jest miejsce przecięcia łańcuchów binarnych (locus) i następuje wymiana łańcuchów binarnych od miejsca przecięcia pomiędzy chromosomami (rysunek 2.3), wskutek czego powstają dwa nowe chromosomy. Jest to najprostszy, klasyczny wariant krzyzowania, w którym z dwóch osobników z populacji rodziców powstają dwa osobniki potomne. W zalezności od zaimplementowanej metody liczba rodziców może być różna, podobnie jak liczba osobników potomnych. Mozliwe są również bardziej zaawansowane metody wymiany fragmentów ciągów binarnych, m.in. zwiększenie liczby punktów przecięcia (krzyzowanie wielopunktowe).



Rysunek 2.3 Schemat działania procedury krzyzowania



Rysunek 2.4 Schemat działania procedury mutacji

Mutacja jest operatorem, który modyfikuje pojedynczy chromosom (rysunek 2.4). W przypadku kodowania binarnego procedura przebiega następująco: dla rozważanego chromosomu podejmowana jest decyzja o zajściu mutacji (prawdopodobieństwo zajścia mutacji jest zwykle parametrem programu, parametr ten może podlegać modyfikacji w trakcie jego działania). W przypadku, gdy wybrany chromosom ma zostać poddany mutacji, następuje kolejne losowanie, podobnie jak w procedurze krzyżowania, pozycji (locus) bitu który ma zostać zmieniony i wówczas wartość bitu zmieniana jest na przeciwną.

3 Metoda rozwiązań podstawowych

3.1 Wprowadzenie

Istnieje bardzo wiele fizycznych problemów, które modelowane są przy pomocy równań różniczkowych w zadanym obszarze oraz warunków brzegowych zdefiniowanych na jego brzegu. Takie zagadnienie można zapisać w sposób następujący:

$$Lu(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \text{w obszarze } \Omega, \quad (3.1)$$

$$Bu(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \quad \text{w obszarze } \partial\Omega, \quad (3.2)$$

gdzie L oznacza liniowy operator eliptyczny, B oznacza znany operator różniczkowy, $f(\mathbf{x})$ i $g(\mathbf{x})$ są znanymi funkcjami, \mathbf{x} oznacza dowolny punkt rozważanego obszaru, a $u(\mathbf{x})$ oznacza poszukiwaną funkcję.

Wypracowano wiele metod pozwalających na rozwiązanie takiego zagadnienia. Jedną z takich metod jest metoda rozwiązań podstawowych często oznaczana skrótowo MFS (ang. Method of Fundamental Solutions) lub MRP (skrót nazwy polskiej). Jako że procedura ta należy do metod bezsiatkowych nie wymaga ona dyskretyzacji rozważanego obszaru. W konsekwencji, użycie tej metody może w znaczący sposób skrócić czas obliczeń. Należy również zaznaczyć, że metoda rozwiązań podstawowych jest szczególnym przypadkiem metody kollokacji brzegowej.

3.2 Metoda kollokacji brzegowej

Metoda kollokacji brzegowej może być interpretowana jako wariant metody Trefftza, a więc metody polegającej na tym, iż rozważane równanie różniczkowe jest ściśle spełnione w obszarze, zaś warunki brzegowe spełnione są w sposób przybliżony. Ścisłe spełnienie równania różniczkowego jest możliwe poprzez przyjęcie odpowiednich funkcji próbnych. Metod na przybliżone spełnienie warunków brzegowych jest wiele, w szczególności, w metodzie kollokacji

brzegowej warunek brzegowy spełniany jest poprzez kollokowanie go w wybranych punktach na brzegu obszaru (rysunek 3.1). Metoda kollokacji brzegowej jest metodą analityczno-numeryczną, co pozwala na dalszą analizę otrzymanego rozwiązania, m.in. na jego całkowanie, wyznaczanie wartości numerycznej rozwiązania dla dowolnie wybranego punktu rozważanego obszaru etc.

Przyjmując definicję problemu jak we wzorze (3.1) rozwiązanie można przedstawić w następującej postaci:

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = u_n(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^M c_i \varphi_i(\mathbf{x}), \quad (3.3)$$

gdzie $u_n(\mathbf{x})$ oznacza rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego (3.1), zaś $\varphi_i(\mathbf{x})$ oznacza funkcje próbne spełniające w sposób ścisły równanie jednorodne uzyskiwane z równania (3.1).

Jako że metodę kollokacji brzegowej można traktować jako szczególny przypadek metody ważonych reszt, wobec tego wymaga się spełnienia następującego warunku:

$$\int_{\partial\Omega} \bar{v}_j(\mathbf{x}) [B\hat{u}(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})] d\partial\Omega = 0, \quad \text{dla } j = 1, \dots, M, \quad (3.4)$$

gdzie \bar{v}_j są pewnymi funkcjami wagowymi.

Zakładając, że funkcje wagowe będą w postaci funkcji Diraca:

$$\bar{v}_j(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}), \quad (3.5)$$

gdzie $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ oznaczają punkty kollokacji na brzegu $\partial\Omega$, wówczas warunek brzegowy (3.2) jest spełniony w N punktach na brzegu rozważanego obszaru. Postępując w ten sposób otrzymujemy układ N równań o M niewiadomych c_i . W przypadku gdy różniczkowy operator przedstawiony w równaniu (3.1) jest liniowy powstaje układ równań liniowych o następującej postaci:

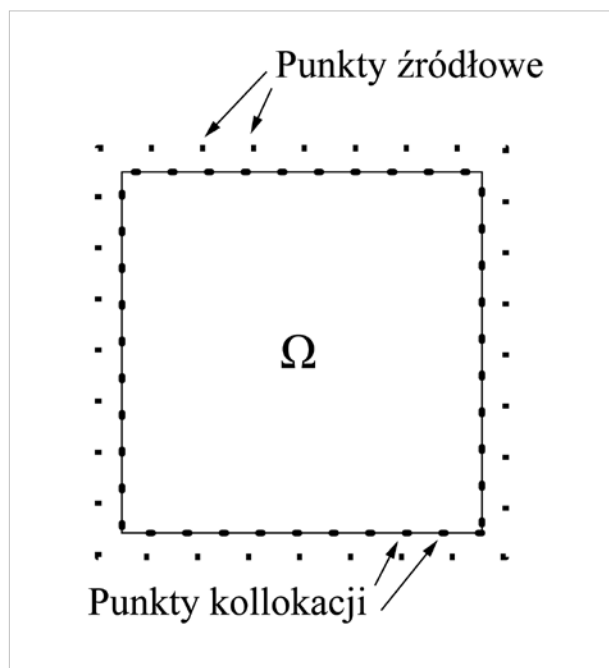
$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{b} \quad (3.6)$$

gdzie $\mathbf{A}=\{a_{ij}\}$, $\mathbf{b}=\{b_j\}$ oznaczają kolejno:

$$a_{ij} = B\varphi_i(\mathbf{x}_j), \quad j = 1, \dots, N, i = 1, \dots, M; \quad (3.7)$$

$$b_j = g(\mathbf{x}_j) - Bu_n(\mathbf{x}_j), \quad j = 1, \dots, N, i = 1, \dots, M. \quad (3.8)$$

W podstawowym wariancie metody kollokacji brzegowej liczba nieznanych stałych c_i dokładnie odpowiada liczbie punktów kollokacji, co oznacza, że $M=N$. Często spotykaną modyfikacją metody kollokacji brzegowej jest sytuacja, w której liczba punktów kollokacji przewyższa liczbę nieznanych współczynników, a zatem $N>M$. W takim przypadku układ liniowych równań (3.6) jest układem nadokreślonym, a metoda nazywana jest metodą kollokacji brzegowej w sensie najmniejszych kwadratów, jako że jej realizacja sprowadza się do zminimalizowania sumy kwadratów błędów spełnienia warunku brzegowego w wybranych punktach kollokacji.



Rysunek 3.1 Rozmieszczenie punktów kollokacji na brzegu obszaru i punktów źródłowych na zewnątrz obszaru

Metoda kollokacji brzegowej polega na spełnieniu w sposób ścisły zadanego układu równań różniczkowych opisujących rozpatrywane zagadnienie w rozważnym obszarze. Jest to niezwykle ważna właściwość tej metody, wymaga ona jednak, aby skorzystać właśnie z takich funkcji próbnych, które spełniają w sposób ścisły rozważane równanie lub układ równań różniczkowych. Jest to cecha wyróżniająca tę metodę, która jest zarówno jej zaletą jak i wadą. Niepodważalnym atutem jest fakt, iż dysponujemy ścisłym rozwiązaniem

równania w całym rozważanym obszarze. Z kolei problematyczne jest to, że nie zawsze można skorzystać z metody kollokacji brzegowej, ponieważ nieznaną funkcji próbnych w zasadzie wyklucza wykorzystanie tej metody. W związku z tym, że dla różnych równań stosuje się różne funkcje próbne, wobec tego powstało wiele opracowań dotyczących układów funkcji próbnych dla pewnych typów równań różniczkowych [Kol2001].

3.3 Rozwiązania podstawowe

Dobierając funkcje próbne możemy również, jeśli to możliwe, skorzystać z rozwiązania podstawowego rozważanego równania różniczkowego. Jak wspomniano powyżej, w takim przypadku mamy do czynienia ze szczególnym przypadkiem metody kollokacji brzegowej określanym nazwą metody rozwiązań podstawowych. W konsekwencji zastosowania tej metody, rozwiązanie problemu opisane jest poprzez liniową kombinację rozwiązań podstawowych, zaś poszczególne funkcje próbne zastosowane w rozwiązaniu różnią się między sobą wyłącznie położeniem punktów osobliwych. Osobliwości rozwiązań podstawowych nazywane zwykle źródłami lub punktami źródłowymi są zlokalizowane na zewnątrz rozpatrywanego obszaru. Podobnie jak dla metody Trefftza, tak i dla metody rozwiązań podstawowych można przedstawić przykłady najpopularniejszych zagadnień ze znanymi funkcjami próbnymi [Kol2001] (rozwiązaniami podstawowymi). Przedstawione zostały one w tabeli 3.1.

Zostało udowodnione i opublikowane w pracach Zielińskiego [Zie1985] i Herrary [Her1980], że spełnienie pewnych założeń prowadzi do tego, że metoda kollokacji brzegowej jest równoważna metodzie Trefftza, jeśli dokona się aproksymacji całek za pomocą przybliżonych wzorów. Z kolei opublikowane niedawno badania dotyczące metody rozwiązań podstawowych przedstawione przez Chena [Che2007] zawierają dowód na matematyczną równoważność metody Trefftza oraz metody rozwiązań podstawowych.

Tabela 3.1 Przykładowe zbiory funkcji próbnych

Rodzaj równania	Zbiory funkcji próbnych
Dwuwymiarowe równanie Laplace'a $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\mathbf{u} = \nabla^2\mathbf{u} = 0$	$\{\ln r_j^2, j = 1,2,3, \dots\}$
Dwuwymiarowe równanie biharmoniczne $\nabla^2\nabla^2\mathbf{u} = 0$	$\{r_j^2 \ln r_j^2, \ln r_j^2, j = 1,2,3, \dots\}$
Dwuwymiarowe równanie Helmholtza $(\nabla^2 + \lambda^2)\mathbf{u} = 0$	$\{iH_o^{(2)}(\lambda r_j), j = 1,2,3, \dots\}$
Dwuwymiarowe zmodyfikowane równanie Helmholtza $(\nabla^2 - \lambda^2)\mathbf{u} = 0$	$\{K_o(\lambda r_j), j = 1,2,3, \dots\}$

W powyższych wzorach na funkcje próbne $r_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}$, natomiast (x_j, y_j) to współrzędne punktów źródłowych, a x i y to dowolne punkty w rozważanym obszarze.

3.4 Punkty źródłowe

Punkty źródłowe są to punkty, w których znajdują się osobliwości rozwiązań podstawowych wykorzystywanych w metodzie rozwiązań podstawowych. Aby uniknąć osobliwości wewnątrz rozpatrywanego obszaru Ω punkty te rozmieszcza poza tym obszarem. Z wyjątkiem umiejscowienia punktów źródłowych na zewnątrz rozważanego obszaru, nie ma żadnych innych szczególnych wymagań, które determinowałyby z góry położenie tych punktów. W wyniku przeprowadzonych badań stwierdzono jednak, że lokalizacja źródeł, jakkolwiek dowolna, nie pozostaje bez wpływu na rozwiązanie. Wręcz przeciwnie, położenie punktów źródłowych może w bardzo dużym stopniu wpływać na jakość otrzymywanego rozwiązania.

W przypadku, gdy rozmieszczenie okaże się niekorzystne, błąd rozwiązania może okazać się nie do zaakceptowania, co mogłoby doprowadzić do wyeliminowania metody rozwiązań podstawowych jako efektywnej metody rozwiązywania danego zagadnienia.

Wielu użytkowników metody rozwiązań podstawowych z uwagi na łatwą implementację tej procedury przyjmuje także założenie o równej liczbie punktów źródłowych oraz punktów kollokacji. Takie podejście prowadzi do układu N równań liniowych z N niewiadomymi. Tego rodzaju rozwiązanie w wielu wypadkach dobrze się sprawdza, jednakże stosunkowo często w takich wypadkach macierz układu jest źle uwarunkowana [Che2008]. W związku z powyższym, jak sugerują autorzy, zamiast skupiać się na szukaniu teorii dowodzącej, że tego typu układ nie jest osobliwy lub na stosowaniu innych technik wspomagających rozwiązanie takiego zagadnienia, właściwsze wydaje się przyjęcie założenia o nierozwiązywalności takiego układu. Zamiast rozwiązywać układ $N \times N$ należy przyjąć większą liczbę punktów kollokacji, a następnie rozwiązać nadokreślony układ równań w sposób przybliżony, zwykle z zastosowaniem wspomnianej wcześniej procedury minimalizacji metodą najmniejszych kwadratów [Smy2006]. W pracy zwrócono również uwagę na fakt, iż bezzasadne jest rozmieszczenie punktów źródłowych w bardzo dużej odległości od rozważanego obszaru, jako że z zasady nie powinno to prowadzić do poprawy wyników. Stwierdzono, że w ogólnym przypadku dalekie umiejscowienie punktów źródłowych daje rozwiązanie w najlepszym razie porównywalnie dobre, a zwykle gorsze niż w przypadku rozmieszczenia punktów źródłowych w pobliżu obszaru. Możliwe jest również rozważenie układu w którym punktów źródłowych jest więcej niż punktów kollokacji [Smy2009].

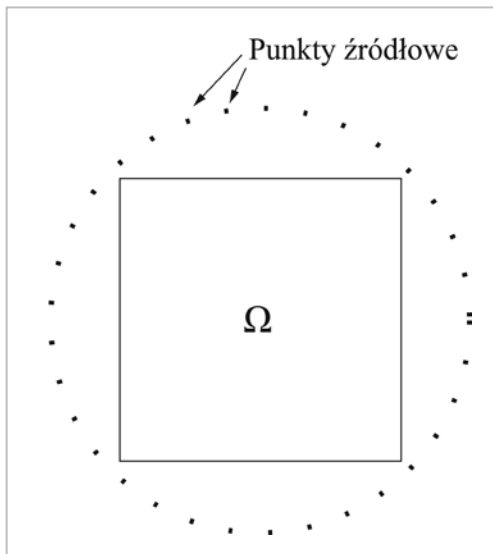
Wielu autorów zwraca uwagę na kwestię położenia punktów źródłowych podkreślając, w jak istotny sposób wpływa ono na rozwiązanie problemu. Niestety, wraz ze wskazaniem istotności tego zagadnienia autorzy podkreślają inny bardzo istotny fakt: nie jest znana dotychczas żadna metoda pozwalająca na określenie optymalnego położenia punktów źródłowych. Niektóre publikacje [Alv2009] dotyczące metody rozwiązań podstawowych zawierają niekiedy informacje dotyczące wpływu położenia punktów źródłowych na jakość rozwiązania, a wśród

najnowszych opublikowanych badań znajdują się nawet takie, które w całości poświęcone są analizie tego problemu. Do tej pory jednak kwestia ta nie została rozwiązana. W opublikowanych artykułach analizowane są wybrane przypadki, najczęściej są to proste dwuwymiarowe kształty geometryczne (koło, kwadrat) dla wybranych zagadnień brzegowych, a sformułowane wnioski stanowią wskazówki dotyczące pewnego zakresu odległości od obszaru, w obrębie którego powinny znaleźć się źródła.

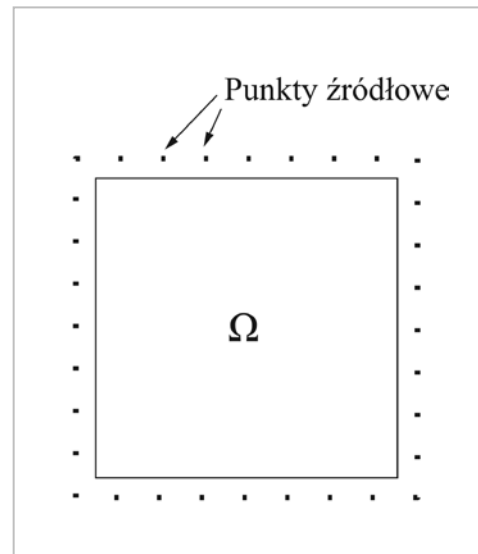
Ponieważ nie istnieje skuteczna metoda pozwalająca na optymalne rozmieszczenie punktów źródłowych autorzy stosują zwykle jedną z trzech metod, a w praktyce pierwszą lub drugą z wymienionych poniżej.

1. Punkty źródłowe rozmieszczone na okręgu (rysunek 3.2) – podejście to było stosowane szczególnie na etapie, kiedy metoda rozwiązań podstawowych się rozwijała [Bog1985]. Pewnym wariantem tej metody jest przypadek niesymetrycznego rozmieszczenia punktów na okręgu, co powinno zredukować problem złego uwarunkowania macierzy układu.
2. Punkty źródłowe rozmieszczone na konturze podobnym do rozważanego obszaru (rysunek 3.3) – to podejście najczęściej spotykane. Punkty źródłowe rozmieszczane są w ustalonej odległości od brzegu obszaru Ω , a jednocześnie w równych odległościach od siebie. Często spotykaną modyfikacją tej metody jest odejście od stałych odległości pomiędzy punktami źródłowymi znajdującymi się na konturze i zwiększenie ich liczby w otoczeniu osobliwości występujących na brzegu obszaru tj. narożników, nieciągłości warunku brzegowego itp. Inną modyfikacją jest odejście od założenia o zachowaniu wiernego podobieństwa kształtu obszaru oraz konturu punktów źródłowych (przeskalowanie konturu) i zastosowanie odwzorowania konforemnego w celu zdefiniowania konturu na którym znajdują się punkty [Bar2008].
3. Punkty źródłowe rozmieszczone w sposób dowolny (rysunek 3.4) – to podejście jest stosunkowo rzadko spotykane. Zwykle jest ono wykorzystywane w przykładach, kiedy analizowany jest przypadek jednego punktu źródłowego, gdzie optymalizowane jest jego położenie. W praktyce to podejście stosowane jest w przypadku optymalizacji położenia każdego

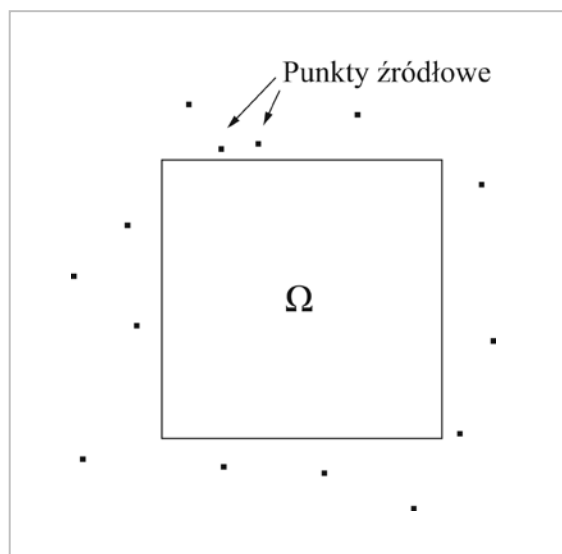
z punktów źródłowych i jest ta metoda jest stosunkowo nowa i najrzadziej spotykana [Nis2003, Mit2004].



Rysunek 3.2 Przykład rozmieszczenia punktów źródłowych na okręgu wokół rozważanego obszaru



Rysunek 3.3 Przykład rozmieszczenia punktów źródłowych na konturze podobnym do rozważanego obszaru (przeskalowany kształt obszaru)



Rysunek 3.4 Przykład dowolnego położenie punktów źródłowych wokół rozważanego obszaru

Drugim aspektem związanym z rozmieszczeniem punktów źródłowych jest kwestia tego, czy położenie punktów źródłowych jest z góry zadane, czy też jest wyznaczane w trakcie obliczeń. W zdecydowanej większości przypadków autorzy stosują pierwszy wariant, definiując z góry pozycje punktów źródłowych. Fakt, że ten sposób jest znacznie bardziej popularny związany jest z tym, że wprowadzenie

do obliczeń współrzędnych punktów źródłowych jako niewiadomych powoduje iż problem staje się z numerycznego punktu widzenia nieliniowy, nawet jeśli pierwotne zagadnienie (zarówno równanie jak i warunki brzegowe) było liniowe, co znacząco utrudnia obliczenia. Innym, stosunkowo często stosowanym rozwiązaniem jest podejście, które składa się z dwóch kroków:

- zmiana położenia punktów źródłowych,
- rozwiązanie zagadnienia.

Kroki te są powtarzane w taki sposób aby po zmianie położenia punktów źródłowych otrzymać lepsze rozwiązanie (obarczone mniejszym błędem spełnienia warunków brzegowych) przy kolejnym obliczeniu rozwiązania. Podejście takie można stosować dla wszystkich trzech wariantów związanych z geometrycznym rozmieszczeniem punktów źródłowych tzn.:

1. w przypadku źródeł rozmieszczonych na okręgu optymalizowany jest tylko promień okręgu;
2. w przypadku punktów rozmieszczonych na konturze podobnym do geometrii zagadnienia optymalizowana jest odległość konturu od brzegów rozważanego obszaru;
3. w przypadku nieregularnego (dowolnego) rozmieszczenia źródeł optymalizowane są wszystkie współrzędne poszczególnych punktów.

Warto dodać, że w przypadku 1 oraz 2, jak już wspomniano powyżej, może zmieniać się także wzajemna odległość pomiędzy punktami. Jest to również związane z optymalizacją położenia źródeł, jako że stwierdzono, iż zwiększenie liczby punktów źródłowych w obszarze osobliwości może wpływać korzystnie na rozwiązanie [Mit2004, Che2008].

4 Metoda elementów skończonych

4.1 Wprowadzenie

Metoda elementów skończonych (MES, ang. FEM – Finite Element Method) jest jedną z najstarszych i najpopularniejszych metod stosowanych do numerycznego rozwiązywania cząstkowych równań różniczkowych. Jest to alternatywna metoda wobec omawianej w poprzednim rozdziale metody kollokacji brzegowej. Podstawowa różnica pomiędzy tymi dwoma metodami związana jest z tym, że w metodzie elementów skończonych rozwiązanie w rozważanym obszarze obliczane jest w sposób przybliżony, a nie jest spełnione ściśle jak w metodzie kollokacji brzegowej. Stosując MES rozważany obszar jest dzielony na podobszary, a następnie równanie jest rozwiązywane w sposób przybliżony dla każdego z tych podobszarów. Pod tym względem jest to metoda podobna m.in. do metody różnic skończonych, metody objętości skończonych oraz innych, w których obszar podlega dyskretyzacji.

Metoda elementów skończonych jest obecnie bardzo często stosowaną metodą. Jej powszechność związana jest przede wszystkim z dwoma aspektami:

- dostępność – istnieje wiele komercyjnych i niekomercyjnych implementacji tej metody;
- możliwość rozwiązywania problemów o bardzo złożonej geometrii.

Matematyczne podstawy metody elementów skończonych można wprowadzić z tych samych założeń co metodę kollokacji brzegowej tj. wyznaczając przybliżone rozwiązanie zagadnienia z wykorzystaniem metody ważonych reszt (metoda ważonych residuów). Metoda ważonych residuów pozwala na przybliżone rozwiązywanie układów równań różniczkowych. Zakładając że rozważany problem jest sformułowany w następujący sposób:

$$Lu(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \text{w obszarze } \Omega, \quad (4.1)$$

$$Bu(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \quad \text{w obszarze } \partial\Omega, \quad (4.2)$$

gdzie L i B oznaczają operator liniowe, $f(\mathbf{x})$ i $g(\mathbf{x})$ są znanymi funkcjami, \mathbf{x} oznacza dowolny punkt rozważanego obszaru, a $u(\mathbf{x})$ oznacza poszukiwaną funkcję. Przybliżone rozwiązanie problemu $u(\mathbf{x})$ może być przedstawione w następujący sposób:

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M a_i \varphi_i(\mathbf{x}), \quad (4.3)$$

gdzie a_i to nieznane współczynniki, zaś $\varphi_i(\mathbf{x})$ oznacza funkcje próbne.

Korzystając ze słabej formy rozwiązania, algebraiczne równanie na nieznane współczynniki można zapisać w następującej formie:

$$\int_{\Omega} v_j(\mathbf{x}) [L\hat{u}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})] d\Omega + \int_{\partial\Omega} \bar{v}_j(\mathbf{x}) [B\hat{u}(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})] d\partial\Omega = 0, \quad \text{dla } j = 1, \dots, M, \quad (4.4)$$

gdzie v_j i \bar{v}_j są funkcjami wagowymi.

Definiując

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = L\hat{u}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}), \quad (4.5)$$

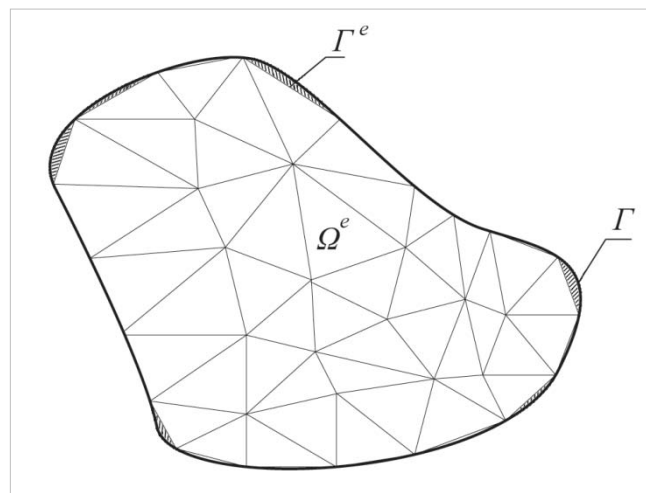
jako resztę (residuum), będącą błędem aproksymacji można minimalizować ten błąd, przez co aproksymacja będzie lepsza, a co za tym idzie rozwiązanie dokładniejsze. Oznacza to, że oczekujemy spełnienia następującego związku:

$$\int_{\Omega} v_j(\mathbf{x}) R(\mathbf{x}, \mathbf{a}) d\Omega = 0 \quad \text{dla } j = 1, \dots, M. \quad (4.6)$$

W przypadku, kiedy jako funkcje wagowe przyjęte zostaną funkcje kształtu $v_j(\mathbf{x}) = N_i(\mathbf{x})$ wówczas otrzymujemy znaną metodę Galerkina.

4.2 Dyskretyzacja

Jak wspomniano na początku rozdziału, cechą charakterystyczną metody elementów skończonych jest dyskretyzacja rysunek (4.1), dlatego przedstawioną procedurę stosuje się nie dla całego obszaru, lecz dla poszczególnych podobszarów Ω^e , na które został podzielony rozważany obszar. Taki podział dokonywany jest zwykle na proste obszary, dla których rozwiązanie zagadnienia jest stosunkowo łatwe. Standardowo w zagadnieniach dwuwymiarowych przyjmuje się elementy trójkątne lub czworokątne. Elementy łączą się ze sobą w węzłach (wierzchołkach elementów) tworząc siatkę. W celu poprawienia dokładności wprowadza się także elementy wyższych rzędów z węzłami pośrednimi, pomiędzy wierzchołkami elementu. Rozwiązując zagadnienie stosowane są określone funkcje wagowe, które w przypadku metody MES nazywane są funkcjami kształtu – służą one do interpolacji rozwiązania wewnątrz elementu. Funkcjami kształtu mogą być dowolne funkcje ciągłe, różniczkowalne, które spełniają warunki brzegowe dla elementu. Często stosowane są do tego celu wielomiany[Zie2000]. Pokrywając obszar siatką należy zwracać uwagę na poprawność odwzorowania geometrii. Wybór elementów o zbyt dużych wymiarach może spowodować powstanie dużego błędu wynikającego z tego, że brzeg elementu nie pokrywa się z brzegiem rozpatrywanego obszaru. Aby zwiększyć dokładność stosuje się siatki o zmiennej wielkości elementów, zagęszczone w okolicach o dużej krzywiźnie, jak również w okolicach nieciągłości.

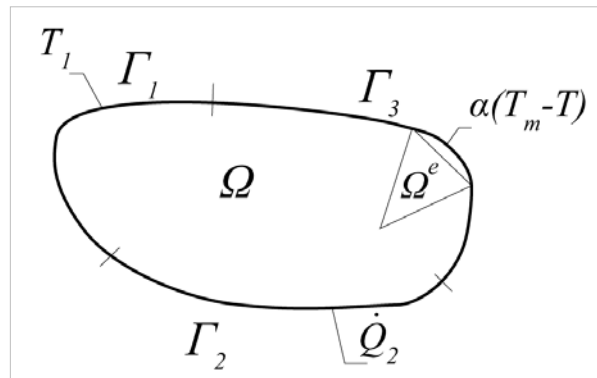


Rysunek 4.1 Podział obszaru na elementy w metodzie MES

4.3 Rozwiązanie dwuwymiarowego ustalonego zagadnienia przewodzenia ciepła metodą elementów skończonych

Zagadnienia ustalonego przewodzenia ciepła przedstawionego na rysunku 4.2 opisane jest następującym równaniem:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \dot{Q} = 0 \quad \text{w obszarze } \Omega. \quad (4.7)$$



Rysunek 4.2 Schemat geometrii i warunków brzegowych

Warunki brzegowe I, II i III rodzaju dla powyższego zagadnienia sformułowane są następująco:

$$T(x, y) = T_1 \quad \text{na brzegu } \Gamma_1, \quad (4.8)$$

$$\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} n_x \right) + \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) = \dot{Q}_2 \quad \text{na brzegu } \Gamma_2, \quad (4.9)$$

$$\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} n_x \right) + \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) = \alpha(T_m - T) \quad \text{na brzegu } \Gamma_3, \quad (4.10)$$

gdzie T_m oznacza temperaturę otoczenia, \dot{Q}_2 to gęstość strumienia ciepła, α – współczynnik wnikania, λ – współczynnik przewodzenia ciepła, n_x i n_y – składowe wektora kierunkowego normalnej do brzegu.

Rozpatrując pojedynczy element należący do obszaru Ω możemy aproksymować rozkład temperatury za pomocą następującej funkcji:

$$T^e(x, y) = \sum_{j=1}^M T_j^e \cdot N_j^e(x, y), \quad (4.11)$$

gdzie M odpowiada liczbie węzłów przyjętego elementu e , T_j^e oznacza temperaturę w węźle j elementu e , N_j^e to funkcja kształtu elementu e . Stosując przedstawioną wcześniej metodę Galerkina, możemy zapisać:

$$\int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial y} \right) + \dot{Q} \right) N_i^e(x, y) dx dy = 0. \quad (4.12)$$

Korzystając z twierdzenia Greena, otrzymujemy następującą zależność:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial x} N_i^e \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial y} N_i^e \right) \right) dx dy = \\ = \int_{\Gamma^e} \left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial x} dy - \lambda \frac{\partial T^e}{\partial y} dx \right) N_i^e. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Przekształcając lewą stronę równania otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial y} \right) \right) N_i^e dx dy = \\ = - \int_{\Omega^e} \left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \lambda \frac{\partial T^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\Gamma^e} \left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial x} dy - \lambda \frac{\partial T^e}{\partial y} dx \right) N_i^e, \end{aligned} \quad (4.14)$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\dot{Q} = \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} n_x \right) + \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right), \quad (4.15)$$

i podstawiając do równania Galerkina otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} \left(\left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right) + \left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) \right) dx dy = \\ = \int_{\Omega^e} \dot{Q} N_i^e dx dy + \int_{\Gamma^e} \left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial x} dy - \lambda \frac{\partial T^e}{\partial y} dx \right) N_i^e. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Uwzględniając warunki brzegowe otrzymujemy:

$$\int_{\Omega^e} \left(\left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right) + \left(\lambda \frac{\partial T^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) \right) dx dy =$$

$$= \int_{\Omega^e} \dot{Q} N_i^e dx dy + \int_{\Gamma_2^e} \dot{Q}_2 N_i^e ds + \int_{\Gamma_3^e} \alpha (T_m - T_1) N_i^e ds,$$
(4.17)

gdzie

$$\dot{Q} ds = \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} n_x ds \right) + \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} n_y ds \right).$$
(4.18)

Wprowadzając do powyższego równania (4.17) zależność (4.11) otrzymujemy:

$$\int_{\Omega^e} \left(\left(\lambda \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \sum_{j=1}^M \left(T_j^e \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \right) \right) + \left(\lambda \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \sum_{j=1}^M \left(T_j^e \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) \right) \right) dx dy =$$

$$= \int_{\Omega^e} \dot{Q} N_i^e dx dy + \int_{\Gamma_2^e} \dot{Q}_2 N_i^e ds - \int_{\Gamma_3^e} \alpha \sum_{j=1}^M (T_j^e N_j^e) N_i^e ds + \int_{\Gamma_3^e} \alpha T_m N_i^e ds.$$
(4.19)

Powyższe równanie można sprowadzić do algebraicznego układu równań postaci:

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f}.$$
(4.20)

W klasycznej metodzie elementów skończonych macierz \mathbf{K} zwykle nazywa się macierzą sztywności, zaś w przypadku zagadnień przewodnictwa ciepła spotyka się również określenie: macierz przewodności. Wektor \mathbf{a} reprezentuje rozwiązanie, zaś \mathbf{f} - wektor obciążeń.

Poszczególne elementy równania macierzowego (4.19) przedstawiają się następująco:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_c^e + \mathbf{K}_{\Gamma_3}^e,$$
(4.21)

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_q^e + \mathbf{f}_{\Gamma_2}^e + \mathbf{f}_{\Gamma_3}^e,$$
(4.22)

gdzie:

$$K_{c,ij}^e = \int_{\Omega^e} \left(\left(\lambda \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \right) + \left(\lambda \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) \right) dx dy, \quad (4.23)$$

$$K_{\Gamma_3,ij}^e = \int_{\Gamma_3^e} \alpha N_i^e N_j^e ds, \quad (4.24)$$

$$f_{q,i}^e = \int_{\Omega^e} \dot{Q} N_i^e dx dy, \quad (4.25)$$

$$f_{\Gamma_2,i}^e = \int_{\Gamma_2^e} \dot{Q}_2 N_i^e ds, \quad (4.26)$$

$$f_{\Gamma_3,i}^e = \int_{\Gamma_3^e} \alpha T_m N_i^e ds. \quad (4.27)$$

5 Optymalizacja położenia źródeł ciepła w dwuwymiarowym zagadnieniu ustalonego przewodzenia ciepła

5.1 Wprowadzenie

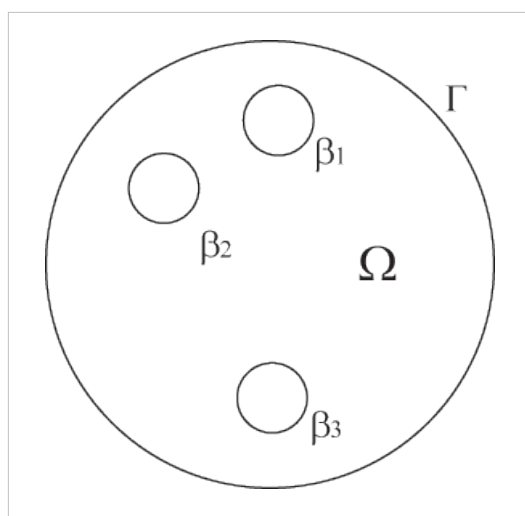
Optymalizacja geometrii konstrukcji jest bardzo ważnym zagadnieniem zarówno z ekonomicznego, jak i technicznego punktu widzenia. Wśród wielu różnych przykładów można wyróżnić m.in. konstrukcje wymienników ciepła: grzejników, pasywnych elementów chłodzących itd. W przypadku tego typu urządzeń kluczowe znaczenie ma takie rozmieszczenie elementów wymiany ciepła, aby urządzenie mogło jak najsprawniej spełniać swoje zadanie przy założonych warunkach. Z reguły oczekujemy od takich układów, że będą zaspokajać określone wymagania dotyczące temperatury, takie jak np. zapewnienie ustalonej średniej temperatury w pewnej przestrzeni lub zapewnienie wymiany odpowiedniej ilości ciepła przez określoną powierzchnię. Niestety optymalizacja geometryczna zarówno w przestrzeni trójwymiarowej, jak i dwuwymiarowej dla zagadnień wymiany ciepła nie jest zadaniem prostym. Właściwe rozmieszczenie elementów wymieniających ciepło z otoczeniem jest względnie proste w przypadku małej ilości elementów, ale problem bardzo szybko się komplikuje w miarę dodawania kolejnych elementów, co wynika z rosnącej ilości obliczeń wymaganych do znalezienia rozwiązania optymalnego lub suboptymalnego (spełniającego założone wymagania).

W niniejszym rozdziale przeanalizowano problem optymalnego rozmieszczenia elementów stanowiących źródła ciepła w dwuwymiarowej przestrzeni. Zagadnienie to zostało wybrane, jako problem pozwalający przetestować skuteczność procedury optymalizacyjnej (zaimplementowany algorytm genetyczny) i wykazać jego przydatność w tego typu zagadnieniach technicznych. Jako funkcję celu przyjęto wartość średniej temperatury w rozważanym obszarze. Algorytm genetyczny został wykorzystany do znalezienia

takiej konfiguracji położenia elementów grzejnych w obszarze, aby średnia temperatura w obszarze była jak najwyższa.

5.2 Geometria analizowanego zagadnienia i warunki brzegowe

Analizowany problem dotyczy dwuwymiarowego obszaru Ω ograniczonego brzegiem Γ , wewnątrz którego zlokalizowanych jest N wyodrębnionych obszarów o brzegach β_1, \dots, β_N . Z geometrycznego punktu widzenia rozważany zatem jest obszar wielospójny, przy czym brzegi β_1, \dots, β_N modelują w tym przypadku brzegi elementów grzejnych w których znajdują się źródła ciepła (rysunek 5.1). Ponieważ rozkład temperatury wewnątrz tych elementów nie jest kluczowy z punktu widzenia omawianego problemu, w związku z powyższym nie przeprowadza się obliczeń dla rozkładu temperatury wewnątrz tych obszarów w celu uproszczenia zagadnienia i przyspieszenia obliczeń numerycznych. Zakłada się, że źródła zapewniają utrzymanie stałej temperatury na brzegach elementów grzejnych.



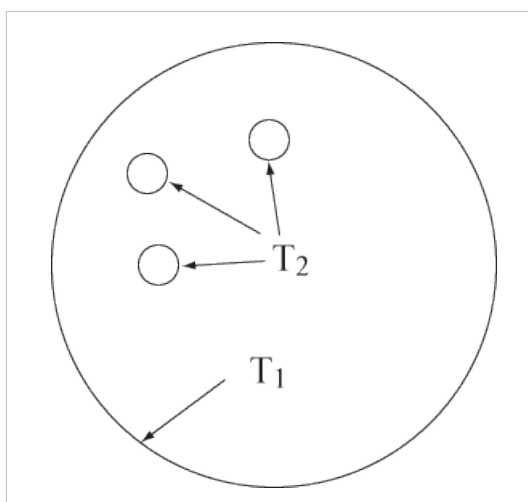
Rysunek 5.1 Przykładowa geometria zagadnienia dla $N=3$

Na brzegu Γ zadana jest stała temperatura T_1 (rysunek 5.2). Bazując na modelowym uproszczeniu pomijającym rozkład temperatury w elementach grzejnych, przyjęto, że na brzegach obszarów β_1, \dots, β_N zdefiniowana jest również stała temperatura, jednakowa dla każdego z tych brzegów o wartości T_2 .

$$T = T_1 \text{ dla brzegu } \Gamma, \quad (5.1)$$

$$T = T_2 \text{ na brzegach } \beta_1, \dots, \beta_N. \quad (5.2)$$

W pracy do wszystkich obliczeń przyjęto, że $T_2 > T_1$, co oznacza że obszar Ω jest ogrzewany, jednakże obliczenia można z powodzeniem przeprowadzić dla dowolnych wartości temperatur zadanych na brzegach, jak również dla innego rodzaju warunków brzegowych. Nie zmieni to jednak istoty analizowanego zagadnienia.



Rysunek 5.2 Warunki brzegowe w rozważanym zagadnieniu

We wszystkich analizowanych przypadkach analizowany obszar jest symetryczny – okrągły lub kwadratowy.

5.3 Równanie rządzące

Rozważany problem można opisać następującym równaniem:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda \nabla T) = Q \text{ w obszarze } \Omega, \quad (5.3)$$

gdzie: T oznacza temperaturę, t – czas, c_p – ciepło właściwe, λ – współczynnik przewodzenia ciepła, a Q – strumień energii przypadający na jednostkę objętości.

Sprowadzając zagadnienie do ustalonego przewodzenia ciepła oraz przyjmując brak wewnętrznych źródeł ciepła w obszarze równanie można zapisać w następującej postaci:

$$\nabla^2 T = 0 \text{ w obszarze } \Omega. \quad (5.4)$$

5.4 Obliczenia numeryczne

Ustalone przewodzenie ciepła w obszarze dwuwymiarowym opisane jest przy pomocy równania Laplace'a (7.3) i rozwiązane przy użyciu metody elementów skończonych zaimplementowanej w pakiecie oprogramowania do modelowania fizycznego Comsol Multiphysics. Oprogramowanie to pozwala na rozwiązywanie wielu różnych zagadnień naukowo-technicznych dających się zamodelować przy pomocy układu cząstkowych równań różniczkowych [Com2007]. Ponadto, oprogramowanie to pozwala na daleko idącą parametryzację rozwiązywanych zagadnień jak również podłączanie własnych procedur napisanych w języku skryptowym (Comsol Scripts) kompatybilnym z językiem oprogramowania wykorzystywanym w pakiecie symulacyjnym Matlab. Co więcej, obydwie pakiety mogą ze sobą współpracować, co zostało wykorzystane przy obliczeniach i symulacjach przeprowadzanych w omawianych zagadnieniach. Rozwiązanie równania opisującego ustalone przewodzenie ciepła jest typowym zagadnieniem, w związku z czym obliczenia zostały przeprowadzone przy standardowych ustawieniach programu. Z kolei optymalizacja rozmieszczenia elementów grzejących (brzezi β_1, \dots, β_N) wykonane zostały w środowisku Matlab przy użyciu procedury implementującej algorytm genetyczny. Procedura została napisana na cele omawianych badań i stanowi załącznik do tej pracy (załącznik 1). Zaimplementowany algorytm jest klasycznym algorytmem genetycznym opartym na kodowaniu zmiennych decyzyjnych za pomocą łańcucha binarnego z wykorzystaniem typowych funkcji krzyżowania oraz mutacji. Podstawy działania algorytmu opisano w rozdziale czwartym tej pracy.

Ponieważ istnieje tak duża liczba możliwych rozwiązań w związku z tym eksperymentalne sprawdzenie tylu możliwości jest niemożliwe a co za tym idzie empiryczne zweryfikowanie procedury również. Biorąc jednak pod uwagę specyfikę zagadnienia (symetria obszaru) można było oczekiwać, że rozwiązanie optymalne również będzie symetryczne. Aby jednak mieć pewność co do skuteczności metody informacja o symetrii świadomie i celowo nie została wykorzystana w obliczeniach. Algorytm genetyczny w każdym przypadku optymalizował położenie każdego z elementów grzejnych traktując obydwie współrzędne (zagadnienie dwuwymiarowe) każdego z elementów, jako zmienne podlegające optymalizacji.

Jak opisano w rozdziale czwartym, w klasycznym algorytmie genetycznym, binarna postać wektora rozwiązania często wiąże się z dyskretyzacją zmiennych. Tak też było w tym przypadku, ze względu na znaczący czas obliczeń przyjęto dokładność obliczeń równą $e=0.001$, podczas gdy wielkość obszaru wynosiła 2 tj. zakres od $\langle -1,1 \rangle$ w obydwu rozpatrywanych kierunkach.

Znając dokładność obliczeń wynikającą z przyjętej dyskretyzacji oraz pole powierzchni obszaru w którym znajdują się potencjalne rozwiązania (rozwiązania dopuszczalne) można określić wielkość przestrzeni rozwiązań, czyli liczbę możliwych konfiguracji ustawienia elementów grzejnych. Wielkość przestrzeni rozwiązań odpowiada liczbie obliczeń, której należałoby dokonać korzystając z procedury pełnego przeszukiwania. Procedura pełnego przeszukiwania pozwala na jednoznaczne znalezienie optymalnego rozwiązania w skończonym zbiorze rozwiązań dopuszczalnych, ponieważ określana jest wartość funkcji celu dla każdej możliwości. Niestety jest to metoda nieefektywna i w większości zagadnień wielowymiarowych nie dająca szans na znalezienie optimum w rozsądnym czasie.

Jak zauważono wcześniej, eksperymentalne potwierdzenie poprawności i skuteczności zaimplementowanej procedury optymalizacyjnej przy pomocy algorytmu genetycznego byłoby bardzo trudne. W związku z tym, wykorzystano metodę pełnego przeszukiwania dla przypadku gdzie przestrzeń rozwiązań była relatywnie mała (mało elementów grzejnych) i porównano z wynikami uzyskanymi z użyciem algorytmu genetycznego.

Zastosowanie procedury pełnego przeszukiwania dla układu 2, 3 oraz 4 elementów grzejnych pozwoliło potwierdzić przypuszczenie dotyczące symetrycznego rozkładu elementów grzejnych w obszarze symetrycznym. Wniosek ten posłużył do wyznaczenia maksymalnej wartości funkcji celu (takiego ułożenia elementów grzejnych, które zapewnia najwyższą średnią temperaturę w rozważanym obszarze), ponieważ do wyznaczania tych wartości w bardziej złożonych przypadkach przyjęto założenie o symetrii rozwiązania, co znacząco zmniejszyło przestrzeń rozwiązań i skróciło czas obliczeń. Wartości maksymalne uzyskane metodą przeszukiwania zostały potraktowane jako wartości referencyjne, służące sprawdzeniu jakości rozwiązań uzyskanych przy pomocy algorytmu genetycznego.

Ponadto, dla każdego rozważanego przypadku wyznaczono również rozwiązanie najgorsze, lub zbliżone do najgorszego. Należy jednakże odnotować, że minimalizacja nie była celem badań w związku z tym konfiguracje odpowiadające najgorszym rozwiązaniom dobierane były w sposób uproszczony i mogą być obciążone pewnym błędem. Rozwiązania te były wyznaczone wyłącznie w celach poglądowych, aby wskazać skuteczność oraz zasadność optymalizacji położenia elementów grzejnych. Dla każdego przypadku wyznaczany był błąd, czyli odchylenie wyniku uzyskanego przy pomocy algorytmu genetycznego od wartości referencyjnej uzyskanej za pomocą procedury przeszukiwania.

Symulacje przeprowadzono dla wielu przypadków obejmujących dwa możliwe obszary (kwadratowy i okrągły) oraz różną liczbę elementów grzejnych. Za każdym razem populacja początkowa (startowa konfiguracja ułożenia elementów) była losowa. W przypadku większej ilości elementów grzejnych przestrzeń rozwiązań była znacząco większa. W związku z tym czas obliczeń był dłuższy, a uzyskiwane wyniki mniej dokładne. Aby poprawić te wyniki, w wybranych przypadkach optymalizacja przeprowadzana była dwukrotnie, przy czym za drugim razem populacja początkowa nie była losowa, konfiguracja początkowa była przyjmowana jako najlepsze rozwiązanie uzyskane w pierwszym cyklu obliczeń.

5.5 Wyniki numeryczne

Do obliczeń przyjęto następujące wartości temperatury:

temperatura na brzegu Γ : $T_1=303\text{K}$,

temperatura na brzegach β_1, \dots, β_N : $T_2=343\text{K}$.

Dla każdego prezentowanego w dalszej części rozdziału przypadku wskazano także parametry algorytmu genetycznego:

- wielkość populacji (liczba chromosomów, czyli możliwych rozwiązań) w każdej iteracji,
- liczba pokoleń która była jednocześnie warunkiem zatrzymania algorytmu.

Dwa powyższe parametry wskazują liczbę iteracji wykonanych przez procedurę optymalizacyjną, co stanowi również bardzo ważny parametr, kiedy porównuje się go do całej przestrzeni rozwiązań, a więc liczby iteracji jaką wykonuje się stosując procedurę pełnego przeszukiwania.

W niniejszym rozdziale temperatura wyrażona została w kelwinach, skorzystano przy tym z następujących oznaczeń:

T_{max} – temperatura referencyjna, najwyższa temperatura wyznaczona dla danego obszaru i liczby elementów,

T_{min} – najniższa temperatura wyznaczona dla danego obszaru i liczby elementów,

T_{ag} – wartość najwyższej temperatury wyznaczonej przez algorytm genetyczny,

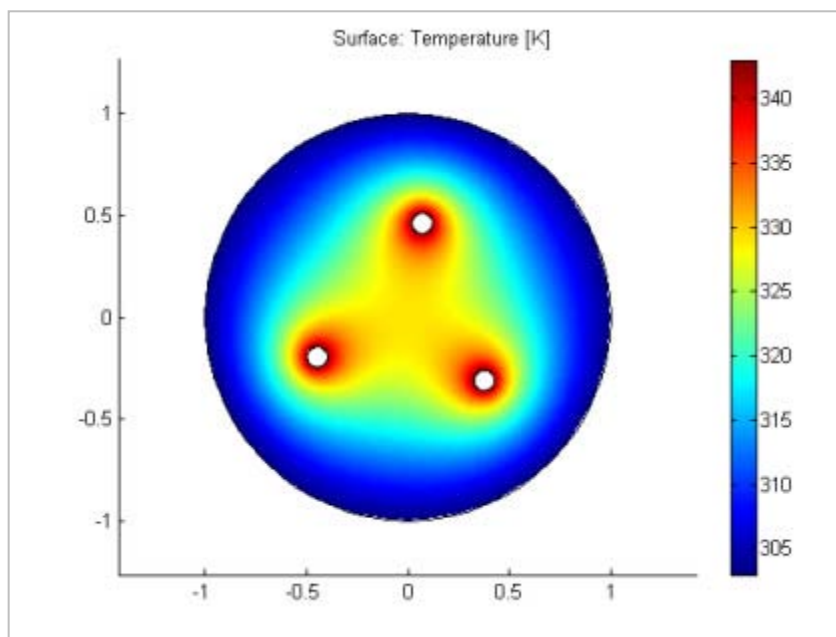
$\Delta T = T_{max} - T_{min}$ – bezwzględna różnica pomiędzy najwyższą i najniższą wyznaczoną temperaturą,

$\Delta T_{ag} = T_{max} - T_{ag}$ – bezwzględna różnica pomiędzy najwyższą wyznaczoną temperaturą, a temperaturą znaną przez algorytm genetyczny,

$errT = \Delta T_{ag} / \Delta T$ – względny błąd rozwiązania znalezione przez algorytm genetyczny.

5.5.1 Wyniki obliczeń dla obszaru okrągłego z trzema elementami grzejnymi - przypadek 1

Wyniki uzyskane dla optymalizacji położenia elementów grzejnych wyznaczone przez algorytm genetyczny dla 3 elementów zestawiono w tabeli 5.1, a konfiguracja elementów przedstawiona została na rysunku 5.3.

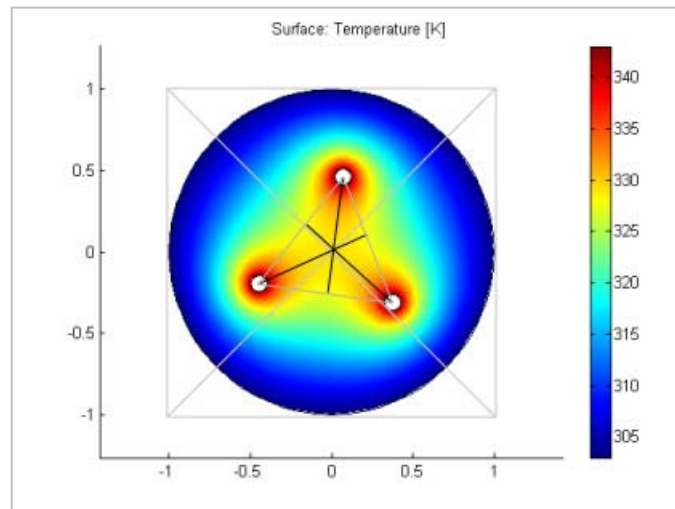


Rysunek 5.3 Konfiguracja 3 elementów dla optymalnego rozwiązania uzyskanego przez AG

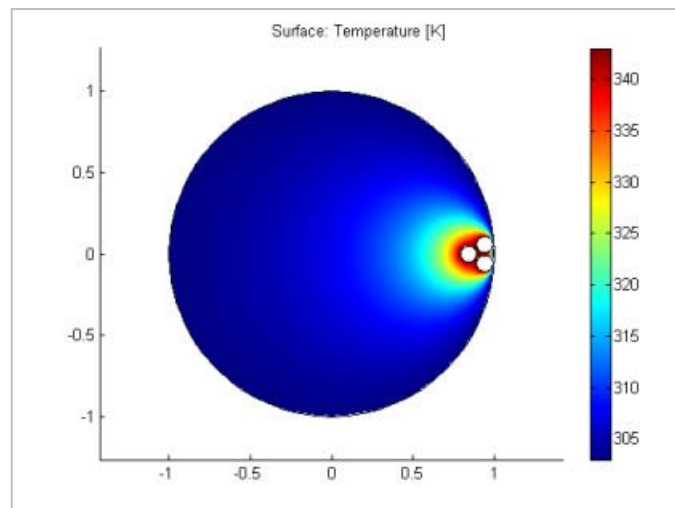
Tabela 5.1 Wyniki uzyskane dla optymalnego rozwiązania wyznaczonego przez AG dla trzech elementów grzejnych w obszarze okrągłym

T_{max}	316,5
T_{min}	306,6
ΔT	9,9
T_{ag}	316,5
ΔT_{ag}	0,001
$errT$	0,0001
$errT [\%]$	0,01%
Liczba chromosomów	40
Liczba pokolenia	500
Liczba iteracji	20000
Przestrzeń rozwiązań	6,4E+19

Jak wspomniano wcześniej, w algorytmie genetycznym nie zaimplementowano informacji o symetrii zagadnienia, jednakże rozwiązanie otrzymane w wyniku działania procedury jest bardzo bliskie symetrii. Aby to lepiej pokazać naniesiono na rysunek odpowiednie linie (rysunek 5.4). Z kolei konfiguracja ułożenia elementów dla której wyznaczono najniższą temperaturę przedstawiona została na rysunku 5.5.



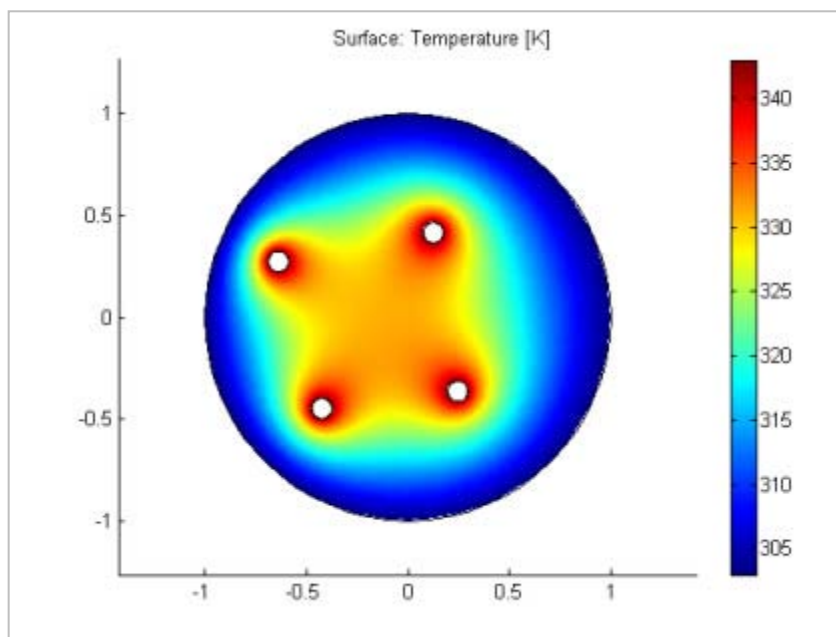
Rysunek 5.4 Wizualizacja odchylenia rozwiązania optymalnego od geometrycznego środka symetrii



Rysunek 5.5 Konfiguracja elementów grzejnych dla najgorszego rozwiązania

5.5.2 Wyniki obliczeń dla obszaru okrągłego z czterema elementami grzejnymi - przypadek 2

W tym przypadku przeprowadzono dwa cykle obliczeń. W pierwszym cyklu populacja startowa była losowa, a wyniki zaprezentowano w tabeli 5.2 oraz na rysunku 5.6.

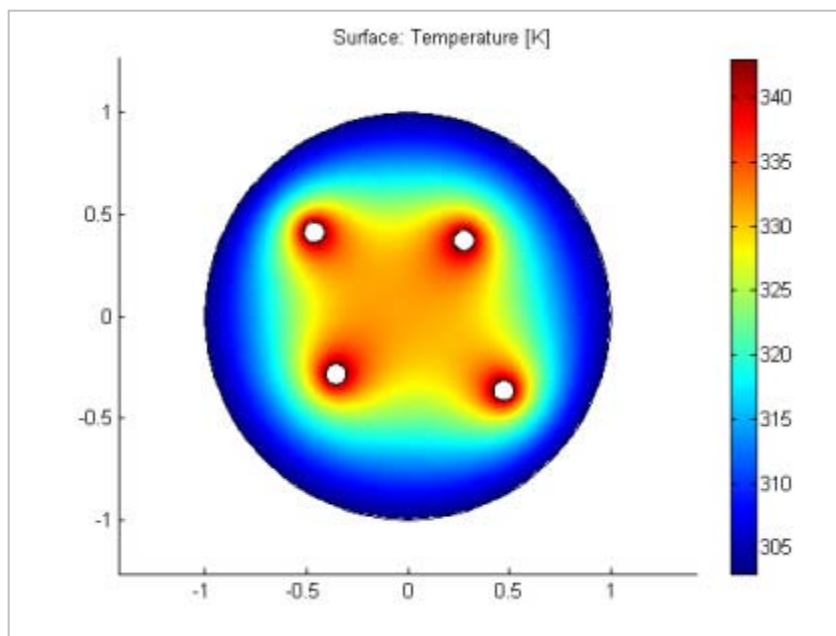


Rysunek 5.6 Konfiguracja 4 elementów dla optymalnego rozwiązania uzyskanego przez AG w pierwszym cyklu obliczeniowym

Tabela 5.2 Wyniki uzyskane dla optymalnego rozwiązania wyznaczonego przez AG w pierwszym cyklu obliczeń dla czterech elementów grzejących w obszarze okrągłym

T_{max}	319
T_{min}	307
ΔT	12
T_{ag}	318,69
ΔT_{ag}	0,31
$errT$	0,026
$errT [\%]$	2,58%
Liczba chromosomów	30
Liczba pokolenia	100
Liczba iteracji	3000
Przestrzeń rozwiązań	2,0E+26

W drugim cyklu obliczeń populacja początkowa była konfiguracją dająca najwyższą wartość funkcji celu w pierwszym cyklu obliczeń. Wyniki przedstawiono w tabeli 5.3 oraz na rysunku 5.7.

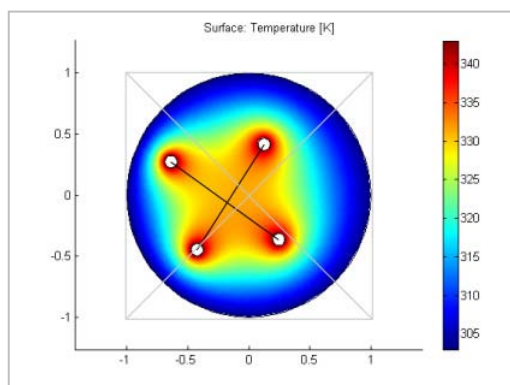


Rysunek 5.7 Konfiguracja 4 elementów dla optymalnego rozwiązania uzyskanego przez AG w drugim cyklu obliczeniowym

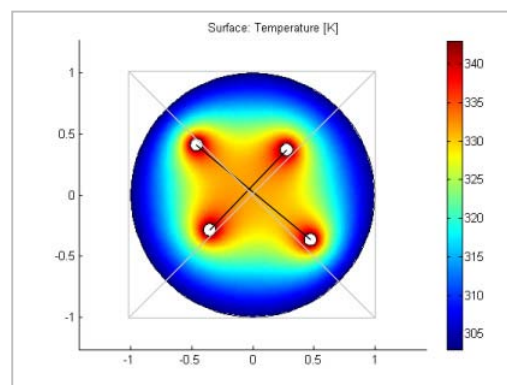
Tabela 5.3 Wyniki uzyskane dla optymalnego rozwiązania wyznaczonego przez AG w drugim cyklu obliczeń dla czterech elementów grzejnych w obszarze okrągłym

T_{max}	319
T_{min}	307
ΔT	12
T_{ag}	318,9
ΔT_{ag}	0,1
$errT$	0,008
$errT [\%]$	0,83%
Liczba chromosomów	30
Liczba pokolenia	100
Liczba iteracji	3000
Przestrzeń rozwiązań	2,0E+26

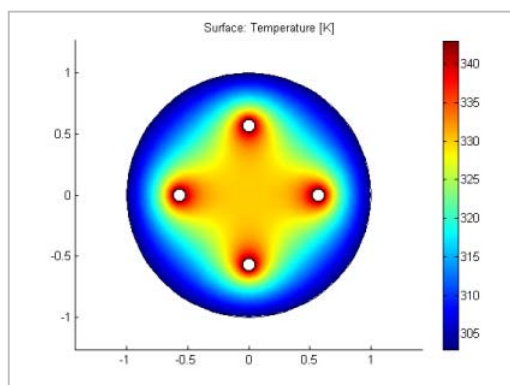
Zestawienie uzyskanych wyników dla 4 elementów grzejnych przedstawiono poniżej. Na rysunku 5.8 przedstawiono wyniki z pierwszego cyklu obliczeń z naniesionymi liniami pozwalającymi lepiej ocenić odchylenie rozwiązania od symetrii. Na rysunku 5.9 pokazano wynik z drugiego cyklu obliczeń, również z liniami pomocniczymi. Na rysunku 5.10 pokazano konfigurację dającą najwyższą temperaturę, zaś na rysunku 5.11 konfigurację dającą temperaturę najniższą.



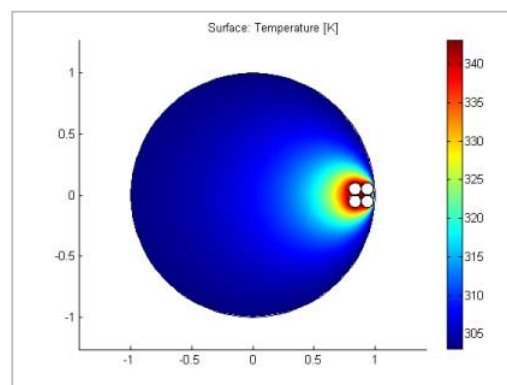
Rysunek 5.8 Rozwiązanie optymalne wyznaczone przez AG po pierwszym cyklu obliczeń



Rysunek 5.9 Rozwiązanie optymalne wyznaczone przez AG po drugim cyklu obliczeń



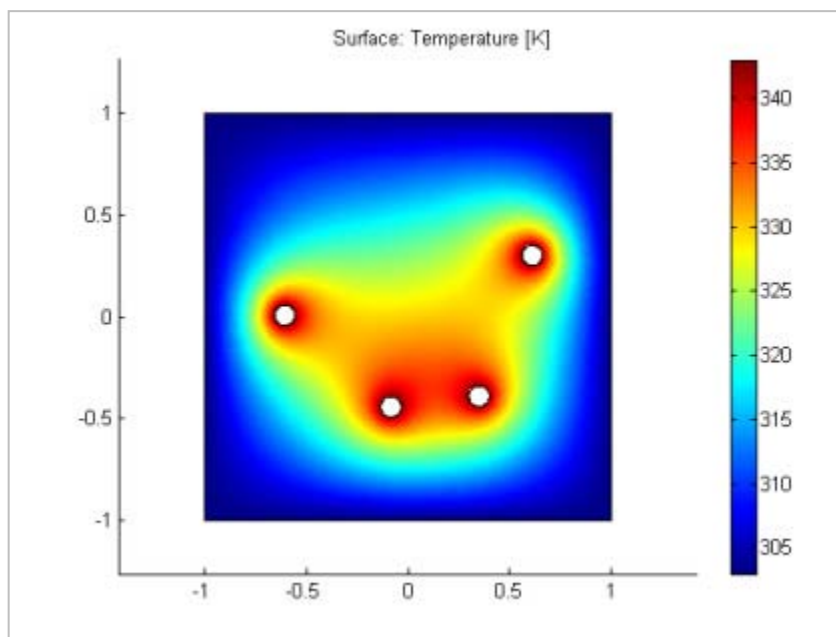
Rysunek 5.10 Rozwiązanie optymalne dla czterech elementów w obszarze okrągłym



Rysunek 5.11 Rozwiązanie najgorsze dla czterech elementów w obszarze okrągłym

5.5.3 Wyniki obliczeń dla obszaru kwadratowego z czterema elementami grzejnymi - przypadek 3

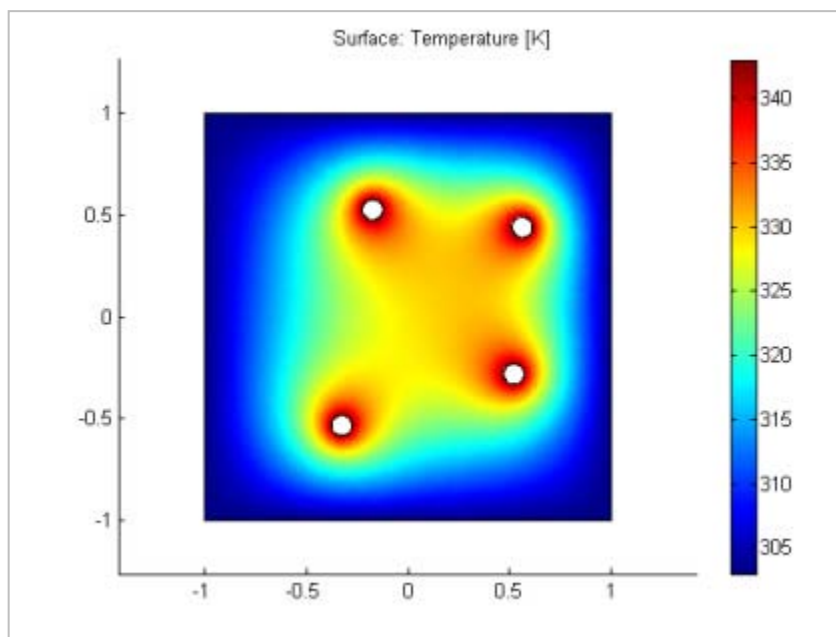
Analizowany jest przypadek podobny do powyższego, jednakże z obliczeniami przeprowadzonymi dla obszaru kwadratowego. W pierwszym cyklu populacja startowa była losowa, a wyniki zaprezentowano w tabeli 5.4 oraz na rysunku 5.12. W drugim cyklu obliczeń populacja początkowa była konfiguracją dającą najwyższą wartość funkcji celu w pierwszym cyklu obliczeń. Wyniki przedstawiono w tabeli 5.5 oraz na rysunku 5.13.



Rysunek 5.12 Konfiguracja 4 elementów dla optymalnego rozwiązania uzyskanego przez AG w pierwszym cyklu obliczeniowym

Tabela 5.4 Wyniki uzyskane dla optymalnego rozwiązania wyznaczonego przez AG w pierwszym cyklu obliczeń dla czterech elementów grzejnych w obszarze kwadratowym

T_{max}	317,8
T_{min}	304,5
ΔT	13,3
T_{ag}	316,77
ΔT_{ag}	1,03
$errT$	0,078
$errT [\%]$	7,7%
Liczba chromosomów	18
Liczba pokolenia	20
Liczba iteracji	360
Przestrzeń rozwiązań	2,56E+26

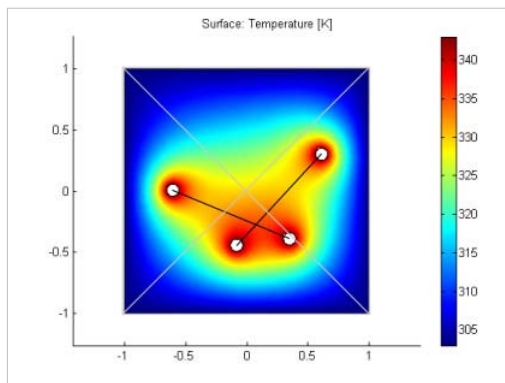


Rysunek 5.13 Konfiguracja 4 elementów dla optymalnego rozwiązania uzyskanego przez AG w drugim cyklu obliczeniowym

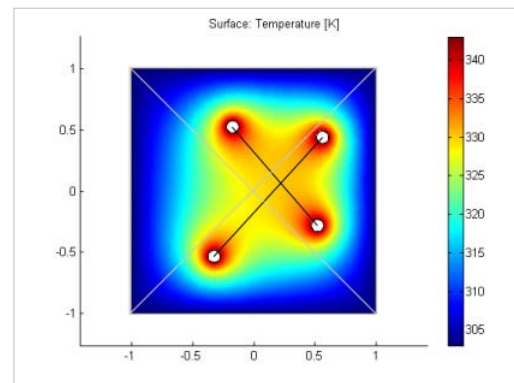
Tabela 5.5 Wyniki uzyskane dla optymalnego rozwiązania wyznaczonego przez AG w drugim cyklu obliczeń dla czterech elementów grzejnych w obszarze kwadratowym

T_{\max}	317,8
T_{\min}	304,5
ΔT	13,3
T_{ag}	317,45
ΔT_{ag}	0,35
$errT$	0,026
$errT [\%]$	2,63%
Liczba chromosomów	18
Liczba pokolenia	30
Liczba iteracji	540
Przestrzeń rozwiązań	2,56E+26

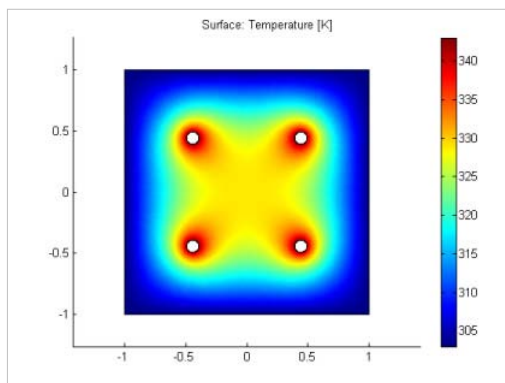
Zestawienie uzyskanych wyników dla 4 elementów grzejnych w obszarze kwadratowym przedstawiono poniżej. Na rysunku 5.14 przedstawiono wyniki z pierwszego cyklu obliczeń z naniesionymi liniami. Na rysunku 5.15 pokazano wynik z drugiego cyklu obliczeń również z liniami pomocniczymi. Na rysunku 5.16 pokazano konfigurację dającą najwyższą temperaturę, zaś na rysunku 4.17 konfigurację dającą temperaturę najniższą.



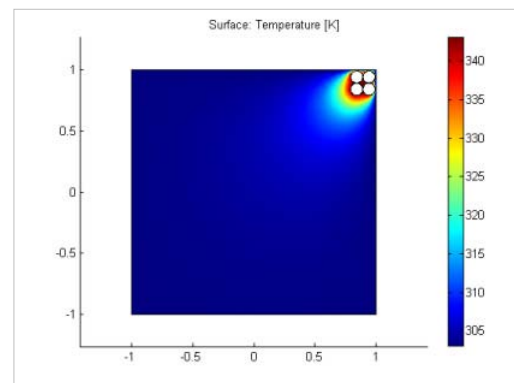
Rysunek 5.14 Rozwiązanie optymalne wyznaczone przez AG po pierwszym cyklu obliczeń



Rysunek 5.15 Rozwiązanie optymalne wyznaczone przez AG po drugim cyklu obliczeń



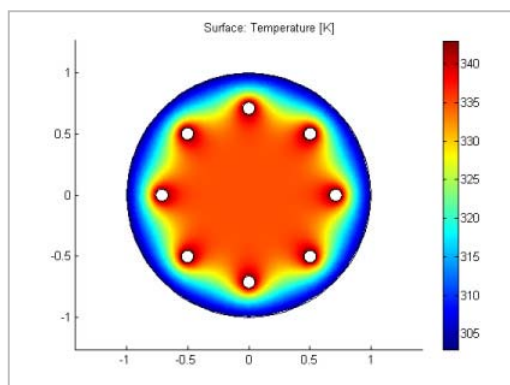
Rysunek 5.16 Rozwiązanie optymalne dla czterech elementów w obszarze kwadratowym



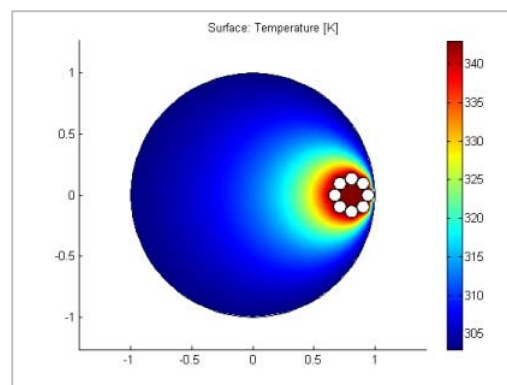
Rysunek 5.17 Rozwiązanie najgorsze dla czterech elementów w obszarze kwadratowym

5.5.4 Wyniki obliczeń dla obszaru okrągłego z ośmioma elementami grzejnymi - przypadek 4

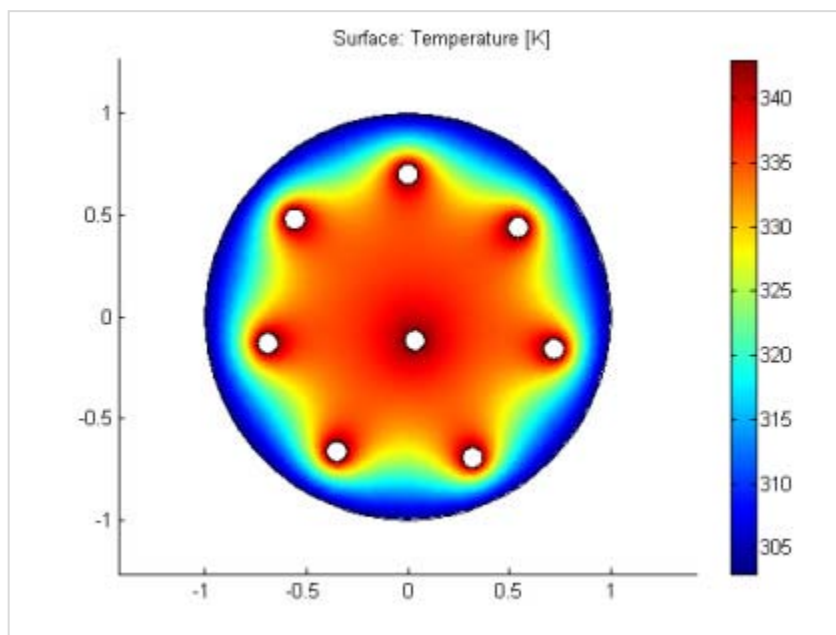
Przeprowadzono także obliczenia dla 8 elementów grzejnych, co daje już olbrzymią liczbę możliwych rozwiązań, w związku z czym zastosowano znacznie większą liczbę iteracji. Rozwiązanie tego zagadnienia jest bardzo ciekawe, ponieważ podobnie jak w innych przypadkach, wyraźnie widoczna jest tendencja do zachowania symetrii rozwiązania. Jednakże symetria ta jest realizowana w inny sposób. W przeciwieństwie do wcześniejszych przypadków, jak również do rozwiązania dającego najwyższą temperaturę, znalezione przez algorytm genetyczny rozwiązanie suboptymalne zawiera element w samym środku obszaru. W istocie jest to cenna informacja ponieważ uzyskane rozwiązanie jest całkiem dobre jakościowo, natomiast wskazuje na nieco odmienny sposób uzyskania tego samego efektu. W tabeli 5.6 i na rysunku 5.20 przedstawiono wyniki dla tego przypadku, zaś na rysunkach 5.18 i 5.19 przedstawiono odpowiednio konfigurację dla najwyższej i najniższej temperatury.



Rysunek 5.18 Rozwiązanie optymalne dla ośmiu elementów w obszarze okrągłym



Rysunek 5.19 Rozwiązanie najgorsze dla ośmiu elementów w obszarze okrągłym



Rysunek 5.20 Rozwiązanie optymalne wyznaczone przez AG dla ośmiu elementów w obszarze okrągłym

Tabela 5.6 Wyniki uzyskane dla optymalnego rozwiązania wyznaczonego przez AG dla ośmiu elementów grzejnych w obszarze okrągłym

T_{max}	326,11
T_{min}	309,5
ΔT	16,61
T_{ag}	325,72
ΔT_{ag}	0,39
$errT$	0,02
$errT [\%]$	2,35%
Liczba chromosomów	40
Liczba pokolenia	300
Liczba iteracji	12000
Przestrzeń rozwiązań	6,55E+52

6 Wyznaczanie pozycji źródeł w metodzie rozwiązań podstawowych

6.1 Wprowadzenie

Istnieje wiele metod numerycznego rozwiązywania układów równań różniczkowych, z których każda posiada określone zalety i wady. Jedną z bardziej popularnych metod jest metoda rozwiązań podstawowych stanowiąca wariant metody Trefftza[Che2007]. Jak wspomniano we wcześniejszych rozdziałach, niewątpliwą zaletą tej metody jest to, że rozwiązanie w sposób ścisły spełnia równanie wewnątrz zadanego obszaru. Nieścisłość metody związana jest z przybliżonym spełnieniem warunku brzegowego, który w tym przypadku jest kolokowany w zadanych punktach na brzegu obszaru. W związku z powyższym skuteczną metodą oceny tej metody jest oszacowanie błędu spełnienia warunku brzegowego.

Przyjęta postać rozwiązania, którą jest liniowa kombinacja rozwiązań podstawowych równania jednorodnego rozważanego zagadnienia, obejmuje także osobliwości rozwiązań podstawowych (źródła), które należy rozmieścić poza rozważanym obszarem. Jakkolwiek umiejscowienie punktów źródłowych poza obszarem może być realizowane w dowolny sposób, to jednak ich położenie wpływa w istotny sposób na jakość otrzymanego wyniku. Również liczba punktów źródłowych może być różna (w skrajnym przypadku punkty źródłowe mogą w ogóle nie być brane pod uwagę, jednakże czyni się tak tylko w celach porównawczych[Che2008]). Zwykle zwiększenie liczby punktów źródłowych wpływa na poprawę jakości rozwiązania, jednakże nie jest to zależność proporcjonalna. Najczęściej stosuje się od kilkunastu do maksymalnie kilkuset punktów źródłowych. Należy jednak pamiętać, że większa liczba punktów źródłowych pogarsza zwykle uwarunkowanie macierzy, jak również jest jednoznaczna z powiększeniem macierzy układu, a co za tym idzie, wydłuża czas obliczeń.

W związku z tym, że położenie punktów źródłowych nie jest w żaden sposób narzucone, autorzy zwykle przyjmują, że punkty te są rozlokowane na okręgu znajdującym się w pewnej odległości od rozważanego obszaru, lub że punkty znajdują się na konturze podobnym do brzegu rozważanego obszaru (zwykle jest to kontur powstający przez przeskalowanie brzegu obszaru).

Pierwotnie stosowano pierwsze z tych podejść, jednakże w wyniku przeprowadzonych eksperymentów numerycznych [Che2008] stwierdzono, że lepsze rezultaty uzyskuje się (błąd metody jest mniejszy), kiedy punkty rozmieszczone są na konturze podobnym (rysunek 3.2, 3.3).

Obydwa podejścia opierają się na założeniu, że pozycja źródeł jest zadana z góry i znana – nie podlega modyfikacjom podczas działania procedury rozwiązującej wybrane zagadnienie. Jest to najczęstsze podejście autorów.

Inną możliwością jest potraktowanie położenia punktów źródłowych jako niewiadomych w taki sposób, aby ich współrzędne również były obliczane w procedurze wyznaczania przybliżonego rozwiązania problemu. Okazuje się jednakże w takim przypadku zagadnienie, które pierwotnie było liniowe, staje się nieliniowe. W rezultacie obliczenia takie są znacznie trudniejsze i długotrwałe, a uzyskane wyniki niekoniecznie lepsze. Przy takim podejściu położenie punktów źródłowych jest dowolne i nieznane do czasu otrzymania wyniku procedury obliczeniowej (rysunek 3.3).

W tej pracy zastosowano algorytm genetyczny w celu optymalizacji położenia punktów źródłowych. Podejście zastosowane w pracy różni się jednak od omawianego powyżej tym, że w tym przypadku algorytm działa dwustopniowo. Najpierw algorytm genetyczny dokonuje rozmieszczenia punktów źródłowych, następnie zaś rozwiązywane jest zagadnienie przy użyciu metody rozwiązań podstawowych. Procedura ta jest powtarzana do czasu spełnienia kryterium zatrzymania, którym w tym przypadku była liczba iteracji. Takie podejście pozwala na uniknięcie problemów związanych z nieliniowością występującą podczas wyznaczania pozycji źródeł wraz z jednoczesnym rozwiązywaniem zagadnienia.

Aby zbadać skuteczność algorytmu genetycznego w omawianych zagadnieniach przeprowadzono dwa eksperymenty numeryczne dla różnych

problemów często spotykanych w mechanice. Pierwsze zagadnienie to zagadnienie opisywane równaniem biharmonicznym, drugie zaś to zagadnienie opisane równaniem Laplace'a z nieciągłością warunku brzegowego, zwane popularnie w literaturze problemem Motza. Do oceny skuteczności wykorzystano funkcję celu zdefiniowaną jako minimum sumy kwadratów błędów spełnienia warunków brzegowych. Biorąc pod uwagę, że zagadnienia są dwuwymiarowe, pozycja każdego z punktów opisywana jest przez dwie zmienne, a co za tym idzie, pozycja każdego z punktów oznacza dwa kolejne wymiary przestrzeni rozwiązań dopuszczalnych. W przypadku wielu punktów optymalizacja tak wielu zmiennych staje się bardzo trudna i czasochłonna. Algorytmy genetyczne jednakże bardzo dobrze sprawdzają się w wyszukiwaniu suboptymalnych rozwiązań w takich wielowymiarowych zagadnieniach, dlatego też, mimo olbrzymiej przestrzeni rozwiązań dopuszczalnych, algorytm genetyczny jest w stanie skutecznie optymalizować takie zagadnienia.

6.2 Zagadnienie biharmoniczne

Równanie biharmoniczne jest wykorzystywane do opisywania takich zagadnień technicznych jak np. ugięcie cienkich płyt, powolny przepływ lepkiego płynu newtonowskiego czy płaskie zagadnienia teorii sprężystości. Jako że równanie to jest spotykane w tak wielu problemach technicznych, w związku z tym istnieje wiele publikacji poświęconych jego rozwiązywaniu. W szczególności są to prace związane z rozwiązywaniem zagadnień biharmonicznych z wykorzystaniem metody rozwiązań podstawowych [Fai1988, Kar1992, Pou1998a, Fad2006, Che2007]. W ogólności zagadnienie to jest zdefiniowane następująco:

$$\nabla^4 u = 0 \quad \text{w obszarze } \Omega, \quad (6.1)$$

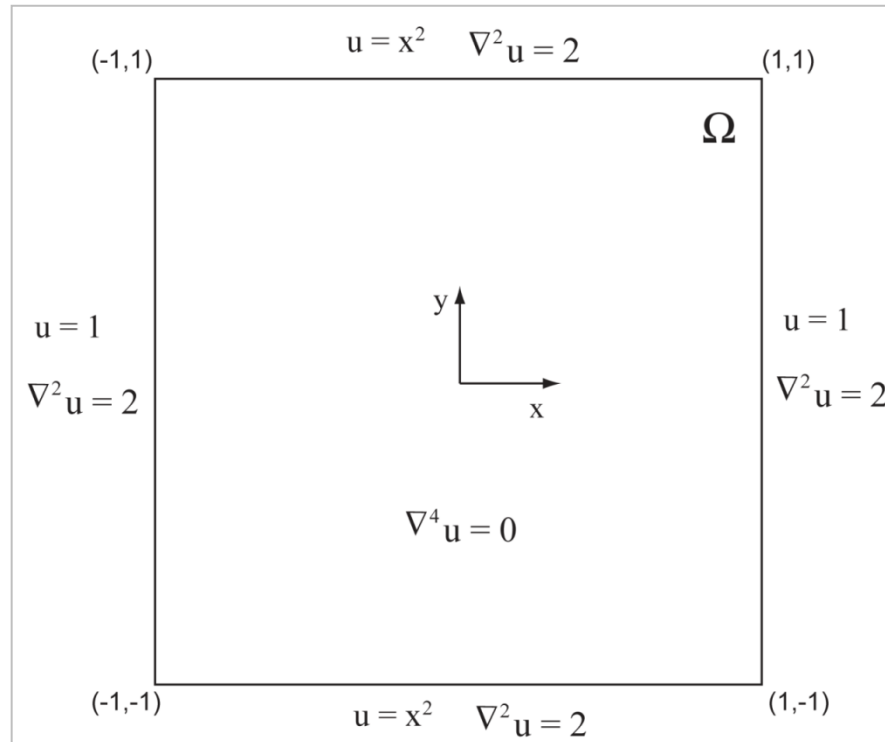
$$u = g_1, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = h_1 \quad \text{na brzegu } \partial\Omega_1, \quad (6.2)$$

$$u = g_2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = h_2 \quad \text{na brzegu } \partial\Omega_2, \quad (6.3)$$

gdzie $\frac{\partial}{\partial n}$ oznacza pochodną w kierunku normalnym do brzegu, g_1, g_2, h_1 , oraz h_2 są zadanymi funkcjami, a u oznacza poszukiwaną funkcję.

6.2.1 Geometria i warunki brzegowe

Geometria obszaru w którym rozwiązywane jest zagadnienie biharmoniczne w tej pracy oraz warunki przedstawione zostały na rysunku 6.4.



Rysunek 6.4 Geometria i warunki brzegowe zagadnienia biharmonicznego

6.2.2 Rozwiązanie równania biharmonicznego

Rozwiązanie powyższego zagadnienia biharmonicznego przy pomocy metody rozwiązań podstawowych przyjmuje postać kombinacji liniowej rozwiązań podstawowych zgodnie z wzorami:

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_1(\mathbf{x}) + \sum_{j=N+1}^{2N} d_j \varphi_2(\mathbf{x}), \quad (6.4)$$

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = \ln r_j^2, \quad (6.5)$$

$$\varphi_2(\mathbf{x}) = r_j^2 \ln r_j, \quad (6.6)$$

$$r_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}, \quad (6.7)$$

gdzie φ_1, φ_2 są odpowiednio rozwiązaniami równania harmonicznego i biharmonicznego, c_j, d_j oznaczają nieznane współczynniki, x i y to współrzędne dowolnego punktu wewnątrz rozważanego obszaru, zaś x_j, y_j oznaczają współrzędne punktów źródłowych.

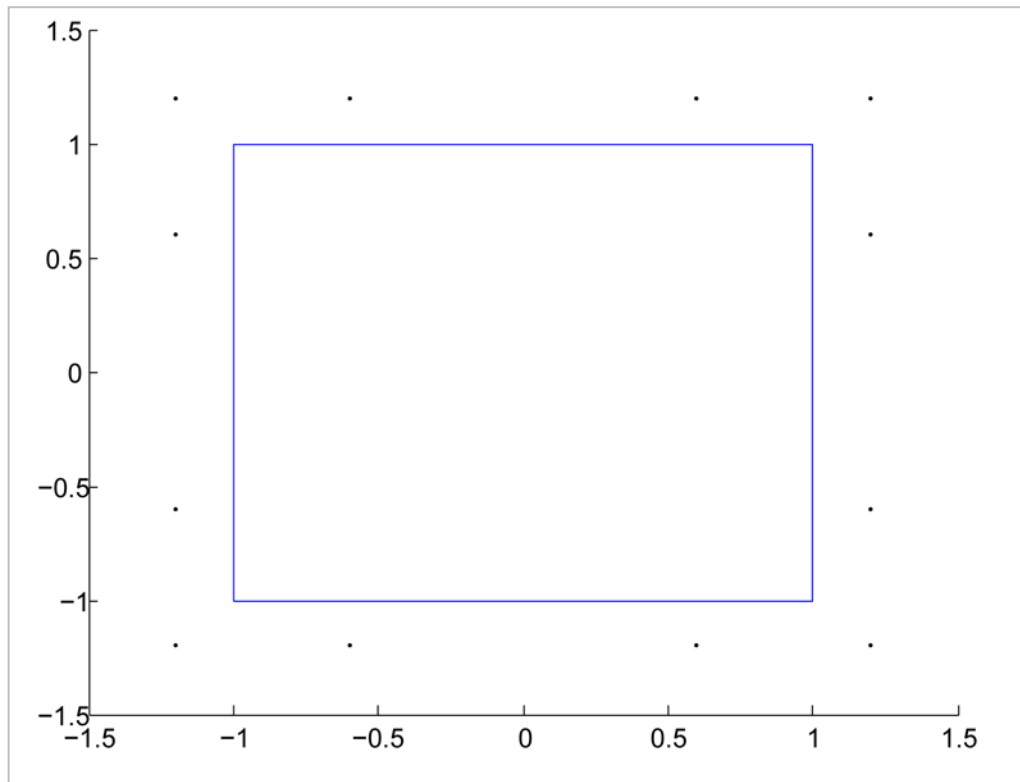
Nieznane współczynniki c_j, d_j są wyznaczone przez spełnienie odpowiednich warunków brzegowych kollokowanych w wybranych punktach brzegu (metoda kollokacji brzegowej). Do obliczeń przyjęto 120 punktów kollokacji $NC=120$ (po 30 punktów na każdym brzegu) oraz 12 punktów źródłowych $NS=12$. Jako że liczba punktów kollokacji jest większa niż liczba punktów źródłowych, układ równań jest nadokreślony, w związku z tym kollokowany warunek brzegowy jest spełniany w sensie najmniejszych kwadratów. Wyniki obliczeń numerycznych przedstawiono w tabeli 6.1. Obliczenia przeprowadzono także dla przykładowego rozmieszczenia punktów źródłowych na konturze podobnym do brzegu rozważanego obszaru i porównano z wynikami otrzymanymi w wyniku optymalizacji algorytmem genetycznym, a następnie porównano otrzymane wyniki. Widać wyraźną poprawę jakości otrzymanych wyników, szczególnie w przypadku maksymalnego błędu spełnienia warunku.

6.2.3 Wyniki numeryczne

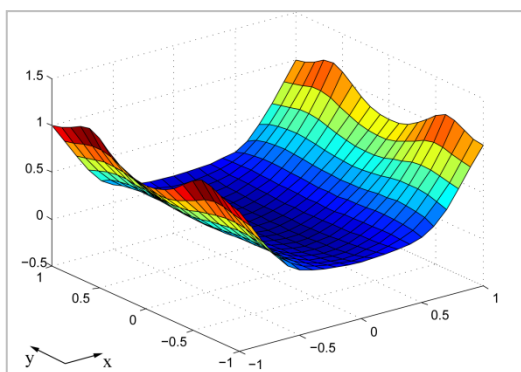
Zagadnienie (6.4)-(6.7) rozwiązane zostało metodą rozwiązań podstawowych z punktami źródłowych na konturze podobnym do rozważanego obszaru. Odległość konturu od rozważanego obszaru wynosiła 0.2, a ich rozmieszczenie przedstawiono na rysunku 6.6. Wykresy przedstawiające rozwiązanie oraz błąd rozwiązania wynikający z przybliżonego spełnienia warunku brzegowego dla punktów źródłowych rozmieszczonych na konturze podobnym do obszaru Ω przedstawiono na rysunkach 6.7 i 6.8 oraz w tabeli 6.1.

Tabela 6.1 Zestawienie wyników obliczeń.

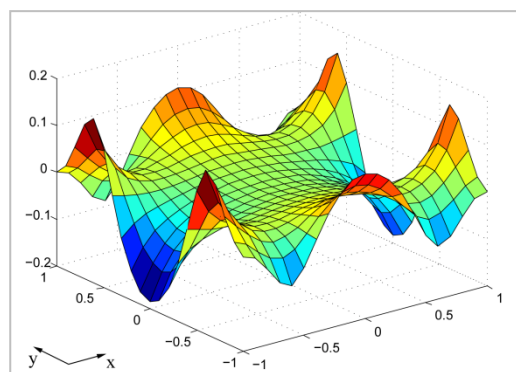
	Punkty źródłowe rozmieszczone przez AG	Punkty źródłowe rozmieszczone na konturze podobnym do brzegu obszaru
Błąd średniokwadratowy spełnienia warunku $\nabla^2 u = 2$	0,0002	0,001
Błąd średniokwadratowy spełnienia warunku $u = 1$	0,0001	0,0004
Globalny maksymalny błąd spełnienia warunku $\nabla^2 u = 2$	0,035	0,18
Globalny maksymalny błąd spełnienia warunku $u = 1$	0,012	0,06



Rysunek 6.6 Rozmieszczenie punktów źródłowych wokół rozważanego obszaru.
Punkty źródłowe rozmieszczone na konturze podobnym do brzegu obszaru

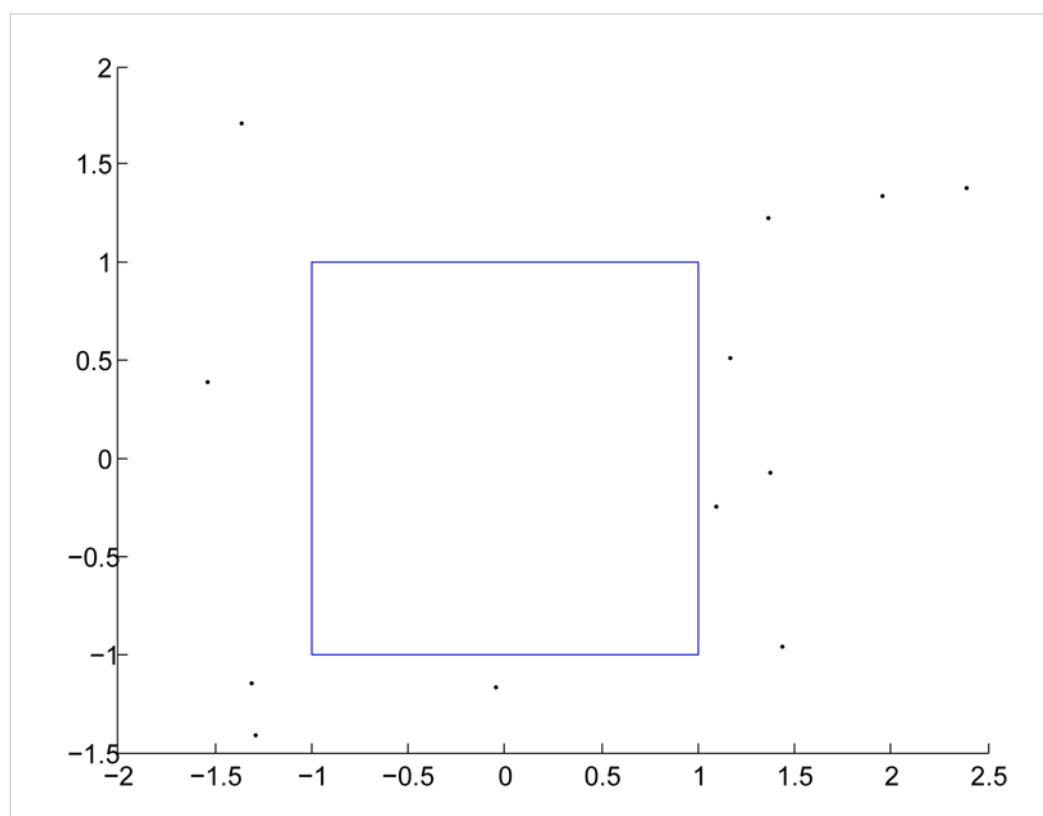


Rysunek 6.7 Wykres rozwiązania



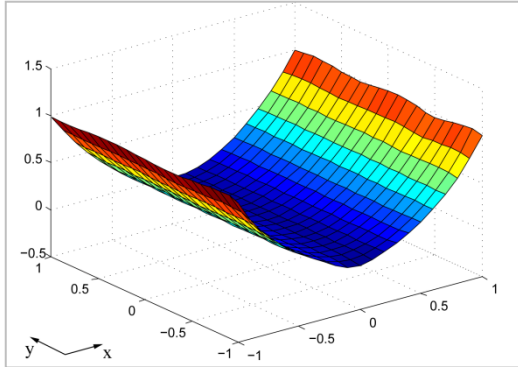
Rysunek 6.8 Wykres błędu rozwiązania wynikający z niespełnienia warunku brzegowego

Wykres rozmieszczenia punktów źródłowych wyznaczony przez algorytm genetyczny (rysunek 6.9) przedstawiono poniżej. Do obliczeń przyjęto, że punkty źródłowe powinny znaleźć się w określonym obszarze – czterokrotnie większym od rozważanego. Położenie punktów źródłowych wyznaczane było z dokładnością $e=10^{-3}$.

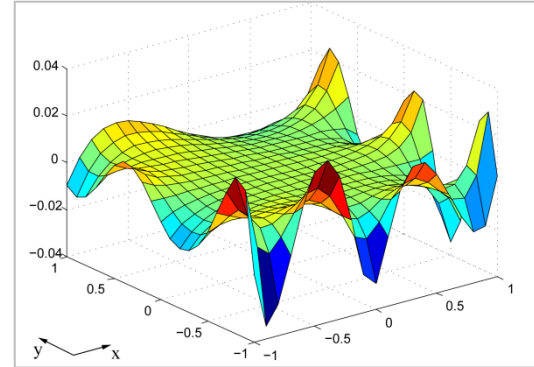


Rysunek 6.9 Rozmieszczenie punktów źródłowych przez algorytm genetyczny.

Wykresy ilustrujące rozwiązanie i błąd rozwiązania otrzymany przy punktach źródłowych rozmieszczonych przez algorytm genetyczny przedstawiono poniżej (rysunek 6.10 i 6.11), a wyniki błędów zestawiono w tabeli 6.1.



Rysunek 6.10 Wykres rozwiązania



Rysunek 6.11 Wykres błędu rozwiązania wynikający z niespełnienia warunku brzegowego

6.3 Zagadnienie Motza

Zagadnienie Motza to problem, który jest bardzo często wykorzystywany jako przykład do testowania poprawności i efektywności metod numerycznych. Trudność tego przypadku polega na osobliwości, która występuje na jednym z brzegów i wynika z nieciągłości warunku brzegowego. Z tego powodu zagadnienie to jest przedmiotem wielu prac i wykorzystywane jest do sprawdzenia poprawności implementowanych metod [Fai1998, Li2000, Li2004a, Li2004b, Ber2009]. Równanie rządzące oraz warunki brzegowe opisujące to zagadnienie są następującej postaci:

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{w obszarze } \Omega, \quad (6.8)$$

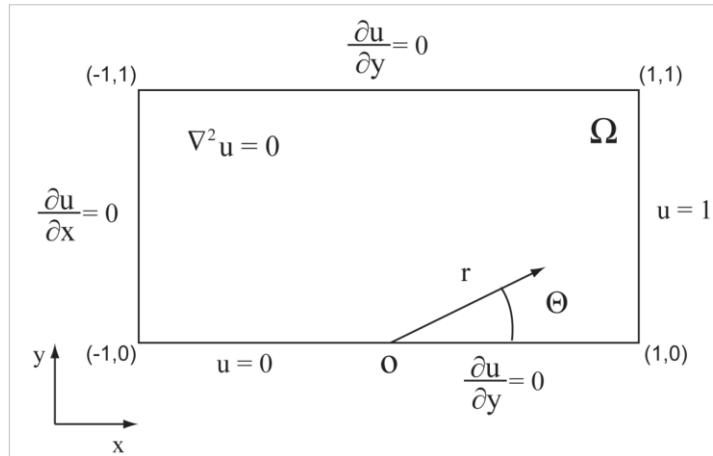
$$u = g \quad \text{na brzegu } \partial\Omega_1, \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = h \quad \text{na brzegu } \partial\Omega_2, \quad (6.10)$$

gdzie $\frac{\partial}{\partial n}$ oznacza pochodną w kierunku normalnym do brzegu, g i h są zadanymi funkcjami, a u oznacza poszukiwaną funkcję.

6.3.1 Geometria i warunki brzegowe

Geometria zagadnienia Motza oraz zadane warunki brzegowe przedstawione zostały na rysunku 6.12.



Rysunek 6.12 Geometria i warunki brzegowe w zagadnieniu Motza

6.3.2 Rozwiązanie

Rozwiązanie problemu Motza składa się z dwóch części, co jest spowodowane przez osobliwość występującą na jednym z brzegów. Pierwszy człon to liniowa kombinacja rozwiązań podstawowych, podczas gdy drugi opisuje osobliwość. W związku z powyższym rozwiązanie tego zagadnienia jest w postaci [Geo1996]:

$$u_n(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N c_j \ln r_j^2 + \sum_{k=1}^N \alpha_k r^{\left(\frac{2k-1}{2}\right)} \cos\left[\left(\frac{2k-1}{2}\right)\Theta\right], \quad (6.10)$$

a po uproszczeniu

$$u_n(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N c_j \log r_j^2 + \sum_{k=1}^N \alpha_k r^{\beta_k} \cos[\beta_k \Theta], \quad (6.11)$$

gdzie c_j, α_k, β_k to nieznane współczynniki, $r_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}$, x i y to współrzędne dowolnego punktu wewnątrz rozważanego obszaru, x_j i y_j oznaczają współrzędne punktów źródłowych, w których występują osobliwości rozwiązań podstawowych.

Obliczenia przeprowadzono dla 60 punktów koloekacji $NC=60$ oraz 12 punktów źródłowych $NS=12$. Również w tym przypadku przeprowadzono obliczenia zarówno dla punktów źródłowych rozmieszczonych na konturze podobnym do rozważanego obszaru oraz dla punktów rozmieszczonych przez algorytm genetyczny, a następnie wyniki zestawiono w celu porównania.

Występująca na brzegu osobliwość to oczywiście problem z punktu widzenia obliczeń numerycznych.

W trakcie obliczeń okazało się, że niektóre warunki łatwiej spełnić, podczas gdy spełnienie innych jest znacznie trudniejsze. Z tego powodu wprowadzono modyfikację w algorytmie genetycznym i zaimplementowano optymalizację wielokryterialną stosując metodę ważonych sum (2.6), która przypisywała różne wagi błędom spełnienia poszczególnych warunków brzegowych. Dzięki temu algorytm genetyczny stał się wrażliwszy na błędy pojawiające się na brzegach w wyniku nieciągłości i pozwolił na skuteczniejszą optymalizację.

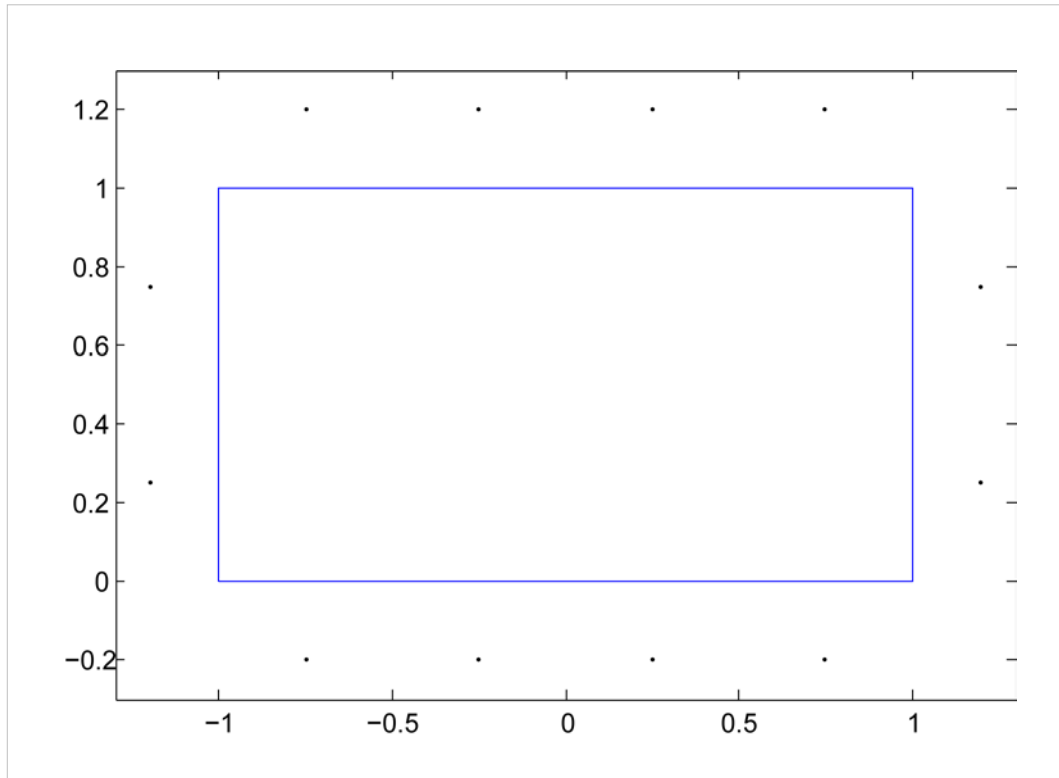
6.3.3 Wyniki numeryczne

W tabeli 6.2 zestawiono wyniki maksymalnych błędów spełnienia warunków brzegowych dla każdego rozważanego odcinka brzegu. Podobnie jak w poprzednim przypadku wyniki otrzymane w obydwu podejściach znacznie się różnią. Zastosowanie algorytmu genetycznego pozwoliło na rozmieszczenie punktów źródłowych w sposób pozwalający na znaczną poprawę jakości wyników – znacznie mniejszy błąd maksymalny spełnienia warunków na poszczególnych brzegach.

Tabela 6.2 Maksymalne błędy spełnienia warunków brzegowych

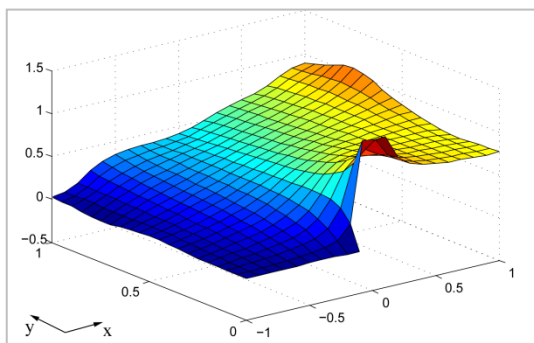
Brzeg		Punkty źródłowe rozmieszczone przez AG	Punkty źródłowe rozmieszczone na konturze podobnym do brzegu obszaru
$-1 < x < 0$	$y = 0$	0,064	0,006
$0 < x < 1$	$y = 0$	0,016	0,014
$-1 < x < 0$	$y = 1$	0,053	0,248
$0 < x < 1$	$y = 1$	0,093	0,348
$x = -1$	$0 < y < 1$	0,065	0,032
$x = 1$	$0 < y < 1$	0,033	0,051

Rozmieszczenie punktów źródłowych na konturze podobnym do geometrii zagadnienia przedstawiono na rysunku 6.13.

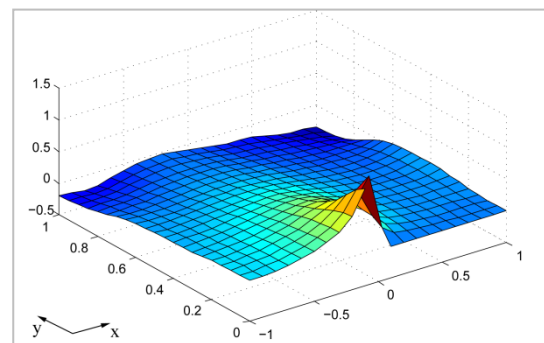


Rysunek 6.13 Rozmieszczenie punktów źródłowych na konturze podobnym do kształtu rozważanego obszaru

Dla takiego rozmieszczenia punktów przedstawiono wykresy funkcji $\frac{\partial u}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial u}{\partial y}$ na rysunkach 6.14 i 6.15.



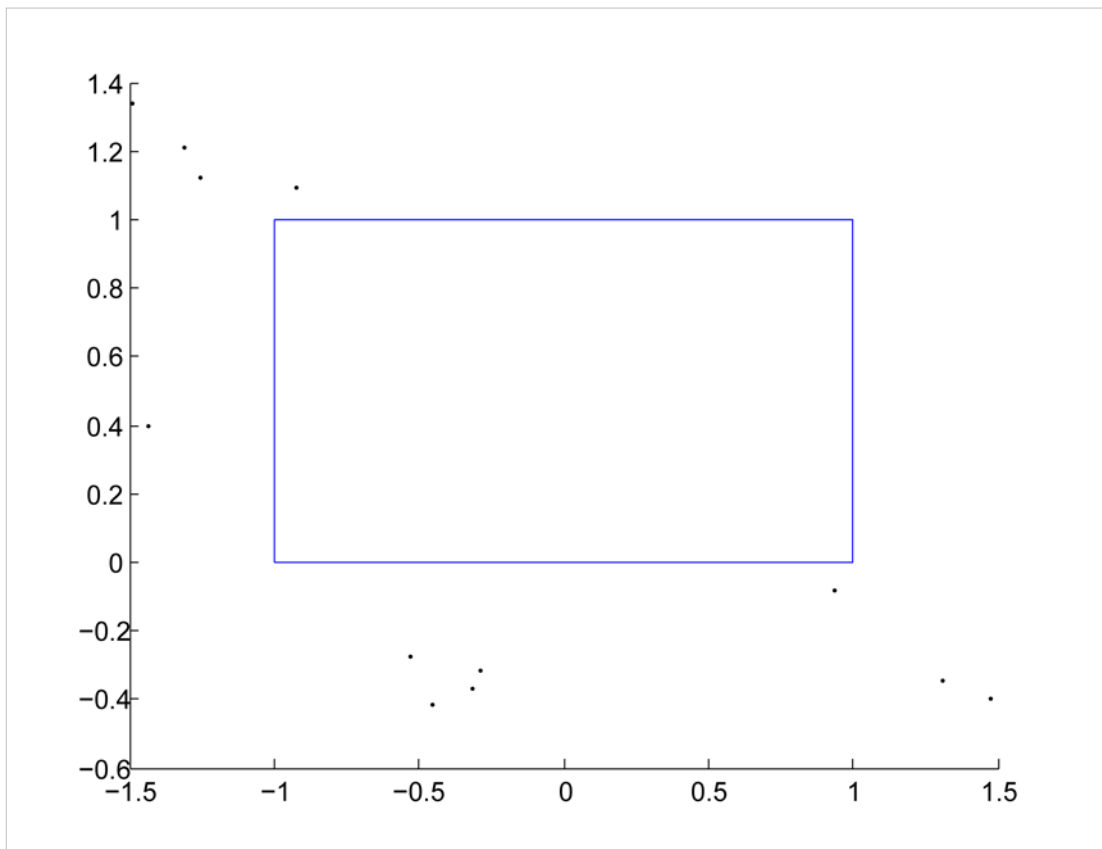
Rysunek 6.14 Wykres $\frac{\partial u}{\partial x}$ dla punktów źródłowych rozłożonych na konturze podobnym



Rysunek 6.15 Wykres $\frac{\partial u}{\partial y}$ dla punktów źródłowych rozłożonych na konturze podobnym

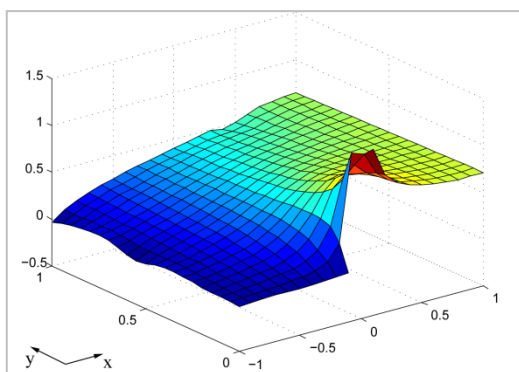
Z kolei rozmieszczenie punktów źródłowych wyznaczone przez algorytm genetyczny przedstawiono poniżej (rysunek 6.16). W tym przypadku również obszar, w którym rozmieszczone zostały punkty źródłowe został ograniczony w taki sposób, że granica obszaru w którym znajdują się punkty źródłowe

odsunięta jest o 2 od brzegu obszaru. Położenie punktów źródłowych wyznaczone było z dokładnością $e=10^{-3}$.

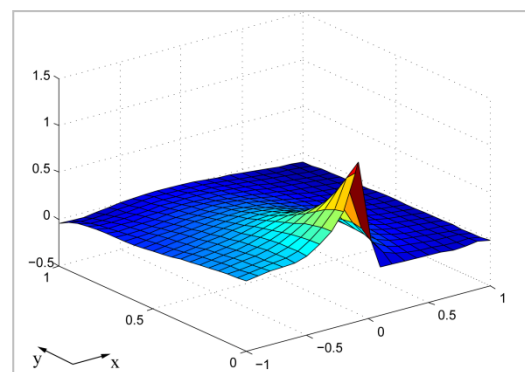


Rysunek 6.16 Rozmieszczenie punktów źródłowych wyznaczone przez algorytm genetyczny

Wykresy tych samych funkcji otrzymane przy punktach źródłowych rozmieszczonych przez algorytm genetyczny (rysunek 6.17 i 6.18):



Rysunek 6.17 Wykres $\frac{\partial u}{\partial x}$ dla wyniku uzyskanego z wykorzystaniem algorytmu genetycznego



Rysunek 6.18 Wykres $\frac{\partial u}{\partial y}$ dla wyniku uzyskanego z wykorzystaniem algorytmu genetycznego

Z przeprowadzonych badań numerycznych wynika, że wyznaczenie suboptymalnego położenia punktów źródłowych przy użyciu algorytmu

genetycznego poprawia jakość wyników w zagadnieniach rozwiązywanych metodą rozwiązań podstawowych. Poszukiwanie rozmieszczenia optymalnego jest niezwykle trudne z powodu wymiarów przestrzeni przeszukiwań potrzebnej dla optymalizacji tak wielu zmiennych, w związku z czym jest racjonalne i uzasadnione, również z praktycznego punktu widzenia, wyznaczanie takiego rozmieszczenia, które jest nieco gorsze od optymalnego, ale jednak zdecydowanie lepsze od rozmieszczenia uzyskiwanego tradycyjną metodą, zaś czas niezbędny do przeprowadzenia obliczeń jest zdecydowanie krótszy.

7 Wyznaczanie efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła w jednokierunkowym włóknistym materiale kompozytowym

7.1 Wprowadzenie

Efektywny współczynnik przewodzenia ciepła λ_e to parametr wyznaczany teoretycznie lub eksperymentalnie dla niejednorodnych materiałów, których składniki posiadają różne współczynniki przewodzenia.

Wyznaczenie efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła w materiale kompozytowym posiada długą historię oraz bogatą literaturę [Kol1989, Fur1997, Tur2005, Lee2006, Zho2008, Jop2010]. Wśród istniejących metod wyznaczania λ_e na drodze teoretycznej można wyróżnić takie, w których układ włókien w kompozycie jest regularny. Drugi przypadek dotyczy całkowicie losowego rozkładu włókien. Zakładając pierwszy z wymienionych przypadków, celem wyznaczenia λ_e rozważa się zwykle elementarną komórkę, w której występuje jedno włókno i oblicza strumień ciepła przez tę komórkę przy wykorzystaniu prawa Fouriera.

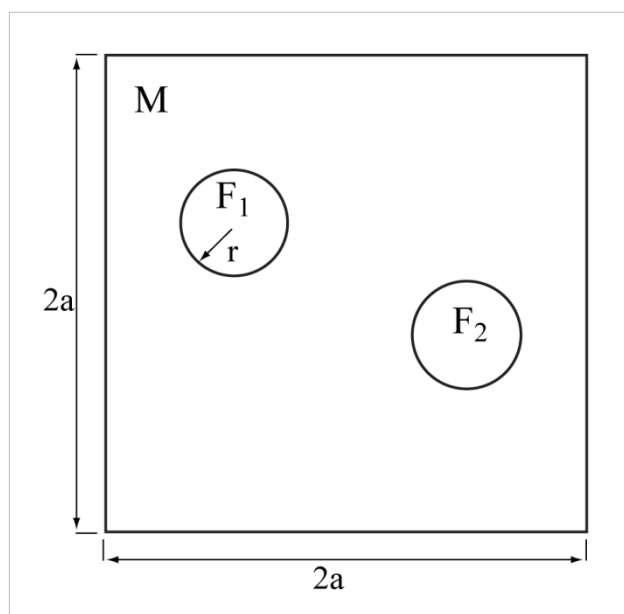
W pracy rozważany jest materiał kompozytowy, w którym włókna ułożone są jednokierunkowo, równoległe względem siebie. W takim przypadku można rozważać płaskie pole temperatury w przekroju kompozytu. Rozważana tutaj jest komórka elementarna, w której występuje kilka włókien; dla takiej komórki wyznaczany jest λ_e . Współczynnik ten zależy od współczynników przewodzenia poszczególnych materiałów składających się na kompozyt (osnowy oraz włókien), objętościowej zawartości włókien oraz ułożenia włókien w kompozycie.

W pracy badany jest wpływ ułożenia określonej liczby włókien w osnowie. Współczynniki przewodzenia tych materiałów jak i ich objętościowy udział w kompozycie są znane. W celu wyznaczenia maksymalnej i minimalnej wartości λ_e wykorzystywany jest algorytm genetyczny. Oprócz wartości maksymalnej

i minimalnej, poszukiwane są także takie ułożenia włókien, które pozwalają na uzyskanie zadanej wartości współczynnika λ_e z pomiędzy zakresu ($\lambda_{e \min}$, $\lambda_{e \max}$).

7.2 Geometria problemu

Model komórki rozważanego kompozytu przedstawiony został na poniższym rysunku (rysunek 7.1).



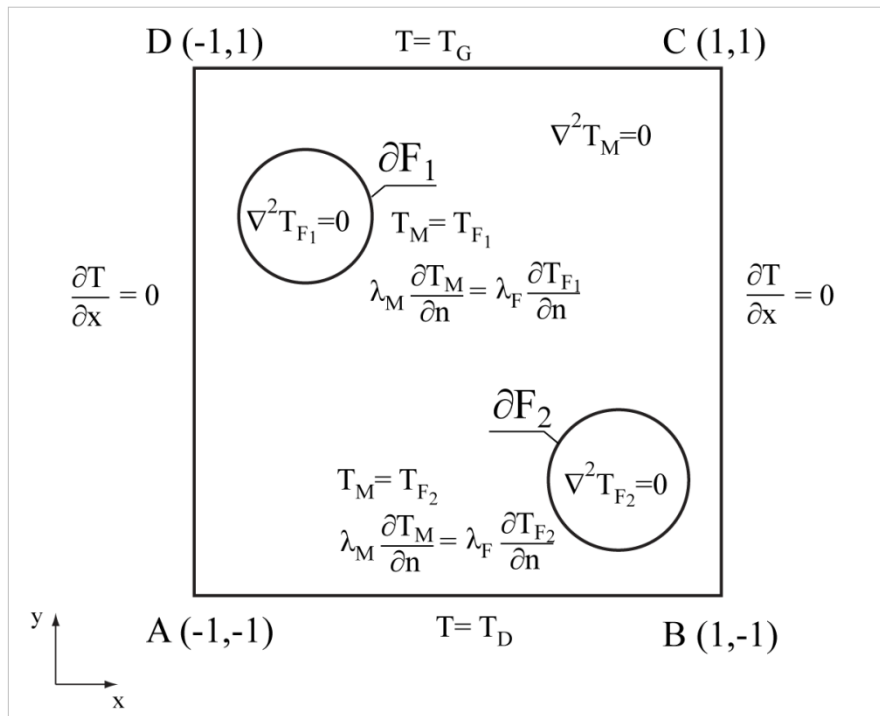
Rysunek 7.1 Schemat idealnej komórki elementarnej przekroju poprzecznego kompozytu włóknistego jednokierunkowego

Zarówno materiał osnowy jak i materiał włókien są jednorodne i izotropowe, charakteryzują się różnymi właściwościami, z których istotne są w tym przypadku współczynniki przewodzenia ciepła. Materiał osnowy M posiada współczynnik λ_M , zaś włókna $F_1 \dots F_N$ (N – liczba włókien) posiadają współczynnik λ_F . Zakłada się, że współczynniki λ_M , λ_F są stałe. Ponadto zakłada się, że stosunek długości włókien do ich średnicy jest na tyle duży, że mogą być one traktowane jako nieskończenie długie, a pomiędzy włóknami i osnową istnieje doskonały kontakt termiczny. Przepływ ciepła jest płaski, ustalony i odbywa się w kierunku prostopadłym do kierunku ułożenia włókien.

7.3 Równanie rządzące i warunki brzegowe

Rozważany przykład (rysunek 7.2) dotyczy ustalonego przewodzenia ciepła w związku z czym zagadnienie może być opisane równaniem Laplace'a zarówno w obszarze osnowy jak i w każdym z włókien zgodnie z poniższym równaniem:

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2} = 0 \quad \text{dla } i = M, F_{1,\dots,N}. \quad (7.1)$$



Rysunek 7.2 Geometria rozważanego zagadnienia oraz warunki brzegowe dla poszczególnych obszarów kompozytu dla dwóch włókien ($N=2$)

Dla rozważanego zagadnienia zdefiniowano następujące warunki brzegowe:

$$\frac{\partial T_M}{\partial x} = 0 \quad \text{na brzegach } x = x_A = -1, x = x_B = 1, \quad (7.2)$$

$$T_M = T_D = 0^\circ\text{C} \quad \text{na brzegu } y = -1, \quad (7.3)$$

$$T_M = T_G = 100^\circ\text{C} \quad \text{na brzegu } y = 1, \quad (7.4)$$

$$T_M = T_F \quad \text{na brzegach } \partial F_N, \quad (7.5)$$

$$\lambda_M \frac{\partial T_M}{\partial n} = \lambda_F \frac{\partial T_F}{\partial n} \quad \text{na brzegach } \partial F_N. \quad (7.6)$$

7.4 Efektywny współczynnik przewodzenia

Strumień ciepła opisywany jest przez prawo Fouriera w następującej postaci:

$$\dot{q} = -\lambda \nabla T \quad (7.7)$$

gdzie \dot{q} oznacza gęstość strumienia ciepła, λ to współczynnik przewodzenia ciepła, T - temperatura. Rozważana komórka jest wycinkiem kompozytu i zakłada się, że przewodzenie ciepła dla całej komórki następuje tylko w jednym kierunku, prostopadłym do osi x co wynika z założonych warunków brzegowych (7.2-7.4). W tym przypadku gęstość strumienia ciepła można opisać wzorem:

$$\dot{q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (7.8)$$

W takim przypadku wartość gęstości średniego strumień ciepła w dowolnie wybranym przekroju komórki (równoległym do osi x), powinna być taka sama dla każdego przekroju, co wynika z założonego kierunku ustalonego przewodzenia ciepła i można ją wyznaczyć w następujący sposób:

$$\dot{q}_s = \frac{\int_{x_A}^{x_B} \lambda \frac{\partial T}{\partial y} dx}{x_B - x_A}, \quad (7.9)$$

Z powyższego, uwzględnivszy stałą wartość temperatury na dolnym i górnym brzegu komórki, można wyznaczyć wartość efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła w rozważanej komórce w postaci:

$$\lambda_e = \frac{\int_{x_A}^{x_B} \lambda \frac{\partial T}{\partial y} dx}{(T_D - T_G)(x_B - x_A)}. \quad (7.10)$$

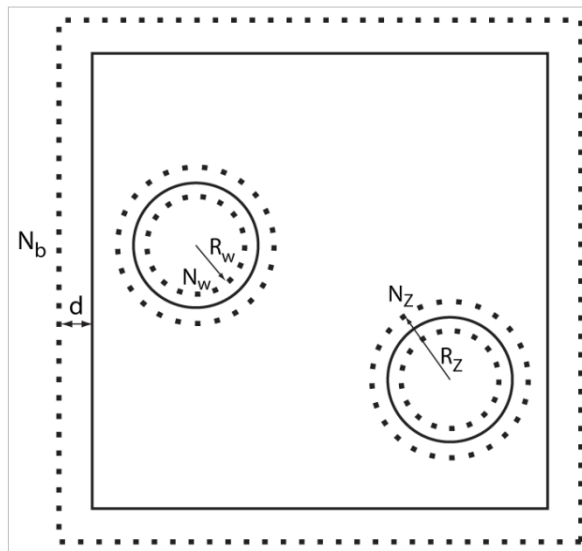
7.5 Rozwiązanie

Zagadnienie rozwiązywano przy zastosowaniu metody rozwiązań podstawowych. W takim wypadku, dla założonej postaci równania rządzącego zakłada się rozwiązanie w postaci liniowej kombinacji rozwiązań podstawowych:

$$T_i = \sum_j c_{ij} \ln r_j^2 \quad \text{dla } i = M, F_1, \dots, N \quad (7.11)$$

gdzie: T_i to temperatura w i -tym obszarze (osnowie lub jednym z włókien), c_{ij} – nieznanne współczynniki, $r_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}$, x i y – współrzędne dowolnego punktu w rozważanym obszarze oraz x_j, y_j – współrzędne punktów źródłowych. Równanie jest rozwiązywane w każdym z obszarów (dla osnowy oraz każdego z włókien). Równanie jest ściśle spełnione w rozważanych obszarach, zaś warunki brzegowe są spełniane w sposób przybliżony poprzez kollokację.

Położenie jak i liczba punktów źródłowych wpływa na jakość rozwiązania, w związku z tym były one również optymalizowane przy pomocy algorytmu genetycznego. Optymalizacja położenia każdego z punktów źródłowych z osobna byłaby nieefektywna przy dużej ilości punktów źródłowych, wobec tego, są one rozłożone na określonych konturach, optymalizowane zaś są parametry tych konturów (rysunek 7.3).



Rysunek 7.3 Rozmieszczenie punktów źródłowych wokół komórki elementarnej rozważanego kompozytu oraz wewnątrz i na zewnątrz włókien kompozytu

7.6 Parametry zastosowanych metod

We wszystkich przykładach przyjęte zostały wartości parametrów metody rozwiązań podstawowych przedstawione w tabeli 7.1, a parametry algorytmu genetycznego przedstawiono w tabeli 7.2.

Tabela 7.1 Parametry metody rozwiązań podstawowych

Oznaczenie	Wartość	Znaczenie
PK_Z	320	liczba punktów kolokacji na brzegu konturu zewnętrznego
PK_W	50	liczba punktów kolokacji na brzegu każdego z włókien
N_B	36	liczba punktów źródłowych na zewnątrz konturu zewnętrznego
N_W	31	liczba punktów źródłowych wewnątrz konturów włókien
N_Z	9	liczba punktów źródłowych na zewnątrz konturów włókien
d	1.0	odległość konturu punktów źródłowych od konturu zewnętrznego osnowy
R_W	0.18	odległość konturu punktów źródłowych od środka włókna
R_Z	6.1	odległość konturu punktów źródłowych od środka włókna

Tabela 7.2 Parametry algorytmu genetycznego

Oznaczenie	Wartość	Znaczenie
N_{pop}	12	wielkość populacji
N_{gen}	40	liczba pokoleń
N_{it}	480	całkowita ilość wykonanych iteracji
e	0.01	dokładność przeszukiwania
Sp_{size}	2.8E+14	liczba możliwych rozwiązań dla 3 włókien przy dokładności e
Sp_{size}	2.8E+19	j.w. dla 4 włókien

7.7 Wyniki numeryczne

7.7.1 Komórka zawierająca 3 włókna $\lambda_M < \lambda_F$, $R=0,25$

W prezentowanym przykładzie optymalizacji materiału kompozytowego w celu uzyskania optymalnej wartości efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła λ_e analizowano materiał kompozytowy składający się z komórek zawierających 3 włókna, przy czym współczynnik przewodzenia ciepła osnowy był mniejszy niż współczynnik przewodzenia ciepła włókien. Parametry materiału przedstawiono w tabeli 7.3. Wykorzystując algorytm genetyczny wyznaczono układ włókien w komórce, dla którego maksymalna wartość $\lambda_e = 0.153$ (rysunek 7.4). Błędy spełnienia warunków brzegowych przedstawiono w tabelach 7.4 i 7.5.

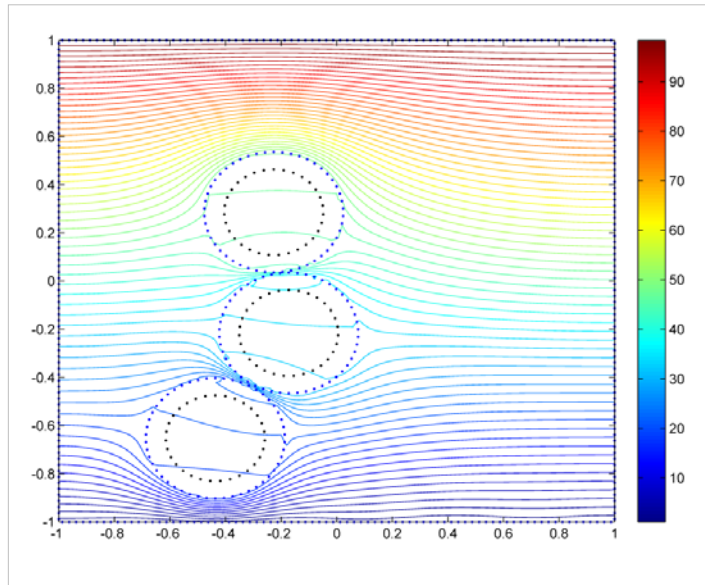
Następnie wyznaczono układ włókien (rysunek 7.5) dla osiągnięcia minimalnej wartości efektywnego współczynnika przewodzenia, którego wartość w tym przypadku wyniosła $\lambda_e=0.123$. Błędy spełnienia warunków brzegowych zestawiono w tabelach 7.6 i 7.7.

Trzecim analizowanym przypadkiem była optymalizacja ułożenia włókien zapewniające uzyskanie efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła jak najbliższego wartości $\lambda_e = 0.13$. W wyniku optymalizacji otrzymano układ włókien (rysunek 7.6) w komórce kompozytu spełniający dokładnie oczekiwania dotyczące wartości efektywnego współczynnika przewodzenia: $\lambda_e = 0.13$. Błędy spełnienia warunków brzegowych dla tego układu zestawiono w tabelach 7.8 i 7.9.

Zarówno w tym jak i każdym kolejnym analizowanym przykładzie analizowane były komórki kwadratowe o szerokości 2cm.

Tabela 7.3 Wartości przyjęte w obliczeniach

Oznaczenie	Wartość	Znaczenie
λ_M	0.1 [W/mK]	współczynnik przewodzenia ciepła osnowy
λ_F	2.0 [W/mK]	współczynnik przewodzenia ciepła włókien
R	0.25 [cm]	średnica włókien
F/M	15%	objętościowy udział włókien w osnowie



Rysunek 7.4 Układ włókien dla osiągnięcia maksymalnej wartości λ_e , $\lambda_M < \lambda_F$, $R=0,25$

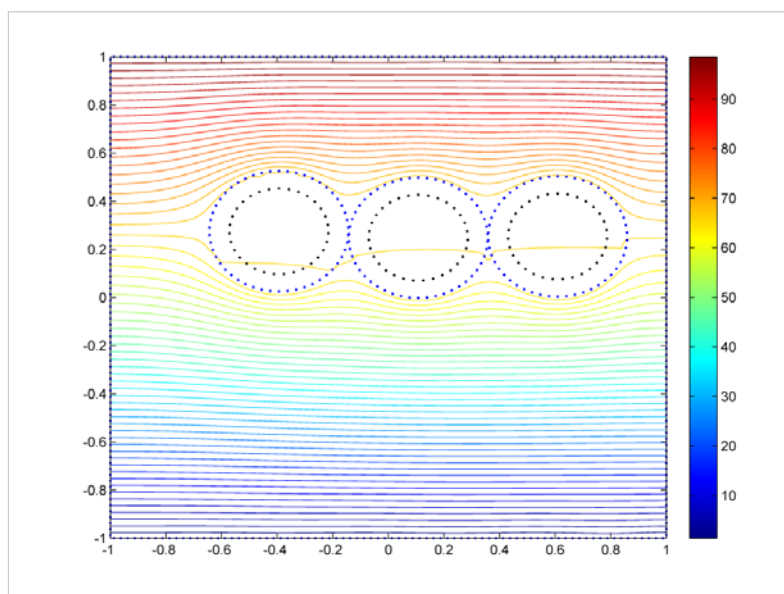
Wartość maksymalna λ_e wyznaczona przez AG wynosi: $\lambda_e=0.153$.

Tabela 7.4 Błędy średniokwadratowe spełnienia warunków brzegowych na brzegach zewnętrznych komórki

Brzeg	$y=-1$	$x=1$	$y=1$	$x=-1$
Warunek	$T_M = T_D$	$\frac{\partial T_M}{\partial y}$	$T_M = T_G$	$\frac{\partial T_M}{\partial y}$
Błąd	0.02	0.005	0.001	0.007

Tabela 7.5 Błędy średniokwadratowe spełnienia warunków brzegowych na styku osnowy z włóknami

Warunek	Brzeg włókna/osnowa	Włókno F ₁	Włókno F ₂	Włókno F ₃
1	$T_M = T_F, \partial F_N$	0.002	0.007	0.01
2	$\lambda_M \frac{\partial T_M}{\partial y} = \lambda_F \frac{\partial T_F}{\partial y}, \partial F_N$	0.002	0.006	7.3E-05



Rysunek 7.5 Układ włókien dla osiągnięcia minimalnej wartości λ_e , $\lambda_M < \lambda_F$, $R=0,25$

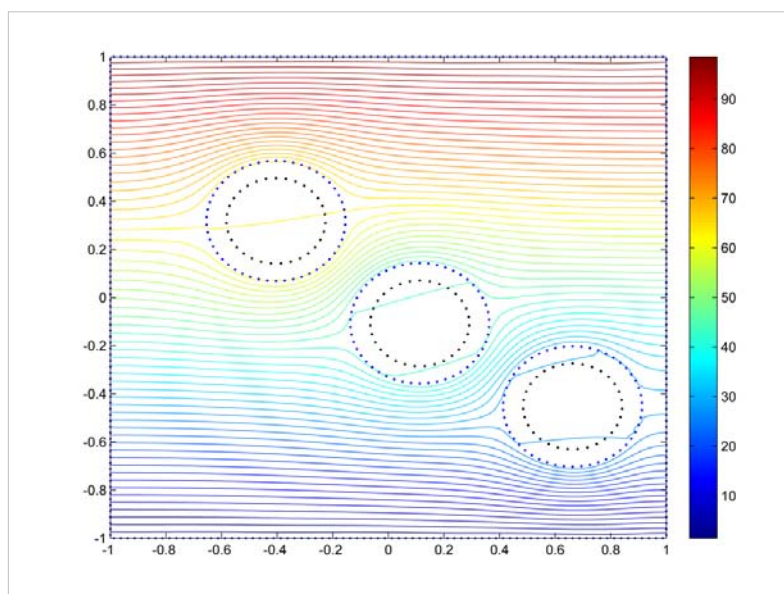
Wartość minimalna λ_e wyznaczona przez AG wynosi: $\lambda_e=0.123$.

Tabela 7.6 Błędy średniokwadratowe spełnienia warunków brzegowych na brzegach zewnętrznych komórki

Brzeg	$y=-1$	$x=1$	$y=1$	$x=-1$
Warunek	$T_M = T_D$	$\frac{\partial T_M}{\partial y}$	$T_M = T_G$	$\frac{\partial T_M}{\partial y}$
Błąd	0.006	0.03	0.004	0.004

Tabela 7.7 Błędy średniokwadratowe spełnienia warunków brzegowych na styku osnowy z włóknami

Warunek	Brzeg włókna/osnowa	Włókno F_1	Włókno F_2	Włókno F_3
1	$T_M = T_F, \partial F_N$	0.0004	0.001	0.001
2	$\lambda_M \frac{\partial T_M}{\partial y} = \lambda_F \frac{\partial T_F}{\partial y}, \partial F_N$	0.0002	0.0007	0.0007



Rysunek 7.6 Układ włókien dla osiągnięcia wartości $\lambda_e=0.13$, $\lambda_M < \lambda_F$, $R=0,25$

Wartość λ_e najbliższa wartości 0.13 wyznaczona przez AG wynosi: $\lambda_e=0.13$.

Tabela 7.8 Błędy średniokwadratowe spełnienia warunków brzegowych na brzegach zewnętrznych komórki

Brzeg	$y=-1$	$x=1$	$y=1$	$x=-1$
Warunek	$T_M = T_D$	$\frac{\partial T_M}{\partial y}$	$T_M = T_G$	$\frac{\partial T_M}{\partial y}$
Błąd	0.006	0.005	0.02	0.005

Tabela 7.9 Błędy średniokwadratowe spełnienia warunków brzegowych na styku osnowy z włóknami

Warunek	Brzeg włókna/osnowa	Włókno F ₁	Włókno F ₂	Włókno F ₃
1	$T_M = T_F, \partial F_N$	1.1E-05	0.001	0.0004
2	$\lambda_M \frac{\partial T_M}{\partial y} = \lambda_F \frac{\partial T_F}{\partial y}, \partial F_N$	3.9E-05	0.0002	0.0003

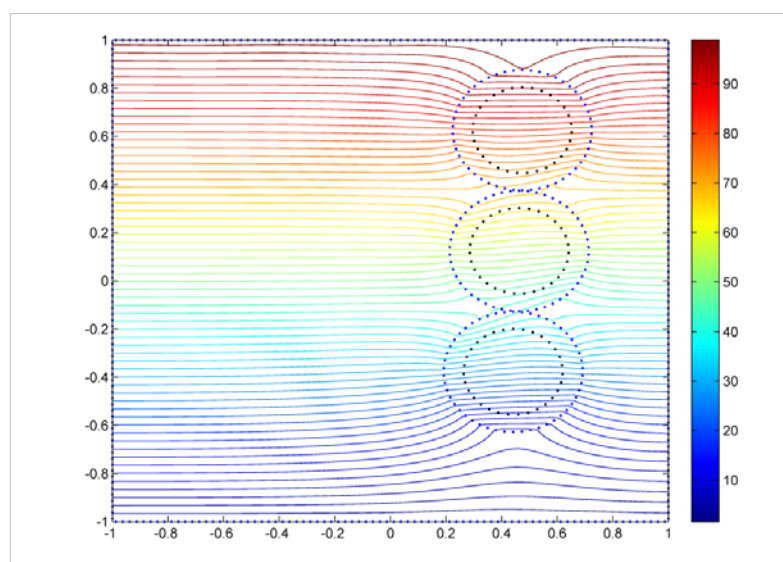
7.7.2 Komórka zawierająca 3 włókna $\lambda_M > \lambda_F$, $R=0,25$

W prezentowanym przykładzie dokonano podobnej analizy jak w przypadku wcześniejszym – celem było wyznaczenie maksymalnego efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła dla kompozytu, którego komórka elementarna zawiera 3 włókna. Dokonano jednakże zmiany wartości współczynników przewodzenia ciepła włókien i osnowy, w związku z czym, w tym wypadku współczynnik przewodzenia ciepła dla matrycy był większy niż dla

włókien. Parametry materiału przedstawiono w tabeli 7.10. Wyznaczono układ włókien w komórce, dla którego maksymalna wartość $\lambda_e = 1.65$ (rysunek 7.7). Błędy spełnienia warunków brzegowych przedstawiono w tabelach 7.11 i 7.12.

Tabela 7.10 Wartości przyjęte w obliczeniach

Oznaczenie	Wartość	Znaczenie
λ_M	2.0 [W/mK]	współczynnik przewodzenia ciepła osnowy
λ_F	0.1 [W/mK]	współczynnik przewodzenia ciepła włókien
R	0.25 [cm]	średnica włókien
F/M	15%	objętościowy udział włókien w osnowie



Rysunek 7.7 Układ włókien dla osiągnięcia maksymalnej wartości λ_e , $\lambda_M > \lambda_F$, $R=0,25$

Wartość maksymalna λ_e wyznaczona przez AG wynosi: $\lambda_e=1.65$.

Tabela 7.11 Błędy średniokwadratowe spełnienia warunków brzegowych na brzegach zewnętrznych komórki

Brzeg	$y=-1$	$x=1$	$y=1$	$x=-1$
Warunek	$T_M = T_D$	$\frac{\partial T_M}{\partial y}$	$T_M = T_G$	$\frac{\partial T_M}{\partial y}$
Błąd	0.006	0.014	0.012	0.002

Tabela 7.12 Błędy średniokwadratowe spełnienia warunków brzegowych na styku osnowy z włóknami

Warunek	Brzeg włókna/osnowa	Włókno F ₁	Włókno F ₂	Włókno F ₃
1	$T_M = T_F, \partial F_N$	0.0005	0.0003	0.0006
2	$\lambda_M \frac{\partial T_M}{\partial y} = \lambda_F \frac{\partial T_F}{\partial y}, \partial F_N$	1.3E-05	0.0002	0.002

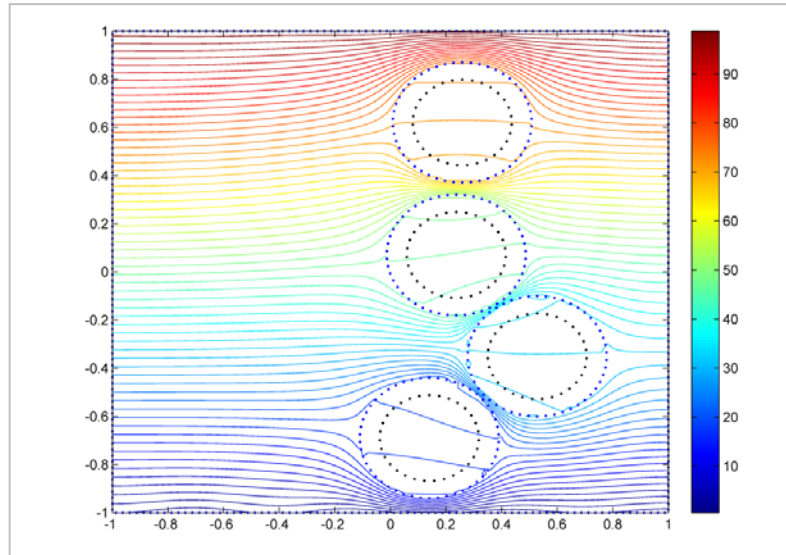
7.7.3 Komórka zawierająca 4 włókna $\lambda_M < \lambda_F$, $R=0,25$

W prezentowanym przykładzie optymalizacji materiału kompozytowego w celu uzyskania optymalnej wartości efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła λ_e analizowano materiał kompozytowy składający się z komórek zawierających 4 włókna, przy czym współczynnik przewodzenia ciepła osnowy był mniejszy niż współczynnik przewodzenia ciepła włókien. Parametry materiału przedstawiono w tabeli 7.13. Wykorzystując algorytm genetyczny wyznaczono układ włókien w komórce, dla którego maksymalna wartość $\lambda_e = 0.176$ (rysunek 7.8). Błędy spełnienia warunków brzegowych przedstawiono w tabelach 7.14 i 7.15.

Następnie wyznaczono układ włókien (rysunek 7.9) dla osiągnięcia minimalnej wartości efektywnego współczynnika przewodzenia, którego wartość w tym przypadku wyniosła $\lambda_e=0.137$. Błędy spełnienia warunków brzegowych zestawiono w tabelach 7.16 i 7.17.

Tabela 7.13 Wartości przyjęte w obliczeniach

Oznaczenie	Wartość	Znaczenie
λ_M	0.1 [W/mK]	współczynnik przewodzenia ciepła osnowy
λ_F	2.0 [W/mK]	współczynnik przewodzenia ciepła włókien
R	0.25 [cm]	średnica włókien
F/M	20%	objętościowy udział włókien w osnowie



Rysunek 7.8 Układ włókien dla osiągnięcia maksymalnej wartości λ_e , $\lambda_M < \lambda_F$, $R=0,25$

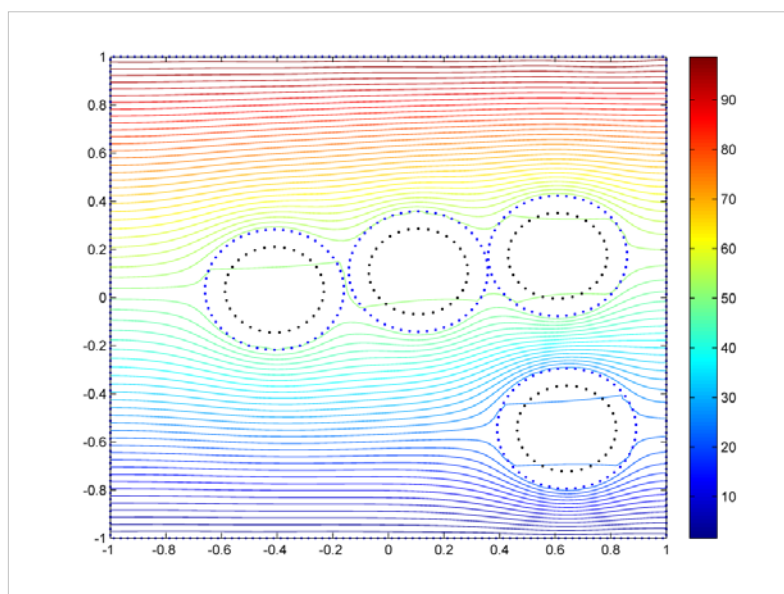
Wartość maksymalna λ_e wyznaczona przez AG wynosi: $\lambda_e=0.176$.

Tabela 7.14 Błędy średniokwadratowe spełnienia warunków brzegowych na brzegach zewnętrznych komórki

Brzeg	$y=-1$	$x=1$	$y=1$	$x=-1$
Warunek	$T_M = T_D$	$\frac{\partial T_M}{\partial y}$	$T_M = T_G$	$\frac{\partial T_M}{\partial y}$
Błąd	0.048	0.018	0.016	0.011

Tabela 7.15 Błędy średniokwadratowe spełnienia warunków brzegowych na styku osnowy z włóknami

Warunek	Brzeg włókna/osnowa	Włókno	Włókno	Włókno	Włókno
		F ₁	F ₂	F ₃	F ₄
1	$T_M = T_F, \partial F_N$	0.007	0.005	0.003	0.002
2	$\lambda_M \frac{\partial T_M}{\partial y} = \lambda_F \frac{\partial T_F}{\partial y}, \partial F_N$	0.003	0.001	0.001	0.006



Rysunek 7.9 Układ włókien dla osiągnięcia minimalnej wartości λ_e , $\lambda_M < \lambda_F$, $R=0,25$

Wartość minimalna λ_e wyznaczona przez AG wynosi: $\lambda_e=0.137$.

Tabela 7.16 Błędy średniokwadratowe spełnienia warunków brzegowych na brzegach zewnętrznych komórki

Brzeg	$y=-1$	$x=1$	$y=1$	$x=-1$
Warunek	$T_M = T_D$	$\frac{\partial T_M}{\partial y}$	$T_M = T_G$	$\frac{\partial T_M}{\partial y}$
Błąd	0.002	0.02	0.01	0.006

Tabela 7.17 Błędy średniokwadratowe spełnienia warunków brzegowych na styku osnowy z włóknami

Warunek	Brzeg włókna/osnowa	Włókno	Włókno	Włókno	Włókno
		F ₁	F ₂	F ₃	F ₄
1	$T_M = T_F, \partial F_N$	0.0005	0.0003	0.0007	0.0006
2	$\lambda_M \frac{\partial T_M}{\partial y} = \lambda_F \frac{\partial T_F}{\partial y}, \partial F_N$	0.0002	0.0001	0.0001	0.0002

7.7.4 Komórka zawierająca 4 włókna $\lambda_M > \lambda_F$, $R=0,25$

W prezentowanym przykładzie optymalizacji materiału kompozytowego w celu uzyskania optymalnej wartości efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła λ_e analizowano materiał kompozytowy składający się z komórek zawierających 4 włókna, przy czym współczynnik przewodzenia ciepła osnowy był większy niż współczynnik przewodzenia ciepła włókien. Parametry materiału

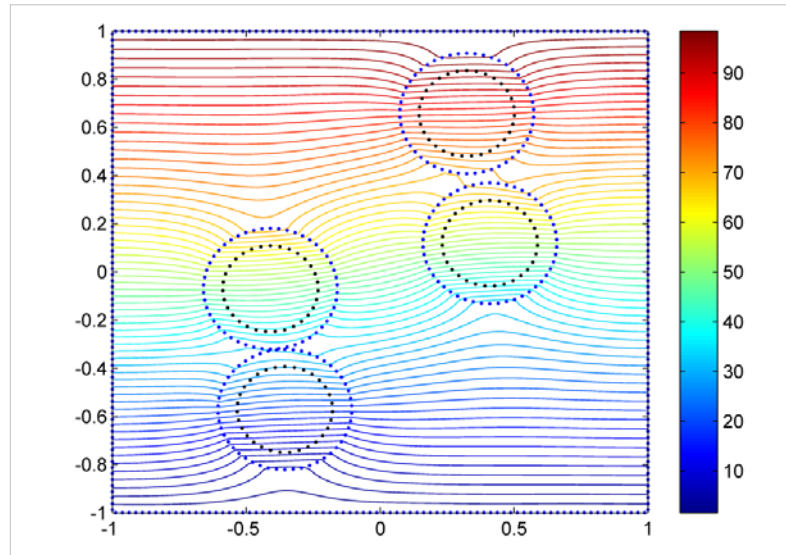
przedstawiono w tabeli 7.18. Wykorzystując algorytm genetyczny wyznaczono układ włókien w komórce, dla którego maksymalna wartość $\lambda_e = 1.479$ (rysunek 7.10). Błędy spełnienia warunków brzegowych przedstawiono w tabelach 7.19 i 7.20.

Następnie wyznaczono układ włókien (rysunek 7.11) dla osiągnięcia minimalnej wartości efektywnego współczynnika przewodzenia, którego wartość w tym przypadku wyniosła $\lambda_e=1.065$. Błędy spełnienia warunków brzegowych zestawiono w tabelach 7.21 i 7.22.

Trzecim analizowanym przypadkiem była optymalizacja ułożenia włókien zapewniające uzyskanie efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła jak najbliższego wartości $\lambda_e = 1.35$. W wyniku optymalizacji otrzymano układ włókien (rysunek 7.13) w komórce kompozytu spełniający dokładnie oczekiwania dotyczące wartości efektywnego współczynnika przewodzenia: $\lambda_e = 1.35$. Błędy spełnienia warunków brzegowych dla tego układu zestawiono w tabelach 7.23 i 7.24.

Tabela 7.18 Wartości przyjęte w obliczeniach

Oznaczenie	Wartość	Znaczenie
λ_M	2.0 [W/mK]	współczynnik przewodzenia ciepła osnowy
λ_F	0.1 [W/mK]	współczynnik przewodzenia ciepła włókien
R	0.25 [cm]	średnica włókien
F/M	20%	objętościowy udział włókien w osnowie



Rysunek 7.10 Układ włókien dla osiągnięcia maksymalnej wartości λ_e , $\lambda_M > \lambda_F$, $R=0,25$

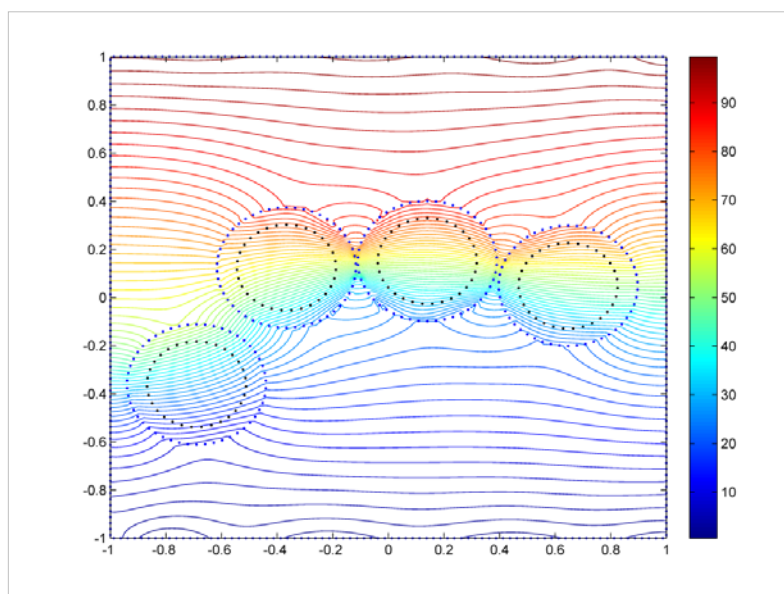
Wartość maksymalna λ_e wyznaczona przez AG wynosi: $\lambda_e=1.45$.

Tabela 7.19 Błędy średniokwadratowe spełnienia warunków brzegowych na brzegach zewnętrznych komórki

Brzeg	$y=-1$	$x=1$	$y=1$	$x=-1$
Warunek	$T_M = T_D$	$\frac{\partial T_M}{\partial y}$	$T_M = T_G$	$\frac{\partial T_M}{\partial y}$
Błąd	0.002	0.004	0.003	0.006

Tabela 7.20 Błędy średniokwadratowe spełnienia warunków brzegowych na styku osnowy z włóknami

Warunek	Brzeg włókna/osnowa	Włókno	Włókno	Włókno	Włókno
		F ₁	F ₂	F ₃	F ₄
1	$T_M = T_F, \partial F_N$	0.0002	0.0003	5.8E-06	0.0002
2	$\lambda_M \frac{\partial T_M}{\partial y} = \lambda_F \frac{\partial T_F}{\partial y}, \partial F_N$	2.4E-05	5.0E-06	0.0001	0.002



Rysunek 7.11 Układ włókien dla osiągnięcia minimalnej wartości λ_e , $\lambda_M > \lambda_F$, $R=0,25$

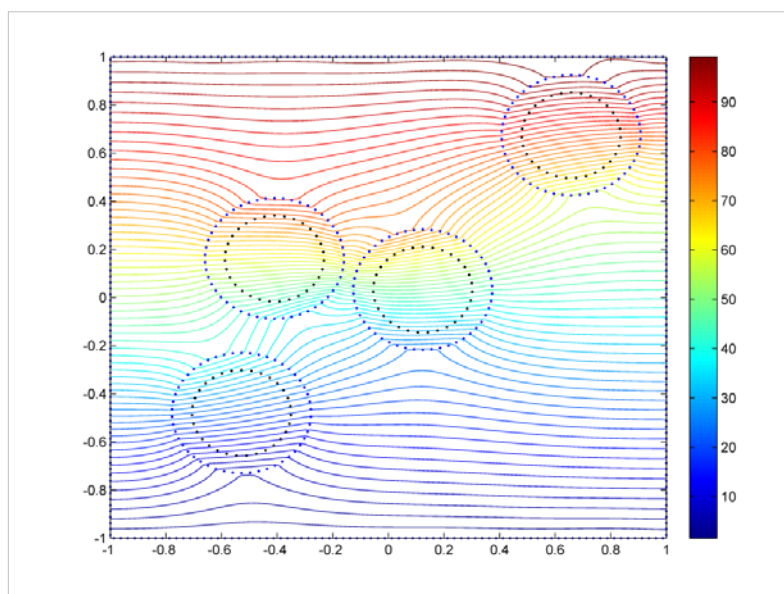
Wartość minimalna λ_e wyznaczona przez AG wynosi: $\lambda_e=1.07$.

Tabela 7.21 Błędy średniokwadratowe spełnienia warunków brzegowych na brzegach zewnętrznych komórki

Brzeg	$y=-1$	$x=1$	$y=1$	$x=-1$
Warunek	$T_M = T_D$	$\frac{\partial T_M}{\partial y}$	$T_M = T_G$	$\frac{\partial T_M}{\partial y}$
Błąd	0.1	0.4	0.16	0.1

Tabela 7.22 Błędy średniokwadratowe spełnienia warunków brzegowych na styku osnowy z włóknami

Warunek	Brzeg włókna/osnowa	Włókno	Włókno	Włókno	Włókno
		F_1	F_2	F_3	F_4
1	$T_M = T_F, \partial F_N$	0.002	0.006	0.004	0.009
2	$\lambda_M \frac{\partial T_M}{\partial y} = \lambda_F \frac{\partial T_F}{\partial y}, \partial F_N$	0.0001	0.001	0.003	0.001



Rysunek 7.12 Układ włókien dla osiągnięcia wartości $\lambda_e=1.35$, $\lambda_M < \lambda_F$, $R=0,25$

Wartość λ_e wyznaczona w procedurze optymalizacyjnej wynosi: $\lambda_e=1.35$.

Tabela 7.23 Błędy średniokwadratowe spełnienia warunków brzegowych na brzegach zewnętrznych komórki

Brzeg	$y=-1$	$x=1$	$y=1$	$x=-1$
Warunek	$T_M = T_D$	$\frac{\partial T_M}{\partial y}$	$T_M = T_G$	$\frac{\partial T_M}{\partial y}$
Błąd	0.004	0.03	0.018	0.01

Tabela 7.24 Błędy średniokwadratowe spełnienia warunków brzegowych na styku osnowy z włóknami

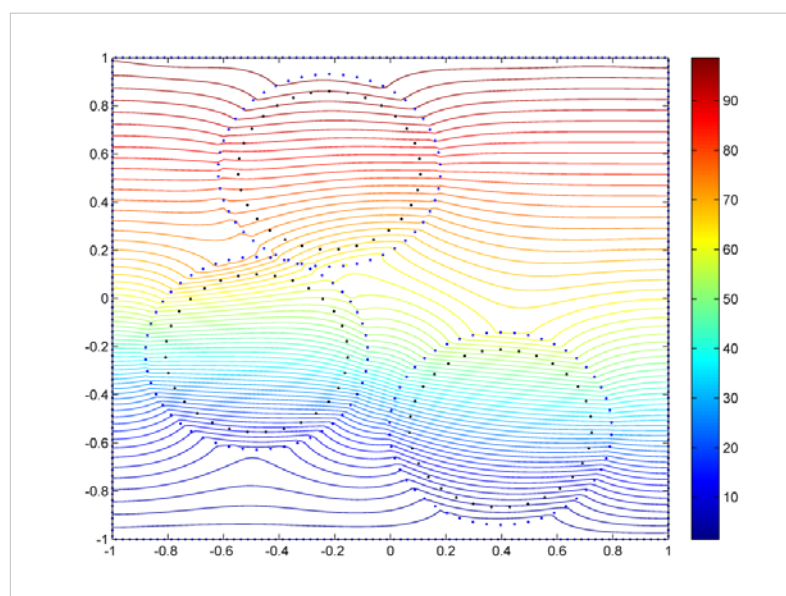
Warunek	Brzeg włókna/osnowa	Włókno F_1	Włókno F_2	Włókno F_3	Włókno F_4
1	$T_M = T_F, \partial F_N$	9.6E-05	4.3E-05	0.002	0.0002
2	$\lambda_M \frac{\partial T_M}{\partial y} = \lambda_F \frac{\partial T_F}{\partial y}, \partial F_N$	5.6E-05	2.5E-05	1.1E-05	2.9E-05

7.7.5 Komórka zawierająca 3 włókna, $\lambda_M > \lambda_F$, $R=0,4$

W prezentowanym przykładzie optymalizacji materiału kompozytowego w celu uzyskania optymalnej wartości efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła λ_e analizowano materiał kompozytowy składający się z komórek zawierających 3 włókna, przy czym współczynnik przewodzenia ciepła osnowy był większy niż współczynnik przewodzenia ciepła włókien. W odróżnieniu od punktu 7.7.1 pracy włókna w tej komórce miały większą średnicę, a co za tym idzie objętościowy udział włókien w osnowie został zwiększony. Parametry materiału przedstawiono w tabeli 7.25. Wykorzystując algorytm genetyczny wyznaczono układ włókien w komórce, dla którego maksymalna wartość $\lambda_e = 0.99$ (rysunek 7.13). Błędy spełnienia warunków brzegowych przedstawiono w tabelach 7.26 i 7.27.

Tabela 7.25 Wartości przyjęte w obliczeniach

Oznaczenie	Wartość	Znaczenie
λ_M	2.0 [W/mK]	współczynnik przewodzenia ciepła osnowy
λ_F	0.1 [W/mK]	współczynnik przewodzenia ciepła włókien
R	0.4 [cm]	średnica włókien
F/M	38%	objętościowy udział włókien w osnowie



Rysunek 7.13 Układ włókien dla osiągnięcia maksymalnej wartości λ_e , $\lambda_M > \lambda_F$, $R=0,4$

Wartość maksymalna λ_e wyznaczona przez AG wynosi: $\lambda_e=0.99$.

Tabela 7.26 Błędy średniokwadratowe spełnienia warunków brzegowych na brzegach zewnętrznych komórki

Brzeg	$y=-1$	$x=1$	$y=1$	$x=-1$
Warunek	$T_M = T_D$	$\frac{\partial T_M}{\partial y}$	$T_M = T_G$	$\frac{\partial T_M}{\partial y}$
Błąd	0.006	0.009	0.02	0.04

Tabela 7.27 Błędy średniokwadratowe spełnienia warunków brzegowych na styku osnowy z włóknami

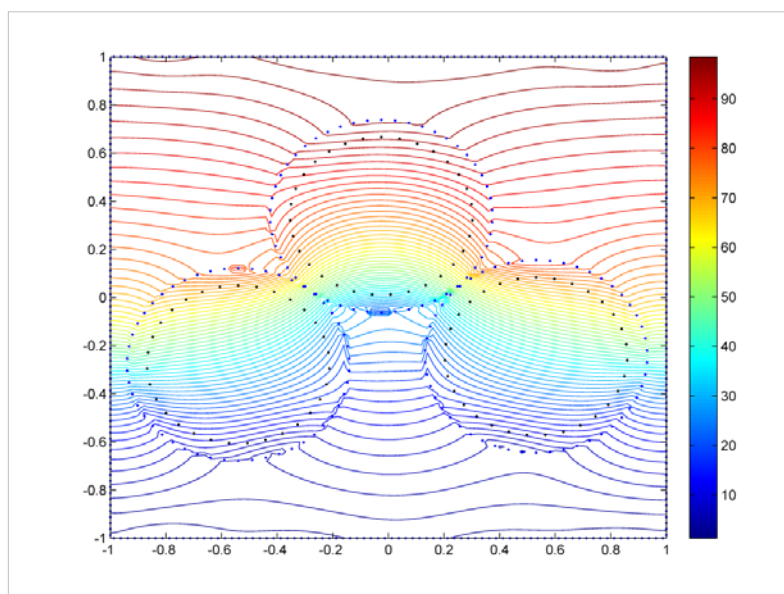
Warunek	Brzeg włókna/osnowa	Włókno F ₁	Włókno F ₂	Włókno F ₃
1	$T_M = T_F, \partial F_N$	0.001	0.0007	0.002
2	$\lambda_M \frac{\partial T_M}{\partial y} = \lambda_F \frac{\partial T_F}{\partial y}, \partial F_N$	0.0008	0.001	0.0001

7.7.6 Komórka zawierająca 3 włókna, $\lambda_M < \lambda_F$, $R=0,4$

W prezentowanym przykładzie optymalizacji materiału kompozytowego w celu uzyskania optymalnej wartości efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła λ_e analizowano materiał kompozytowy składający się z komórek zawierających 3 włókna, przy czym współczynnik przewodzenia ciepła osnowy był mniejszy niż współczynnik przewodzenia ciepła włókien. Podobnie jak w poprzednim przypadku, włókna w tej komórce miały większą średnicę niż w przykładach wcześniejszych. Parametry materiału przedstawiono w tabeli 7.28. Wykorzystując algorytm genetyczny wyznaczono układ włókien w komórce, dla którego maksymalna wartość $\lambda_e = 0.73$ (rysunek 7.14). Błędy spełnienia warunków brzegowych przedstawiono w tabelach 7.29 i 7.30.

Tabela 7.28 Wartości przyjęte w obliczeniach

Oznaczenie	Wartość	Znaczenie
λ_M	0.1 [W/mK]	współczynnik przewodzenia ciepła osnowy
λ_F	2.0 [W/mK]	współczynnik przewodzenia ciepła włókien
R	0.4 [cm]	średnica włókien
F/M	38%	objętościowy udział włókien w osnowie



Rysunek 7.14 Układ włókien dla osiągnięcia maksymalnej wartości λ_e , $\lambda_M < \lambda_F$, $R=0,4$

Wartość maksymalna λ_e wyznaczona przez AG wynosi: $\lambda_e=0.73$.

Tabela 7.29 Błędy średniokwadratowe spełnienia warunków brzegowych na brzegach zewnętrznych komórki

Brzeg	$y=-1$	$x=1$	$y=1$	$x=-1$
Warunek	$T_M = T_D$	$\frac{\partial T_M}{\partial y}$	$T_M = T_G$	$\frac{\partial T_M}{\partial y}$
Błąd	0.07	0.11	0.06	0.14

Tabela 7.30 Błędy średniokwadratowe spełnienia warunków brzegowych na styku osnowy z włóknami

Warunek	Brzeg włókna/osnowa	Włókno F ₁	Włókno F ₂	Włókno F ₃
1	$T_M = T_F, \partial F_N$	0.02	0.01	0.0003
2	$\lambda_M \frac{\partial T_M}{\partial y} = \lambda_F \frac{\partial T_F}{\partial y}, \partial F_N$	0.006	0.007	3.6E-05

7.8 Zastosowanie algorytmu genetycznego do rozmieszczenia punktów źródłowych i poprawienia dokładności rozwiązania

Dla analizowanego w rozdziale 7.7.6 przypadku przeprowadzono również optymalizację parametrów metody rozwiązań podstawowych. Z powodu bardzo dużej liczby punktów źródłowych, nie optymalizowano położenia każdego z punktów źródłowych z osobna, lecz przyjęto że punkty źródłowe rozmieszczone

są na konturach podobnych do kształtu rozważanych obszarów. Do obliczeń przyjęto sześć zmiennych decyzyjnych:

- 1) promień okręgu na którym rozmieszczone są źródła wewnątrz włókna: R_1 ;
- 2) liczba punktów źródłowych na tym konturze N_1 ;
- 3) promień okręgu na którym rozmieszczone są źródła na zewnątrz włókna: R_2
- 4) liczba punktów źródłowych na tym konturze N_2 ;
- 5) odległość konturu wokół rozważanej komórki kompozytu na którym rozmieszczone są źródła: d ;
- 6) liczba punktów źródłowych na tym konturze: N_b .

W obliczeniach zastosowano również optymalizację wielokryterialną (2.6), co pozwoliło na poprawę jakości rozwiązania, ale nie doprowadziło do poprawy jakości każdego z warunków brzegowych. Zestawienie parametrów metody rozwiązań podstawowych przed optymalizacją oraz po optymalizacji przedstawiono odpowiednio w tabelach 7.31 i 7.32. W tabelach 7.33 i 7.34 zestawiono błędy spełnienia warunków brzegowych, a rozmieszczenie punktów źródłowych przed optymalizacją i po optymalizacji przedstawiono na rysunkach 7.15 i 7.16.

Tabela 7.31 Parametry metody rozwiązań podstawowych przed optymalizacją

Oznaczenie	Wartość	
N_b	36	liczba punktów źródłowych na zewnątrz konturu zewnętrznego
N_1	31	liczba punktów źródłowych wewnątrz konturów włókien
N_2	9	liczba punktów źródłowych na zewnątrz konturów włókien
d	1.0	odległość konturu punktów źródłowych od konturu zewnętrznego osnowy
R_1	0.18	odległość konturu punktów źródłowych od środka włókna
R_2	6.1	odległość konturu punktów źródłowych od środka włókna

Tabela 7.32 Parametry metody rozwiązań podstawowych po optymalizacji

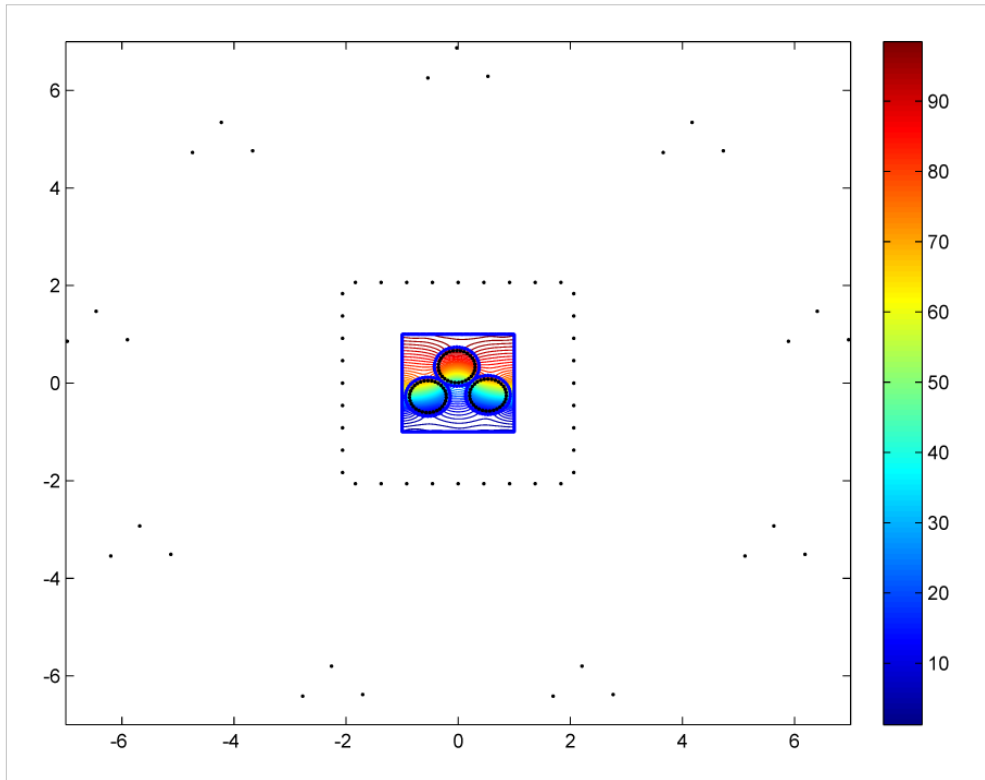
Oznaczenie	Wartość	
N_b	56	liczba punktów źródłowych na zewnątrz konturu zewnętrznego
N_1	28	liczba punktów źródłowych wewnątrz konturów włókien
N_2	17	liczba punktów źródłowych na zewnątrz konturów włókien
d	5.12	odległość konturu punktów źródłowych od konturu zewnętrznego osnowy
R_1	0.27	odległość konturu punktów źródłowych od środka włókna
R_2	5.01	odległość konturu punktów źródłowych od środka włókna

Tabela 7.33 Błędy średniokwadratowe spełnienia warunków brzegowych na brzegach zewnętrznych komórki

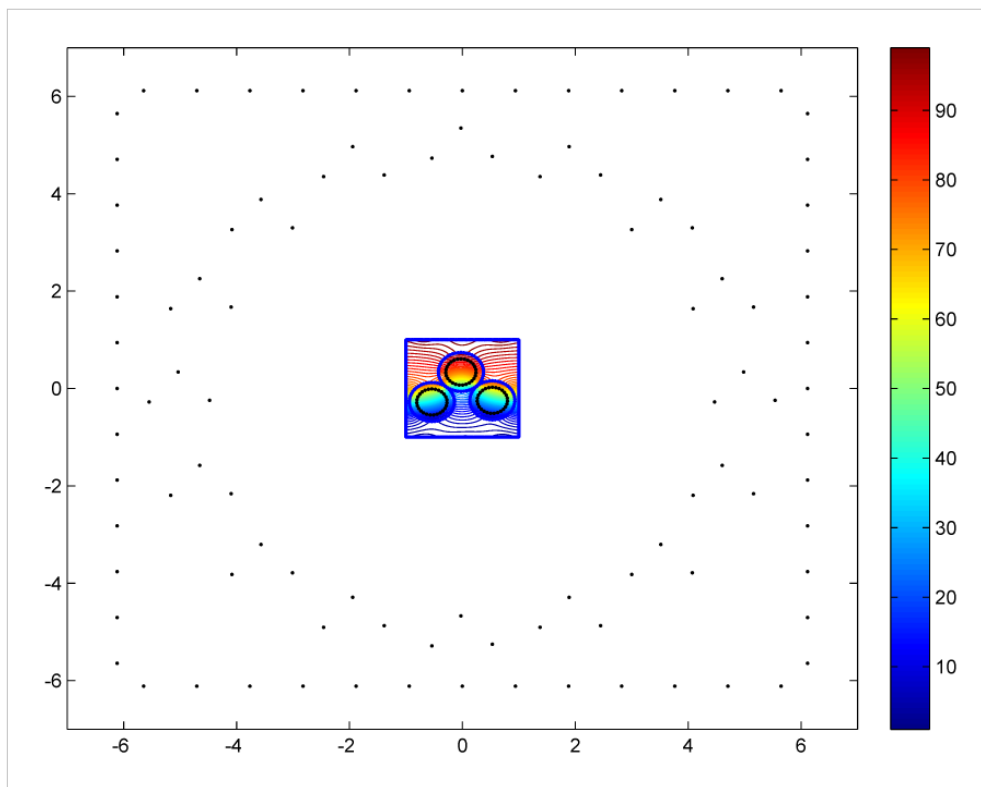
Brzeg	$y=-1$	$x=1$	$y=1$	$x=-1$
Warunek	$T_M = T_D$	$\frac{\partial T_M}{\partial y}$	$T_M = T_G$	$\frac{\partial T_M}{\partial y}$
Błąd przed optymalizacją	0.07	0.11	0.06	0.14
Błąd po optymalizacji	0.04	0.09	0.02	0.11

Tabela 7.34 Błędy średniokwadratowe spełnienia warunków brzegowych na styku osnowy z włóknami

	Brzeg Włókna/osnowa	Włókno F ₁	Włókno F ₂	Włókno F ₃
Błąd przed optymalizacją	$T_M = T_F, \partial F_N$	0.02	0.01	0.0003
Błąd po optymalizacji	$T_M = T_F, \partial F_N$	0.01	0.01	0.0001
Błąd przed optymalizacją	$\lambda_M \frac{\partial T_M}{\partial y} = \lambda_F \frac{\partial T_F}{\partial y}, \partial F_N$	0.006	0.007	3.6E-5
Błąd po optymalizacji	$\lambda_M \frac{\partial T_M}{\partial y} = \lambda_F \frac{\partial T_F}{\partial y}, \partial F_N$	0.007	1.6E-6	0.002



Rysunek 7.15 Układ punktów źródłowych przed optymalizacją



Rysunek 7.16 Układ punktów źródłowych po optymalizacji

8 Wnioski i podsumowanie

Niniejsza praca miała na celu weryfikację postawionych w rozdz. 1.1 dwóch tez rozprawy tj.:

1. Zastosowanie algorytmów genetycznych pozwala na optymalizację położenia źródeł MRP, co poprawia jakość uzyskiwanych wyników;
2. Zastosowanie metod hybrydowych może być z powodzeniem stosowane w procesie konstruowania urządzeń i projektowania struktury materiałów o pożądanych właściwościach cieplnych.

Przeprowadzony eksperyment numeryczny i otrzymane w nim wyniki zaprezentowane w rozdziale 6 oraz 7 pracy potwierdzają słuszność pierwszej z postawionych tezy. Rozmieszczenie punktów źródłowych wpływa na jakość rozwiązania uzyskiwanego przy rozwiązywaniu zagadnień brzegowych z wykorzystaniem metody rozwiązań podstawowych. Zastosowanie algorytmu genetycznego pozwala na uzyskanie takiego rozmieszczenia punktów źródłowych, w wyniku którego uzyskiwane wyniki cechują się mniejszym błędem spełnienia warunków brzegowych, a co za tym idzie, są jakościowo lepsze od tych uzyskiwanych przy tradycyjnym rozmieszczeniu na konturze podobnym do geometrii rozważanej obszaru umieszczonym w małej odległości od brzegu. Należy również podkreślić skuteczność zastosowanej metody optymalizacji wielokryterialnej dla zagadnienia Motza, które charakteryzuje się nieciągłością warunków brzegowych.

Wyniki uzyskane w rozdziale 5 oraz 7 potwierdzają słuszność drugiej z postawionych tez. Zastosowanie metod hybrydowych pozwala na skuteczną optymalizację konstrukcji urządzeń ze względu na ich parametry cieplne. Na przykładzie wymiennika ciepła zaprezentowano w rozdziale 5 wyniki symulacji przeprowadzonych dla wymiennika ciepła, dla którego zdefiniowano funkcję celu w postaci maksymalnej średniej wartości temperatury w rozważanym obszarze. Algorytm genetyczny współpracujący z pakietem obliczeniowym COMSOL skutecznie poradził sobie z wyznaczeniem takiej konfiguracji przy której urządzenie osiąga bardzo dobre parametry ze względu na postawione kryteria.

Zastosowany algorytm pozwala również na optymalizację struktury kompozytu włóknistego, jednokierunkowego, ze względu na parametr jakim jest efektywny współczynnik przewodzenia ciepła. W kompozycie składającym się z dwóch materiałów (matrycy i włókien) charakteryzujących się różnymi współczynnikami przewodzenia ciepła można uzyskać różne wartości efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła, w zależności od przestrzennej konfiguracji włókien w kompozycie. Zastosowana metoda optymalizacyjna pozwoliła na skuteczne wyznaczenie takich konfiguracji dla analizowanych przypadków zaprezentowanych w rozdziale 7 pracy.

Można zatem stwierdzić, iż postawione we wstępie pracy tezy zostały potwierdzone, a cele osiągnięte.

Literatura

- [Ake2000] Akella M. R., Kotamraju G. R., *Trefftz indirect method applied to nonlinear potential problems*, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 24, pp. 459-465, 2000.
- [Alm 2009] Almeida F.S., Awruch A.M., *Design optimization of composite laminated structures using genetic algorithms and finite element analysis*, Composite Structures, vol. 88, pp. 443-454, 2009.
- [Alv2009] Alves C.J.S., *On the choice of source points in the method of fundamental solutions*, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 33, pp. 1348-1361, 2009.
- [Ara2001] Arabas J., *Wykłady z algorytmów ewolucyjnych*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 2001.
- [Bar2008] Barnett A.H. , Betcke T., *Stability and convergence of the method of fundamental solutions for Helmholtz problems on analytic domains*, Journal of Computational Physics, vol. 227, pp. 7003-7026, 2008.
- [Bia2004] Białycki R.A., Burczyński T., Długosz A., Kuś W., Ostrowski Z., *Evolutionary shape optimization of thermoelastic bodies exchanging heat by convection and radiation*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. vol. 194, pp. 1839-1859, 2005.
- [Ber2009] Bernal F., Kindelan M., *On the enriched RBF method for singular potential problems*, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol 33, pp. 1062-1073, 2009.
- [Bog1985] Bogomolny A., *Fundamental solutions method for elliptic boundary value problems*, SIAM Journal of Numerical Analysis, vol. 4, pp. 644-669, 1985
- [Bre1992] Brebbia C. A. Dominguez J., *Boundary Elements: An Introductory Course*, WIT Press publishing, 1992.
- [Bur1995] Burczyński T., *Metoda elementów brzegowych w mechanice*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1995.
- [Cza2010] Czarnecki S. *Metody bezsiatkowe MLS i RPI w analizie i optymalizacji pól naprężeń w ciałach sprężystych*, Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, 2010.
- [Che1989] Cheng Y. K., Jin W. G., Zienkiewicz O. C., *Direct solution procedure for solution of harmonic problems using complete non-singular, Trefftz*

functions, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 5, pp. 159-169, 1989.

- [Che2002a] Chen C. S., Ganesh M., Goldberg M.A., Cheng A. H. D.. *Multilevel compact radial functions based computational schemes for some elliptic problems*, *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 43, pp. 359-378, 2002.
- [Che2002b] Chen W., Tanaka M., *A meshless, integration-free, and boundary-only RBF technique*, *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 43, pp. 379-391, 2002.
- [Che2006] Chen K. H., Kao J. H., Chen J. T., Young D. L., Lu M. C., *Regularized meshless method for multiply-connected-domain Laplace problems*, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 30, pp. 882-896, 2006.
- [Che2007] Chen J.T., Wua C.S., Lee Y.T., Chen K.H, *On the equivalence of the Trefftz method and method of fundamental solutions for Laplace and biharmonic equations*, *Computers and Mathematics with Applications* vol. 53, pp. 851–879, 2007.
- [Che2008] Chen C.S., Karageorghis A., Smyrlis Y.S., *The Method of Fundamental Solutions – A Meshless Method*, Dynamic Publishers Inc., Atlanta, 2008
- [Com2007] Comsol Multiphysics User’s Guide, modelling Guide and model Library, Documentation Set, Comsol AB, 2007
- [Deb2001] Deb. K. *Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms*, John Wiley & Sons, Chichester, 2001.
- [Eis1995] Eisuke Kita, Norio Kamiya, *Trefftz method: an overview*, *Advances in Engineering Software*, Volume 24, pp. 3-12, 1995.
- [Fad2006] Fadrani D.R.V., *A new aspect for choosing collocation points for solving biharmonic equations*, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 181, pp. 1112-1119, 2006.
- [Fai1988] Fairweather G., Karageorghis A., *The almansi of fundamental solutions for numerical solution of the biharmonic equation*, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 26, pp. 1668-1682, 1988
- [Fai1989] Fairweather G., Karageorghis A., *The simple layer potential method of fundamental solutions for certain biharmonic equations*, *International Fluids for Numerical Methods in Fluids*, vol. 9, pp. 1221-1234, 1989.

- [Fai1998] Fairweather G., Karageorghis A., *The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems*, Advances in Computational Mechanics, vol. 9, pp. 69-95, 1998.
- [Fai2003] Fairweather G., Karageorghis A., Martin P. A., *The method of fundamental solutions for scattering and radiation problem*, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 27, pp. 759-769, 2003.
- [Fan2009] Fang X.Q. *Scattering of thermal waves and non-steady thermal conductivity of composites with coated particles*, Applied Thermal Engineering, vol. 29, pp. 925-931, 2009.
- [Fur1997] Furmanski P., *Heat Conduction in Composites: Homogenization and Macroscopic Behavior*, Appl. Mech. Rev. 50, 11, pp.2993-3002, 1997.
- [Gen1997] Gen M., Cheng R. *Genetic Algorithms and Engineering Design*, Wiley-Interscience, 1997.
- [Geo1996] Georgiou G.C., Olson L, Smyrlis Y.S, *A singular function boundary integral method for the Laplace equation*, Communications In Numerical Methods In Engineering, vol. 12, pp. 127-134, 1996.
- [Gol1995a] Goldberg D.E. *Algorytmy Genetyczne i ich zastosowanie*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1995.
- [Gol1995b] Goldberg M. A., The method of fundamental solutions for Poisson's equation, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 16, pp. 205-213 1995.
- [Gol2002] Goldberg M. A., Chen C. S., *The method of fundamental solutions for potential and diffusion problems*. Computational Mechanics Publications, vol. 43, pp. 103-176, 1998.
- [Gwi2007] Gwiazda T.D., *Algorytmy genetyczne. Kompendium T1-2*, Wydawnictwo Naukowe PWN S.A., Warszawa 2007.
- [Her1980] I. Hererra. *Theory of connectivity: a systematic formulation of boundary element methods*. In: Brebbia CA, editor *New developments in boundary element methods*, Proceedings 2nd International Seminar of Recent Advances in BEM, Southampton, England, London: Pentch Press, pp. 45-58, 1980.
- [Hil2006] Hilbert R., Janiga G., Baron R., Thévenin D., *Multi-objective shape optimization of a heat exchanger using parallel genetic algorithms*, International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 49, pp. 2567-2577, 2006.

- [Hol1975] Holland J. H. *Adaptation i natural and artificial systems*, The University Michigan Press Ann Arbor 1975.
- [Jop2006] Jopek H., Kolodziej J.A., Strek T. : *Laminar flow in trapezoidal grooves at finite Bond numbers with shear stress at the liquid-vapor interface by method of fundamental solution*, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, 13, pp. 395-405, 2006.
- [Jop2008] Jopek H., Kołodziej J.A. *Application of genetic algorithms for optimal positions of source points in the method of fundamental solutions*, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, vol. 15, pp. 215-224, 2008.
- [Jop2010] Jopek H., Stręk T., *Projektowanie materiałów o zadanym efektywnym współczynniku przewodzenia ciepła*, XLIX Sympozjon "Modelowanie w mechanice", Wisła, 2010.
- [Kal2002] Kalamkarov A. L., Georgiades A.V. *Modeling of smart composites on account of actuation, previous termthermal conductivity and hygroscopic absorption*, Composites Part B: Engineering, vol. 33, pp. 141-152, 2002.
- [Kar1992] Karageorghis A., *Modified methods of fundamental solutions for harmonic and biharmonic problems with boundary singularities*, Numerical Methods for Partial Differential Equations, vol. 9, pp. 1-19, 1992.
- [Kar1995] Karayannis C. G., *A numerical approach to steel fibre reinforced concrete under torsion*, Structural Engineering Review, vol. 7, pp. 83-91, 1995.
- [Kat1988] Katsurada M., Okamoto H., *A mathematical study of the charge simulation method.*, Journal of the Faculty of Science University of Tokyo, Section 1A, vol. 35, pp. 507-518, 1988.
- [Kat1996] Katsurada M., Okamoto H., *The collocation points of the fundamental solution method for the potential problem*, Computers & Mathematics with Applications, vol. 31, pp. 123-137, 1996.
- [Kit1991] Kitagawa T., *Asymptotic stability of the fundamental solution method*, Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 38, pp. 263-269, 1991.
- [Kle2008] Kołodziej J. A., Klekiel. T, *Optimal parameters of method of fundamental solutions for Poisson problems in heat transfer by means of genetic algorithms*, Computer-Assisted Mechanics and Engineering Sciences, vol. 15, pp. 99-112, 2008
- [Kol1989] Kołodziej J. A., *Określenie efektywnych własności ośrodków porowatych i kompozytowych przez symulację numeryczną eksperymentu fizycznego z*

wykorzystaniem metody kollokacji brzegowej, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 1989.

- [Kol1992] Kołodziej J. A., Stefaniak J., Kleiber M., *Transient heat conduction by boundary collocation methods and FEM - a comparison study, Notes on Numerical Fluid Mechanics, Numerical Techniques for Boundary Element Methods*, vol. 33, pp. 104-115, 1992.
- [Kol2001] Kołodziej J.A., *Zastosowanie Metody Kollokacji Brzegowej w zagadnieniach mechaniki*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 2001.
- [Kol2009] Kołodziej J. A., Zieliński A. P., *Boundary Collocation Techniques and their Application in Engineering*, Witpress, Southampton, 2009.
- [Koz1992] Koza J. R. *Genetic programming. On the Programming of Computers by Means of Natural Selection*, MIT Press, Cambridge, 1992.
- [Kru2007] Kruijf N., Zhou S., Li Q, Mai Y.W., *Topological design of structures and composite materials with multiobjectives*, International Journal of Solids and Structures, vol. 44, pp. 7092-7109, 2007.
- [Kup1963] V. D., M. Aleksidze A., *An approximate method of solving certain boundary-value problems*, (in Russian) Soobsc. Akad. Nauk Gruzin SSR, vol. 30, pp. 529-536, 1963.
- [Kup1964a] Kupradze V. D., *A method for the approximate solution of limiting problems in mathematical physics*, Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics, vol. 4, pp. 199-205, 1964.
- [Kup1964b] Kupradze V. D., M. Aleksidze A., *The method of functional equations for the approximate solution of certain boundary value problems*, Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics, vol. 4, pp. 82-126, 1964.
- [Lee2006] Lee Y.M., Yanga R.B., Gaua S.S., *A generalized self-consistent method for calculation of effective thermal conductivity of composites with interfacial contact conductance*, International Communications in Heat and Mass Transfer, vol. 33, pp. 142-150, 2006.
- [Li2000] Li Z. C. , Lu T. T., *Singularities and treatments of elliptic boundary value problems*, *Mathematical and Computer Modelling*, vol 31, pp. 97-145, 2000.
- [Li2004a] Lu T.T., Hu H.Y., Li Z.C., *Highly accurate solutions of Motz's and the cracked beam problems*, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 28, pp.1387-1403, 2004.

- [Li2004b] Li Z.C., Lu T.T., Hu H.Y., *The collocation Trefftz method for biharmonic equations with crack singularities*, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 28, pp. 79–96, 2004.
- [Li2008] Li Z.C., Huang H.T., *Study on effective condition number for collocation methods*, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 32, pp. 839-848, 2008.
- [Mat1977] Mathon R. , Johnston R. L., *The approximate solution of elliptic boundary-value problems by fundamental solutions*, SIAM Journal of Numerical Analysis, vol. 14, pp. 638-650, 1977.
- [Mic2003] Michalewicz Z. *Algorytmy Genetyczne+Struktury danych = programy ewolucyjne*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 2003.
- [Mil1999] Miller H.R., *Optimization: Foundations and Applications*, Wiley-Interscience, 1999.
- [Mit2004] Mitic P. , Rashed. Y. F. *Convergence and stability of the method of meshless fundamental solutions using an array of randomly distributed sources*, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 28, pp. 143-153, 2004.
- [Nai2008] Naik G. N. , Gopalakrishnan S. , Ganguli R. , *Design optimization of composites using genetic algorithms and failure mechanism based failure criterion*, Composite Structures, vol. 83 , pp. 354-367, 2008.
- [Nis2000] Nishimura R., Nishimori K., Ishihara N., *Determining the arrangement of fictitious charges in charge simulation method using genetic algorithm*, Journal of Electrostatic, vol. 49, pp. 95-105, 2000.
- [Nis2001] Nishimura R., Nishimori K., Ishihara N., *Automatic arrangement of fictitious charges and contour points in charge simulation method for polar coordinate system*, Journal of Electrostatics, vol. 51-52, pp. 618-624, 2001.
- [Nis2003] Nishimura R., Nishihara M., Nishimori K., Ishihara N., *Automatic arrangement of fictitious charges and contour points in charge simulation method for two spherical electrodes*, Journal of Electrostatics, vol. 57, pp. 337-346, 2003.
- [Ost2003] Ostwald M., *Podstawy optymalizacji konstrukcji*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 2003.
- [Pas2005] Pasupathy, T. M. K., SeethamRaju, R. T., Wilhelm, R.G., *Evolutionary algorithm for the placement of fluid power valves on a valve stand*, Engineering with Computers, vol. 20, Number 4, 354-362, 2005.

- [Pal2008] Paluch B., Grediac M., Faye A., *Combining a finite element programme and a genetic algorithm to optimize composite structures with variable thickness*, Composite Structures, vol. 83, pp. 284-294, 2008.
- [Pon2008] Ponce-Ortega J.M., Serna-Gonzalez M., Jimenez-Gutierrez A., *Synthesis of multipass heat exchanger networks using genetic algorithms*, Computers & Chemical Engineering, vol. 32, pp. 2320-2332, 2008.
- [Pou1998a] Poullikkas A., Karageorghis A., Georgiou G., *The methods of fundamental solutions for harmonic and biharmonic boundary value problems*, Computational Mechanics, vol. 21, pp. 416-423, 1998.
- [Pou1998b] Poullikkas A., Karageorghis A., Georgiou G., *The method of fundamental solutions for inhomogeneous elliptic problems*, Computational Mechanics, vol. 22, pp. 100-107, 1998.
- [Pou2002] Poullikkas A., *The method of fundamental solutions for three-dimensional elastostatics problems*, Computers & Structures, vol. 80, pp. 365-370, 2002.
- [Rak2005] Rakowski G., Kacprzyk Z., *Metoda Elementów Skończonych w mechanice konstrukcji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2005.
- [Rav2005] Ravagnani M.A.S.S., Silva A.P., Arroyo P.A., Constantino A.A., *Heat exchanger network synthesis and optimisation using genetic algorithm*, Applied Thermal Engineering vol. 25, pp. 1003-1017, 2005.
- [Sel2006] Selbaşa R., Kizilkana Ö., Reppich M., *A new design approach for shell-and-tube heat exchangers using genetic algorithms from economic point of view*, Chemical Engineering and Processing, vol. 45, pp. 268-275, 2006.
- [Smy2001] Smyrlis Y. S., Karageorghis A., Georgiou G., *Some aspects of the one-dimensional version of the method of fundamental solutions*, Computers and Mathematics with Applications, vol. 41, pp. 647-657, 2001.
- [Smy2006] Smyrlis Y.S. *The Method of Fundamental Solutions: A Weighted Least-Squares Approach*, BIT Numerical Mathematics vol 46, Number 1, 163-194, 2006.
- [Smy2009] Smyrlis Y. S., Karageorghis A., *The under-determined version of the MFS: Taking more sources than collocation points*, Applied Numerical Mathematics, 2009.
- [Str2000] Stręk T., Kołodziej J.A.: *Simulation of Flows of Two Fluids in Rectangular Cavity by Method of Fundamental Solutions*, VIIIth International

Conference Numerical Methods in Continuum Mechanics, Edited by V. Kompis, M. Zmindak, E. Maunder, Liptovsky Jan, Slovak Republic, September 19-24, 2000.

- [Str2005] Stręk T.: *Laminar flow in trapezoidal groove*, *Applied Mathematica: Proceedings of the 7th International Mathematica Symposium, eProceedings of IMS 2005* (CD-ROM), The University of Western Australia, Perth, Australia, 5-8.08.2005, Editors: Paul Abbott and Shane McCarthy, Wolfram Media Inc., Champaign USA, 2005.
- [Tal2003] Taler J., Duda P., *Rozwiązywanie prostych i odwrotnych zagadnień przewodzenia ciepła*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 2003.
- [Tur2005] Turiasa I.J., Gutiérrez J.M., Galindo P.L. *Modelling the effective thermal conductivity of an unidirectional composite by the use of artificial neural networks*, *Composites Science and Technology*, vol. 65, pp. 609-619, 2005.
- [Usc2008] Uściłowska A., *Rozwiązywanie wybranych zagadnień nieliniowych mechaniki metodą rozwiązań podstawowych*, Rozprawy nr 418, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, 2008
- [Won2011] Wong K.Y., Ling L., *Optimality of the method of fundamental solutions*, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 35, pp. 42-46, 2011.
- [Wei2009] Weise T., *Global Optimization Algorithms - Theory and Application*, University of Kassel, Distributed Systems Group, 2009.
- [Wis2000] Wiśniewski S., Wiśniewski T., *Wymiana Ciepła*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 2000.
- [Xie2008] Xie G.N., Sunden B., Wang Q.W., *Optimization of compact heat exchangers by a genetic algorithm*, *Applied Thermal Engineering*, vol. 28, 895-906, 2008.
- [Zho2008] Zhou S., Li Q., *Computational design of multi-phase microstructural materials for extremal conductivity*, *Computational Materials Science*, vol. 43, pp. 549-564, 2008.
- [Zie1985] Zieliński A. P. , Zienkiewicz O. C.. *Generalized finite element analysis with T-complete solution function*, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 21, pp. 509-528, 1985.
- [Zie2000] Zienkiewicz O.C., *The Finite Element Method*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.

Załączniki

W załącznikach zawierających kody programów umieszczono wybrane trzy programy napisane na cele badań numerycznych niniejszej pracy.

Załącznik 1 – kod programu - optymalizacja położenia źródeł ciepła z wykorzystaniem algorytmu genetycznego

Program napisano w języku Matlab/Comsol Script

```
function g = ga_ht4v2()
format long;
%parametry algorytmu genetycznego
mP=0.02; %prawdopodobieństwo mutacji
cP=0.25; %prawdopodobieństwo krzyżowania
DB=-1.0; %dolna granica przedziału przeszukiwania
TB=2.0; %górną granicę przedziału przeszukiwania

varLim=[
    0.071,0.945,3;
];
rng=(varLim(:,2)-varLim(:,1)).*(power(10,varLim(:,3)));
varN=length(rng);
bitsNV=zeros(1,varN);
for i=1:varN
    while((2^bitsNV(i))<rng(i))
        bitsNV(i)=bitsNV(i)+1;
    end
end
allBits=sum(bitsNV);
disp(bitsNV);

popN=8; %ilość osobników w populacji
prec=4; %dokładność obliczeń
maxCnt=8; %maksymalna ilość iteracji

bestCh=[1]; %dodatkowa zmienna zapamiętująca najlepszy CH
bestPop=0; %zawiera numer populacji w którym wystąpił najlepszy
bestChEval=0; %wartosc funkcji dopasowania najlepszego
rng=(TB-DB)*10^prec;%liczba całkowita reprezentująca szerokość przedziału
bitsN=1; %ilość bitów potrzebna do zakodowania CH
selCh=[]; %tablica zawierająca CH po selekcji
selCrossCh=[]; %tablica zawierająca numery CH do krzyżowania
q=[]; %dystrybuanta
wM=[]; %tablica zawierająca CH w formie binarnej
T=zeros(maxCnt,4); %tablica do zapisywania czasów iteracji
%dane(1,:)={'cnt','i','w','x','y','p','q'};
yval(bestCh,varLim,bitsNV,varN,0,1);
while((2^bitsN)<rng)
    bitsN=bitsN+1;
end
startPopRealM=rand(popN,varN);
for i=1:popN
    for j=1:varN
        wM(i,j)=round(startPopRealM(i,j).*2^bitsNV(j));
    end
end
warunek=0; %warunek zatrzymania pętli, przełącza się kiedy cnt==maxCnt
cnt=0; %licznik iteracji
% w pętlach używane są zmienne iteracyjne i, j
while(warunek==0)
    disp(cnt);
    tic;
    %wM=checkCoords(wM,0.101,bitsNV,varLim,varN,popN,bestCh);
    v=yvalN(wM,varLim,bitsNV,popN,varN);
```

```

vMin=abs(min(v)); %przesunięcie, do przedziału dodatniego, aby sP>0
vTmp=v+vMin;
vTmpAll=sum(vTmp); %całkowite dopasowanie populacji
sP=(vTmp/vTmpAll); %obliczanie prawdopodobieństwa selekcji CH sP

for i=1:popN
    if(v(i)>bestChEval)
        bestChEval=v(i);
        bestCh(1:varN)=wM(i,:);
        bestPop=cnt;
        display('znaleziono lepszego osobnika:');
        yval(bestCh,varLim,bitsNV,varN,0,cnt);
    end
    q(i)=sum(sP(1:i)); %obliczanie dystrybuanty
end
rv=rand(popN);
for i=1:popN
    r=rv(i); %losowanie do selekcji
    if(r<q(i))
        selCh(i)=wM(i); %zapisywane są wartości Ch z zachowaniem indeksów
    else
        for j=i+1:popN
            if r<q(j)
                selCh(i)=wM(j);
                break;
            end
        end
    end
end

r=rand(1); %losowanie do krzyżowania
if(r<=cP)
    selCrossChN=length(selCrossCh);
    selCrossCh(selCrossChN+1)=i; %zapisywane są indeksy CH z tablicy w
end

end

selCrossChN=length(selCrossCh); %ilosc CH do krzyżowania

if(mod(selCrossChN,2)==1)
    %usuwanie losowego jesli nieparzysta ilosc
    %selCrossCh(randint(1,1,[1,selCrossChN]))=[];
    selCrossCh(myRandInt(selCrossChN))=[];
    selCrossChN=selCrossChN-1;
end
for i=1 : (selCrossChN/2)

    %n=randint(1,1,[1,length(selCrossCh)]); %losowanie 1 CH do krzyż.
    n=myRandInt(length(selCrossCh));
    nw1=selCrossCh(n); %pobranie indeksu 1 CH w tablicy v
    selCrossCh(n)=[]; %wycięcie CH z tablicz CH wylosowanych do krzyż.

    %n=randint(1,1,[1,length(selCrossCh)]); %losowanie 2 CH do krzyż.
    n=myRandInt(length(selCrossCh));
    nw2=selCrossCh(n); %jw. 2CH
    selCrossCh(n)=[];

    %locus=randint(1,1,[2,popN-1]); %losowanie miejsca krzyżowania i-tej
    %pary
    locus=myRandInt(allBits-1);
    bw=0;
    bt=0;
    for j=locus:allBits-1
        for jj=(bw+1):varN
            if(j>bt)
                bw=bw+1;
                bt=bt+bitsNV(jj);
            else break;
            end
        end
    end
    k=j-1-bt+bitsNV(bw);
    %disp([wM(nw1,bw),2^(k)]);
    a1=bitand(wM(nw1,bw),2^(k));
    a2=bitand(wM(nw2,bw),2^(k));
    if(a1~a2)
        if(a1)

```

```

        wM(nw1,bw)=wM(nw1,bw)-2^(k);
        wM(nw2,bw)=wM(nw2,bw)+2^(k);
    else
        wM(nw1,bw)=wM(nw1,bw)+2^(k);
        wM(nw2,bw)=wM(nw2,bw)-2^(k);
    end
end
end
end
%koniec krzyżowania
%mutacja
rv=rand(popN,allBits);
for i=1 : popN
    bw=0;
    bt=0;
    for j= 1:allBits
        for jj=(bw+1):varN
            if(j>bt)
                bw=bw+1;
                bt=bt+bitsNV(jj);
            else break;
            end
        end
        k=j-1-bt+bitsNV(bw);
        r=rv(i,j);
        if(r<mp)
            %wBin(i,j)~=wBin(i,j);
            al=bitand(wM(i,bw),2^(k));
            if(al)
                wM(i,bw)=wM(i,bw)-2^(k);
            else
                wM(i,bw)=wM(i,bw)+2^(k);
            end
        end
    end
end
end
cnt=cnt+1;
if(cnt==maxCnt)
    warunek=1;
end
c=clock;
T(cnt,1)=cnt;
T(cnt,2)=toc;
T(cnt,3)=c(5);
T(cnt,4)=c(6);
end
disp(T);
disp(bestChEval);
disp(bestPop);
g=yval(bestCh,varLim,bitsNV,varN,1,cnt);
%end
%funkcja testowa dla pojedynczego chromosomu
function t=yval(x,varLim,bitsNV,varN,plt,cnt)
    for j=1:varN
        hN_tmp(j)=(x(j)/2^bitsNV(j))*(varLim(j,2)-varLim(j,1))+varLim(j,1);
    end
    for j=1:2:7
        jjk=(j-1)/2;
        hN(j)=0.89+hN_tmp(1)*cos(pi/4+jjk*pi/2);
        hN(j+1)=hN_tmp(1)*sin(pi/4+jjk*pi/2);
    end
    disp(hN);
    flclear fem

% COMSOL version
clear vrsn
% Geometry
g1=ellip2(1,1,'base','center','pos',[0,0]);
g2=ellip2(0.05,0.05,'base','center','pos',[hN(1),hN(2)]);
g3=ellip2(0.05,0.05,'base','center','pos',[hN(3),hN(4)]);
g4=ellip2(0.05,0.05,'base','center','pos',[hN(5),hN(6)]);
g5=ellip2(0.05,0.05,'base','center','pos',[hN(7),hN(8)]);

[g10,ctx,stx]=geomcomp({g1,g2,g3,g4,g5},'ns',{'g1','g2','g3','g4','g5'],'sf','g1-g2-
g3-g4-g5','edge','none','out',{'ctx','stx'});
[allmp,nbs]= geominfo(g10,'out',{'mp','nbs'],'od',[0;1]);
dd=ctx{1};

```

```

for ii=1:nbs
    for jj=1:4
        wb=dd(ii,jj);
        if(~(wb==0))
            tc(jj)=ii;
        end
    end
end
clear s
s.objs={g10};
s.name={'CO1'};
s.tags={'g10'};

fem.draw=struct('s',s);
fem.geom=geomcsg(fem);

% Initialize mesh
fem.mesh=meshinit(fem);

% (Default values are not included)

% Application mode 1
clear appl
appl.mode.class = 'HeatTransfer';
appl.assignsuffix = '_ht';
clear prop
prop.analysis='static';
appl.prop = prop;
clear bnd
bnd.type = 'T';
bnd.T0 = {343,303};
    bnd.ind = [1,1,1,1, 1,1,1,1, 1,1,1,1, 1,1,1,1, 1,1,1,1];
for jj=1:4
    bnd.ind(tc(jj))=2;
end
appl.bnd = bnd;
clear equ
equ.init = 303;
equ.ind = [1];
appl.equ = equ;
fem.appl{1} = appl;
fem.border = 1;
fem.outform = 'general';
fem.units = 'SI';

% Multiphysics
fem=multiphysics(fem);

% Extend mesh
fem.xmesh=meshextend(fem);

% Solve problem
fem.sol=femnlin(fem, ...
                'solcomp',{'T'}, ...
                'outcomp',{'T'});

% Save current fem structure for restart purposes
fem0=fem;
if(plt)
% Plot solution
postplot(fem, ...
         'tridata',{'T','cont','internal'}, ...
         'trimap','jet(1024)', ...
         'title','Surface: Temperature [K]', ...
         'refine',3, ...
         'axis',[-1.42910915934755,1.42910915934755,-1,1,-1,1]);
end
% Integrate
I1=postint(fem,'T', ...
           'dl',[1]);

% Integrate
I2=postint(fem,'1', ...
           'dl',[1]);
display(hN);
if(plt)
    display(hN_tmp);
end

```



```

end
Temp=I1/I2;
newline=NaN;
plik='C:\wyniki\kolo4v2.mat'; %definicja ścieżki do pliku wynikowego

save(plik,'cnt','newline','newline','Temp','newline','newline','x','newline','newline','
hN','newline','newline','hN_tmp','newline','newline','x','newline','newline','newline','
newline','-ascii','-append','-tabs');
t=I1/I2;
%funkcja testowa
function tN=yvalN(x,varLim,bitsNV,popN,varN)
    kN=zeros(1,popN);
    for i=1:popN
        for j=1:varN
            hN_tmp(i,j)=(x(i,j)/2^bitsNV(j))*(varLim(j,2)-varLim(j,1))+varLim(j,1);
        end
        for j=1:2:7
            jjk=(j-1)/2;
            hN(i,j)=hN_tmp(i,1)*cos(pi/4+jjk*pi/2);
            hN(i,j+1)=hN_tmp(i,1)*sin(pi/4+jjk*pi/2);
        end
    end
    %disp(hN);
    flclear fem

% Geometry
g1=ellip2(1,1,'base','center','pos',[0,0]);
g2=ellip2(0.05,0.05,'base','center','pos',[hN(i,1),hN(i,2)]);
g3=ellip2(0.05,0.05,'base','center','pos',[hN(i,3),hN(i,4)]);
g4=ellip2(0.05,0.05,'base','center','pos',[hN(i,5),hN(i,6)]);
g5=ellip2(0.05,0.05,'base','center','pos',[hN(i,7),hN(i,8)]);
[g10,ctx]=geomcomp({g1,g2,g3,g4,g5},'ns',{'g1','g2','g3','g4','g5'],'sf','g1-g2-g3-g4-
g5','edge','none','out',{'ctx'});
[allmp,nbs] = geominfo(g10,'out',{'mp','nbs'],'od',[0;1]);
dd=ctx{1};
for ii=1:nbs
    for jj=1:4
        wb=dd(ii,jj);
        if(~(wb==0))
            tc(jj)=ii;
        end
    end
end
clear s
s.objs={g10};
s.name={'CO1'};
s.tags={'g10'};

fem.draw=struct('s',s);
fem.geom=geomcsg(fem);

% Initialize mesh
fem.mesh=meshinit(fem);

% Application mode 1
clear appl
appl.mode.class = 'HeatTransfer';
appl.assignsuffix = '_ht';
clear prop
prop.analysis='static';
appl.prop = prop;
clear bnd
bnd.type = 'T';
bnd.T0 = {343,303};
bnd.ind = [1,1,1,1, 1,1,1,1, 1,1,1,1, 1,1,1,1, 1,1,1,1];
for jj=1:4
    bnd.ind(tc(jj))=2;
end
appl.bnd = bnd;
clear equ
equ.init = 303;
equ.ind = [1];
appl.equ = equ;
fem.appl{1} = appl;
fem.border = 1;
fem.outform = 'general';
fem.units = 'SI';

```

```

% Multiphysics
fem=multiphysics(fem);

% Extend mesh
fem.xmesh=meshextend(fem);

% Solve problem
fem.sol=femnlin(fem, ...
               'solcomp',{'T'}, ...
               'outcomp',{'T'});

% Save current fem structure for restart purposes
fem0=fem;
% Integrate
I1=postint(fem,'T', ...
           'dl',[1]);

% Integrate
I2=postint(fem,'l', ...
           'dl',[1]);

    kN(i)=I1/I2;
    disp(I1/I2);
%end comsol
    end;
    tN=kN;
%end
function b=checkCoords(x,r,bitsNV,varLim,varN,popN,bestCh)
    for i=1:popN
        uklad=1;
        for j=1:2:varN
            plr=(x(i,j)/2^bitsNV(j))*(varLim(j,2)-varLim(j,1))+varLim(j,1);
            plf=(x(i,j+1)/2^bitsNV(j+1))*(varLim(j+1,2)-varLim(j+1,1))+varLim(j+1,1);
            for k=(j+2):2:varN
                p2r=(x(i,k)/2^bitsNV(k))*(varLim(k,2)-varLim(k,1))+varLim(k,1);
                p2f=(x(i,k+1)/2^bitsNV(k+1))*(varLim(k+1,2)-varLim(k+1,1))+varLim(k+1,1);
                d=sqrt(plr^2+p2r^2-2*plr*p2r*cos(p2f-plf));
                %disp(d);
                if(d<=r)
                    uklad=0;
                    break;
                end
            end
        end
        if(uklad==0)
            x(i,:)=bestCh(:);
            %disp(x(i,:));
        end
    end

    end

b=x;
function w=myRandInt(a)
w=round(rand*(a-1))+1;

```

Załącznik 2 – kod programu - rozwiązanie zagadnienia Motza metodą rozwiązań podstawowych

Program napisano w języku Matlab/Comsol Script

```
function v=motz2(pkt,NZ,saveF)
%function v=motz2()

S=0.2;
M=12;
%saveF=1;
%NZ=12;
%[XZ,YZ]=zrodla(NZ,S);

XZ=pkt(1,:);
YZ=pkt(2,:);

N0=6*M-3-NZ;
N0=3;
% kolokacja z rozwiązaniami podstawowymi
%NZ=24; %podzielne przez 6;

[XAB,YAB,XCB,YCB,XDC,YDC,XED,YED,XEO,YEO,XOA,YOA,E,F,P,O,H,G,T,Z]=wkolMFS(M);
[A,B]=muklMFS(M,N0,NZ,XZ,YZ,XAB,YAB,XCB,YCB,XDC,YDC,XED,YED,XEO,YEO,XOA,YOA,E,F,P,O,H,G,
T,Z);
X=linsolve(A,B');

bd1=0;
bd2=0;
bd3=0;
bd4=0;
bd5=0;
bd6=0;
xb1=1;
xb2=0;
xb3=1;
xb4=0;
yb1=0;
yb2=0;
num=201;
for i=1:num
    wsp=(i-1)/num;
    [dfu,xdf,ydf]=rozprzy(1,wsp,XZ,YZ,X,NZ,N0);
    pd1=abs(dfu-1);
    if(bd1<pd1)
        bd1=pd1;
        yb1=wsp;
    end;
end;
num=201;
for i=1:num
    wsp=(i-1)/num;
    [dfu,xdf,ydf]=rozprzy(wsp-1,1,XZ,YZ,X,NZ,N0);
    pd2=abs(ydf);
    if(bd2<pd2)
        bd2=pd2;
        xb1=wsp-1;
    end;
end;
num=201;
for i=1:num
    wsp=(i-1)/num;
    [dfu,xdf,ydf]=rozprzy(-1,wsp,XZ,YZ,X,NZ,N0);
    pd3=abs(xdf);
    if(bd3<pd3)
        bd3=pd3;
        yb2=wsp;
    end;
end;
num=201;
for i=2:num
```

```

wsp=(i-1)/num;
[dfu,xdf,ydf]=rozprzy(wsp,0,XZ,YZ,X,NZ,N0);
pd4=abs(ydf);
if(bd4<pd4)
    bd4=pd4;
    xb2=wsp;
end;
end
for i=2:num
    wsp=(i-1)/num;
    [dfu,xdf,ydf]=rozprzy(wsp,1,XZ,YZ,X,NZ,N0);
    pd5=abs(ydf);
    if(bd5<pd5)
        bd5=pd5;
        xb3=wsp;
    end;
end
for i=2:num
    wsp=(i-1)/num;
    [dfu,xdf,ydf]=rozprzy(wsp-1,0,XZ,YZ,X,NZ,N0);
    pd6=abs(dfu);
    if(bd6<pd6)
        bd6=pd6;
        xb4=wsp-1;
    end;
end
Mx=[bd6,xb4,0;bd4,xb2,0;bd2,xb1,1;bd5,xb3,1;bd3,-1,yb2;bd1,1,yb1];
err=bd6+bd4+9*bd2+16*bd5+bd3+bd1;
v=[1/err,bd6,bd4,bd2,bd5,bd3,bd1];
if(saveF==1)

    iX=[];iY=[];iU=[];iXDF=[];iYDF=[];
    aa=0;
    for i=-1:0.1:1
        aa=aa+1;
        bb=0;
        for j=0:0.05:1
            bb=bb+1;
            [dfu,xdf,ydf]=rozprzy(i,j,XZ,YZ,X,NZ,N0);
            iX(aa,bb)=i;
            iY(aa,bb)=j;
            iU(aa,bb)=dfu;
            iXDF(aa,bb)=xdf;
            iYDF(aa,bb)=ydf;
        end
    end
end
clf;
surf(iX,iY,iYDF)

savefile = 'C:\motz\matrix_err.xls';
xlswrite(savefile, Mx);
savefile = 'C:\motz\matrix_xr.xls';
xlswrite(savefile, X);
end;
end

function [dfu,xdf,ydf]=rozprzy(xw,yw,XZ,YZ,X,NZ,N0)
r=realsqrt(xw^2+yw^2);
if(abs(xw)>0.1e-12)
    if(xw<0)
        T=pi-atan(yw/abs(xw));
    else
        T=atan(yw/xw);
    end
else
    T=0.5*pi;
end
dfu=0;
xdf=0;
ydf=0;
for i=1:N0
    dfu=dfu+X(i)*(r^((2*i-1)/2))*cos((2*i-1)*0.5*T);
    xdf=xdf+X(i)*.5*(2*i-1)*(r^((2*i-3)*0.5))*cos((2*i-3)*T*0.5);
    ydf=ydf-X(i)*.5*(2*i-1)*(r^((2*i-3)*0.5))*sin((2*i-3)*T*0.5);
end
for j=1:NZ
    i=N0+j;

```

```

        dfu=dfu+X(i)*fln(xw,yw,XZ(j),YZ(j));
        xdf=xdf+X(i)*dflnx(xw,yw,XZ(j),YZ(j));
        ydf=ydf+X(i)*dflny(xw,yw,XZ(j),YZ(j));
    end
end
function v=fln(x,y,xz,yz)
    r2=(x-xz)^2+(y-yz)^2;
    v=reallog(r2);
end
function v=dflnx(x,y,xz,yz)
    r2=(x-xz)^2+(y-yz)^2;
    v=2*(x-xz)/r2;
end
function v=dflny(x,y,xz,yz)
    r2=(x-xz)^2+(y-yz)^2;
    v=2*(y-yz)/r2;
end
function [XZ,YZ]=zrodla(NZ,s)
    XZ=[];YZ=[];
    M=NZ/6;
    del=1/M;
    for i=1:M
        XZ(i)=1+s;
        YZ(i)=0.5*del+del*(i-1);
        XZ(M+i)=0.5*del+del*(i-1);
        YZ(M+i)=1+s;
        XZ(2*M+i)=-1+0.5*del+del*(i-1);
        YZ(2*M+i)=1+s;
        XZ(3*M+i)=-1-s;
        YZ(3*M+i)=0.5*del+del*(i-1);
        XZ(4*M+i)=0.5*del+del*(i-1);
        YZ(4*M+i)=-s;
        XZ(5*M+i)=-1+0.5*del+del*(i-1);
        YZ(5*M+i)=-s;
    end
    %{
        bx1=-1:1/10:1;
        by1=zeros(1,21);
        %line 2
        bx2=ones(1,11);
        by2=0:1/10:1;
        %line 3
        bx3=1:-1/10:-1;
        by3=ones(1,21);
        %line 4
        bx4=-ones(1,11);
        by4=1:-1/10:0;
        bx=[bx1,bx2,bx3,bx4];
        by=[by1,by2,by3,by4];
        plot(bx,by);
        hold on;
    %}
    %scatter(XZ,YZ,5,[0 0 0],'filled');
end
function [XAB,YAB,XCB,YCB,XDC,YDC,XED,YED,XEO,YEO,XOA,YOA,E,F,P,O,H,G,T,Z]=wko1MFS(M)
    XAB=[];YAB=[];XCB=[];YCB=[];XDC=[];YDC=[];XED=[];YED=[];
    XEO=[];YEO=[];XOA=[];YOA=[];
    E=[];F=[];P=[];O=[];H=[];G=[];T=[];Z=[];
    for k=1:M
        XAB(k)=1;
        YAB(k)=(k-1)/(M-1);
        E(k)=realsqrt(1+((k-1)^2)/((M-1)^2));
        F(k)=atan2(k-1,M-1);

        XED(k)=-1;
        YED(k)=YAB(k);
        P(k)=E(k);
        O(k)=pi-F(k);

        YCB(k)=1;
        XCB(k)=YAB(k);
        H(k)=E(k);
        G(k)=0.5*pi-F(k);

        YDC(k)=1;
        XDC(k)=-YAB(k);
        T(k)=E(k);
    end

```

```

Z(k)=0.5*pi+F(k);

YEO(k)=0;
XEO(k)=XDC(k);
YOA(k)=0;
XOA(k)=XCB(k);
end
end
function
[A,B,NR]=muklMFS(M,N0,NZ,XZ,YZ,XAB,YAB,XCB,YCB,XDC,YDC,XED,YED,XEO,YEO,XOA,YOA,E,F,P,O,H
,G,T,Z)
A=[];B=[];
for k=1:M
w1=k;
w2=M+k;
w3=2*M+k;
B(w1)=1;
B(w2)=0;
B(w3)=0;
for i=1:N0
A(w1,i)=(E(k)^(0.5*(2*i-1)))*(cos((2*i-1)*F(k)*0.5));
A(w2,i)=(H(k)^(0.5*(2*i-3)))*(sin((2*i-3)*G(k)*0.5))*((2*i-1)*0.5);
A(w3,i)=(P(k)^(0.5*(2*i-3)))*(cos((2*i-3)*O(k)*0.5))*((2*i-1)*0.5);
end
for i=1:NZ
A(w1,N0+i)=fln(XAB(k),YAB(k),XZ(i),YZ(i));
A(w2,N0+i)=dflny(XCB(k),YCB(k),XZ(i),YZ(i));
A(w3,N0+i)=dflnx(XED(k),YED(k),XZ(i),YZ(i));
end
end
for k=2:M
w1=3*M+k-1;
w2=4*M+k-2;
w3=5*M+k-3;
B(w1)=0;
B(w2)=0;
B(w3)=0;
for i=1:N0
A(w1,i)=(0.5*(2*i-1))*(T(k)^(0.5*(2*i-3)))*(sin((2*i-3)*Z(k)*0.5));
A(w2,i)=0;
A(w3,i)=0;
end
for i=1:NZ
A(w1,N0+i)=fln(XDC(k),YDC(k),XZ(i),YZ(i));
A(w2,N0+i)=dflny(XOA(k),YOA(k),XZ(i),YZ(i));
A(w3,N0+i)=dflnx(XEO(k),YEO(k),XZ(i),YZ(i));
end
end
NR=N0+NZ;
end

```

Załącznik 3 – kod programu - wyznaczanie efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła

Program napisano w języku Matlab/Comsol Script

```
function strAB=lapl3v2s(rIC,SP,plt)

%IRR=[1.8875,1.8262,0.26313,12,10,12];
IRR=[1.0628,6.1328,0.071875,9,9,31];

DZ_z=IRR(1);
DW_z=IRR(2);
DW_w=IRR(3);
PZ_z=IRR(4);
PZ_zw=IRR(5);
PZ_ww=IRR(6);

XAB=[];YAB=[];XBC=[];YBC=[];XCD=[];YCD=[];XDA=[];YDA=[];
XKW=[];YKW=[];XZR=[];YZR=[];errTW=[];errDTW=[];

XABZ=[];YABZ=[];XBCZ=[];YBCZ=[];XCDZ=[];YCDZ=[];XDAZ=[];YDAZ=[];
XKWZ=[];YKWZ=[];XKWZ2=[];YKWZ2=[];VNX=[];VNY=[];

xIC2=[];
yIC2=[];
varN=length(SP);
for j=2:2:varN
    xIC(j/2)=SP(j-1);
    yIC(j/2)=SP(j);
end

%{
xIC(1)=SP(j);
yIC(1)=SP(j);
xIC(2)=SP(3);
yIC(2)=SP(4);
xIC(3)=SP(5);
yIC(3)=SP(6);
%}
[v,KW_cnt]=size(xIC);
AP=[];

%M - ilość punktów kolokacji na odc. jednostkowym
%MZ - ilość punktów źródłowych na odc. jednostkowym
%NZ - Całkowita ilość punktów źródłowych
%rIC - promień konturu wewnętrznego
%xIC - współrzędna X środka konturu wew.
%YCKw - współrzędna Y środka konturu wew.
%L1 - wsp. przewodzenia osnowy
%L2 - wsp przewodzenia włókna
%T1 - Temp. na brzegu AB
%T2 - Temp. na brzegu CD
PK_z=80;
PK_w=50;
%PZ_z=9;
%PZ_zA=4*10;
%PZ_zw=12;
%PZ_ww=8;
%PZ_zw=15;
%PZ_ww=5;

%xIC=0.7;
%yIC=0.7;

L1=2.0;
L2=0.1;
T1=0;
```

```

T2=100;
%DZ_z=1.4;
%DW_z=0.2;
%DW_w=0.19;
%1. współrzędne narożników
xA=-1.0; yA=-1.0;
xB=1.0; yB=-1.0;
xC=1.0; yC=1.0;
xD=-1.0; yD=1.0;

del=2/PK_z;

% 2. kontur zewnętrzny
% 2.1 punkty kolokacji na konturze zewnętrznym
for i=1:PK_z
    XAB(i)=xA+0.5*del+(i-1)*del; YAB(i)=yA;
    XBC(i)=xB; YBC(i)=yB+0.5*del+(i-1)*del;
    XCD(i)=xC-0.5*del-(i-1)*del; YCD(i)=yC;
    XDA(i)=xD; YDA(i)=yD-0.5*del-(i-1)*del;
end;

% 2.2 punkty źródłowe wokół konturu zewnętrznego
del = (2 + 2*DZ_z)/PZ_z;
for i=1:PZ_z
    XABZ(i)= xA-DZ_z+0.5*del+(i-1)*del; YABZ(i)= yA-DZ_z;
    XBCZ(i)= xB+DZ_z ; YBCZ(i)= yB-DZ_z+0.5*del+(i-1)*del;
    XCDZ(i)= xA-DZ_z+0.5*del+(i-1)*del; YCDZ(i)= yC+DZ_z;
    XDZ(i)= xD-DZ_z; YDZ(i)= yD-DZ_z+0.5*del+(i-1)*del;
    XZR(i) = XABZ(i); YZR(i) = YABZ(i);
    XZR(PZ_z+i) = XBCZ(i); YZR(PZ_z+i) = YBCZ(i);
    XZR(2*PZ_z+i) = XCDZ(i); YZR(2*PZ_z+i) = YCDZ(i);
    XZR(3*PZ_z+i) = XDZ(i); YZR(3*PZ_z+i) = YDZ(i);
end;

% 3. kontury wewnętrzne
% 3.1 punkty kolokacji na konturach zewnętrznych
for k=1:KW_cnt
    for i=1:PK_w
        rd=i*2*pi/PK_w;
        XKW(k,i)=xIC(k)+rIC*sin(rd);
        YKW(k,i)=yIC(k)+rIC*cos(rd);
        XKWA((k-1)*PK_w+i)=xIC(k)+rIC*sin(rd); YKWA((k-1)*PK_w+i)=yIC(k)+rIC*cos(rd);
        VNX(k,i)=sin(rd); VNY(k,i)=cos(rd); %składowe wekt. norm.
    end;
    % 3.2.1 punkty źródłowe wokół konturu wewnętrznego (wew kont. wew.)
    for i=1:PZ_ww
        rd=i*2*pi/PZ_ww;
        XKWZ(k,i)=xIC(k)+(rIC-1*DW_w)*sin(rd);
        YKWZ(k,i)=yIC(k)+(rIC-1*DW_w)*cos(rd);
        XZR(4*PZ_z+(k-1)*PZ_ww+i) = XKWZ(k,i);
        YZR(4*PZ_z+(k-1)*PZ_ww+i) = YKWZ(k,i);
    end;
    % 3.2.1 punkty źródłowe wokół konturu wewnętrznego (na zew. kont. wew.)
    for i=1:PZ_zw
        rd=i*2*pi/PZ_zw;
        XKWZ2(k,i)=xIC(k)+(rIC+1*DW_z)*sin(rd);
        YKWZ2(k,i)=yIC(k)+(rIC+1*DW_z)*cos(rd);
        XZR(4*PZ_z+KW_cnt*PZ_ww+(k-1)*PZ_zw+i) = XKWZ2(k,i);
        YZR(4*PZ_z+KW_cnt*PZ_ww+(k-1)*PZ_zw+i) = YKWZ2(k,i);
    end;
end

%4. Tworzenie macierzy układu
for i=1:PK_z
    % pętla przez PKT. KOL. na KONTURZE ZEWNĘTRZNYM
    iter=4*PZ_z+KW_cnt*PZ_ww;
    for j=1:iter %pętla przez PKT. ZR. dla KONT. ZEWN.
        AP( i, j ) = f1(XAB(i), YAB(i), XZR(j), YZR(j)); % T1
        AP( PK_z+i, j ) = dfldx(XBC(i), YBC(i), XZR(j), YZR(j)); % DT/DX=0
        AP( 2*PK_z+i, j ) = f1(XCD(i), YCD(i), XZR(j), YZR(j)); % DT/DX=0
        AP( 3*PK_z+i, j ) = dfldx(XDA(i), YDA(i), XZR(j), YZR(j)); % SM
    end
    for j=1:KW_cnt*PZ_zw %pętla przez PKT. ZR. dla KONTURU WEWNĘTRZNEGO
        AP( i, 4*PZ_z+KW_cnt*PZ_ww+ j ) = 0; % Te punkty źródłowe nie dotyczą KONT.
        ZEW.
    end
end

```



```

        AP( PK_z+i, 4*PZ_z+KW_cnt*PZ_ww+ j ) = 0;
        AP( 2*PK_z+i, 4*PZ_z+KW_cnt*PZ_ww+ j ) = 0;
        AP( 3*PK_z+i, 4*PZ_z+KW_cnt*PZ_ww+ j ) = 0;
    end
end
for k=1:KW_cnt % pętla przez KONTURY WEWNĘTRZNE
    for i=1:PK_w % pętla przez PKT. KOL. na KONTURZE WEWNĘTRZNYM
        iter=4*PZ_z+KW_cnt*PZ_ww;
        for j=1:iter %pętla przez PKT. ZR. dla KONTURU ZEWNĘTRZNEGO
            AP( 4*PK_z+(k-1)*PK_w+i, j ) = f1(XKW(k,i), YKW(k,i), XZR(j), YZR(j)); % TEMP.
CONT.
            AP( 4*PK_z+(KW_cnt+k-1)*PK_w+i, j ) = L1*df1dn(XKW(k,i), YKW(k,i), XZR(j),
YZR(j),xIC(k),yIC(k)); % DERIV. CONT.
        end
        for j=1:PZ_zw %pętla przez PKT. ZR. dla KONTURU WEWNĘTRZNEGO
            AP( 4*PK_z+(k-1)*PK_w+i, 4*PZ_z+KW_cnt*PZ_ww+(k-1)*PZ_zw+j ) = -f1(XKW(k,i),
YKW(k,i), XZR(4*PZ_z+KW_cnt*PZ_ww+(k-1)*PZ_zw+j), YZR(4*PZ_z+KW_cnt*PZ_ww+(k-
1)*PZ_zw+j)); % TEMP. CONT.
            AP( 4*PK_z+(KW_cnt+k-1)*PK_w+i, 4*PZ_z+KW_cnt*PZ_ww+(k-1)*PZ_zw+j ) = -
L2*df1dn(XKW(k,i), YKW(k,i), XZR(4*PZ_z+KW_cnt*PZ_ww+(k-1)*PZ_zw+j),
YZR(4*PZ_z+KW_cnt*PZ_ww+(k-1)*PZ_zw+j),xIC(k),yIC(k)); % DERIV. CONT.
        end
    end
end
end

%xlswrite('c:\APv3.xls',AP);
%5. Warunki brzegowe
BP=zeros(4*PK_z+2*KW_cnt*PK_w,1); %wektor pełen zer, więc nie jest zmieniany jeśli na
danym brzegu jest 0.
for i=1:PK_z
    BP(0*PK_z+i) = T1;
    BP(2*PK_z+i) = T2;
    BP(1*PK_z+i) = 0;
    BP(3*PK_z+i) = 0;
end

X=linsolve(AP,BP);

iX=[];iY=[];iU=[];
aa=0;
for i=-1:0.02:1
    aa=aa+1;
    bb=0;
    for j=-1:0.02:1
        bb=bb+1;
        dfu=roz(i,j,KW_cnt,PZ_z,PZ_ww,PZ_zw,X,XZR,YZR,XKW,YKW,XKWZ2,YKWZ2);
        iX(aa,bb)=i;
        iY(aa,bb)=j;
        iU(aa,bb)=dfu;
    end
end

% obliczenie wartości strumienia ciepła
step2=0.01;
str=0;
for i=-1:step2:1
    str=str+stream(i,-1,KW_cnt,PZ_z,PZ_ww,PZ_zw,X,XZR,YZR,XKW,YKW,XKWZ2,YKWZ2,L1,L2);
end
strAB=(str*(yC-yA))/((2/step2)*(T2-T1));

%sprawdzenie warunków
step=0.01;

%brzeg AB
errAB=0;
for j=-1:step:1
    vT=0;
    iter=4*PZ_z+KW_cnt*PZ_ww;
    for i=1:iter
        vT=vT+X(i)*f1(j,-1,XZR(i),YZR(i));
    end
    errAB=errAB+(T1-vT)^2;
end
errAB=(errAB^0.5)/(2/step);
%brzeg BC
errBC=0;
for j=-1:step:1

```

```

vT=0;
iter=4*PZ_z+KW_cnt*PZ_ww;
for i=1:iter
    vT=vT+X(i)*dfldx(1,j,XZR(i),YZR(i));
end

errBC=errBC+vT^2;
end
errBC=(errBC^0.5)/(2/step);
%brzeg CD
errCD=0;
for j=-1:step:1
    vT=0;
    iter=4*PZ_z+KW_cnt*PZ_ww;
    for i=1:iter
        vT=vT+X(i)*f1(j,1,XZR(i),YZR(i));
    end
    errCD=errCD+(T2-vT)^2;
end
errCD=(errCD^0.5)/(2/step);
%brzeg DA
errDA=0;
for j=-1:step:1
    vT=0;
    iter=4*PZ_z+KW_cnt*PZ_ww;
    for i=1:iter
        vT=vT+X(i)*dfldx(-1,j,XZR(i),YZR(i));
    end
    errDA=errDA+vT^2;
end
errDA=(errDA^0.5)/(2/step);

%kontury wewnetrzne
step=0.01;

for k=1:KW_cnt % petla przez KONTURY WEWNETRZNE
    for i=-1:step:1 % petla przez PKT. KOL. na KONTURZE WEWNETRZNYM
        errT=0;
        errDT=0;
        vT1=0;vDT1=0;vT2=0;vDT2=0;
        rd=i*2*pi/(2/step);
        xkw=xIC(k)+rIC*sin(rd);
        ykw=yIC(k)+rIC*cos(rd);
        for j=1:4*PZ_z+KW_cnt*PZ_ww;
            vT1=vT1+X(j)*f1(xkw, ykw, XZR(j),YZR(j));
            vDT1=vDT1+X(j)*L1*dfldn(xkw, ykw,XZR(j),YZR(j),xIC(k),yIC(k));
        end
        for j=1:PZ_zw
            vT2=vT2+X(4*PZ_z+KW_cnt*PZ_ww+(k-1)*PZ_zw+j)*f1(xkw, ykw,
XZR(4*PZ_z+KW_cnt*PZ_ww+(k-1)*PZ_zw+j), YZR(4*PZ_z+KW_cnt*PZ_ww+(k-1)*PZ_zw+j));
            vDT2=vDT2+X(4*PZ_z+KW_cnt*PZ_ww+(k-1)*PZ_zw+j)*L2*dfldn(xkw, ykw,
XZR(4*PZ_z+KW_cnt*PZ_ww+(k-1)*PZ_zw+j), YZR(4*PZ_z+KW_cnt*PZ_ww+(k-
1)*PZ_zw+j),xIC(k),yIC(k));
        end
        errT=errT+(vT1-vT2)^2;
        errDT=errDT+(vDT1-vDT2)^2;
    end
    errTW(k)=(errT^0.5)/(2/step);
    errDTW(k)=(errDT^0.5)/(2/step);
end

%disp(errTW);
%disp(errDTW);
%strABerr=strAB-strABmean;

errSQ=[errAB,errBC,errCD,errDA];
%disp(errSQ);
if(plt)
    csvwrite('C:\matrix_sq2.txt', errSQ);
    csvwrite('C:\matrix_tw2.txt', errTW);
    csvwrite('C:\matrix_dtw2.txt', errDTW);
    csvwrite('C:\matrix_str.txt', strAB);
    disp(strAB);
end
clf;
contour(iX,iY,iU,60);

```

```

    colormap(jet(128))
% surf(iX,iY,iU);
shading interp;
colorbar();
hold
scatter(XZR,YZR,3,[0 0 0],'filled')
scatter(XAB,YAB,3,[0 0 1],'filled')
scatter(XBC,YBC,3,[0 0 1],'filled')
scatter(XCD,YCD,3,[0 0 1],'filled')
scatter(XDA,YDA,3,[0 0 1],'filled')
scatter(XKWA,YKWA,3,[0 0 1],'filled')
view(2);
end

%
disp({'errAB=',errAB,'errBC=',errBC,'errCD=',errCD,'errDA=',errDA,'errT=',errT,'errDT=',
errDT})

%}

% rozwiązanie podstawowe
function v=f1(x,y,xs,ys)
r=realsqrt((x-xs)^2+(y-ys)^2);
v=reallog(r);

% rozwiązanie podstawowe - symetryczne

function v=f2(x,y,xs,ys)
r1=realsqrt((x-xs)^2+(y-ys)^2);
r2=realsqrt((x+xs)^2+(y-ys)^2);
v=(reallog(r1)-reallog(r2));

function v=dfldx(x,y,xs,ys)
r2=(x-xs)^2+(y-ys)^2;
v=(x-xs)/r2;

function v=dfldy(x,y,xs,ys)
r2=(x-xs)^2+(y-ys)^2;
v=(y-ys)/r2;

function v=dfldx2(x,y,xs,ys)
r2=(x-xs)^2+(y-ys)^2;
v=-((x - xs)^2 - (y - ys)^2)/r2^2;

function v=dfldy2(x,y,xs,ys)
r2=(x-xs)^2+(y-ys)^2;
v=((x - xs)^2 - (y - ys)^2)/r2^2;

function v=dfldn(x,y,xs,ys,xIC,yIC)
r=realsqrt((x-xIC)^2+(y-yIC)^2);
vnx=(x-xIC)/r;
vny=(y-yIC)/r;
fx=dfldx(x,y,xs,ys);
fy=dfldy(x,y,xs,ys);
w=vnx*fx+vny*fy;
%disp({x,y,vnx,vny,vnx^2,vny^2});
v=w;

function v=roz(x,y,KW_cnt,PZ_z,PZ_ww,PZ_zw,XR,XZR,YZR,XKW,YKW,XKWZ,YKWZ)
vT=0;
p=0;
for k=1:KW_cnt
p=k;
xrow=XKW(k,:);
yrow=YKW(k,:);
a=inpolygon(x,y,xrow,yrow);
if(a),break,end
end
if(a)
for i=1:PZ_zw
vT=vT+XR(4*PZ_z+KW_cnt*PZ_ww+(p-1)*PZ_zw+i)*f1(x,y,XKWZ(p,i),YKWZ(p,i));
end
else

```

```

    for i=1:4*PZ_z+KW_cnt*PZ_ww
        vT=vT+XR(i)*f1(x,y,XZR(i),YZR(i));
    end
end
v=vT;

function v=stream(x,y,KW_cnt,PZ_z,PZ_ww,PZ_zw,XR,XZR,YZR,XKW,YKW,XKWZ,YKWZ,L1,L2)
vT=0;
p=0;
for k=1:KW_cnt
    p=k;
    xrow=XKW(k,:);
    yrow=YKW(k,:);
    a=inpolygon(x,y,xrow,yrow);
    if(a),break,end
end
if(a)
    for i=1:PZ_zw
        vT=vT+XR(4*PZ_z+KW_cnt*PZ_ww+(p-1)*PZ_zw+i)*L2*dfldy(x,y,XKWZ(p,i),YKWZ(p,i));
    end
else
    for i=1:4*PZ_z+KW_cnt*PZ_ww
        vT=vT+XR(i)*L1*dfldy(x,y,XZR(i),YZR(i));
    end
end
v=vT;

```